# 摘要

我們知道在高中數學課本第一冊講到複數單元的時候，複數可以看成實數的擴張，複數一樣可以定義加法和乘法運算，也有相同的加法和乘法結合律、交換律和分配律，碰到虛數單位 i 時，利用 $i^2=-1$ 作運算化簡，但我們知道複數和實數的不同之處是無法比較大小，所以很少考慮實係數不等式複數解問題，例如我們知道 $x^2+1<0$ 無實數解 ，但是考慮複數解的話 $x=2i$ 亦為其中ㄧ解，此作品就是以我們熟悉的實係數二次不等式出發來討論，除了實數解外還有哪些複數解會滿足不等式，特別在實係數三次不等式的複數解，居然跟我們所學的雙曲線有關。此外在同一單元也學到了分式多項式的不等式，但若要求複數解則無法運用相同方式，我們找到了另一種方法求得分式多項式不等式複數解，發現雖然可以求出高次解圖形，卻因過於複雜而無法進行分析，其中圖形也包含了許多已知的事實，如：圖形對稱 $X$ 軸、實數解範圍……等。

# 目錄

# 壹、研究動機

在上高一數學第一冊多項式單元時，數學老師解二次不等式 $ax^2+bx+c<0$，其中 $a>0$，$b$，$c\in R$ 且判別式 $D=b^2-4ac<0$，老師告訴我們此不等式無實數解。但我們之前學過二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，其中 $a\neq 0$，$b$，$c\in R$ 且判別式 $D=b^2-4ac<0$，則方程式的解為兩共軛虛根 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{-D}i}{2a}$，這時腦中忽然有一種想法: 如果實係數二次不等式無實數解，那麼應該會有複數解吧？如果考慮複數解時，其解集合畫在複數平面上的圖形又為何呢？而我們是否也可以找尋出實係數分式不等式之複數解和圖形呢?

# 貳、研究目的

考慮 $n$ 次實係數多項不等式 $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0>0$ 其中 $a_i\in R,\ \forall 0\le i\le n, a_n\neq 0$ 與 $n$ 次分之 $m$ 次之實係數分式不等式 $g(z)=\dfrac{a_mz^m+a_{m-1}z^{m-1}+\dots\dots+a_1z+a_0}{b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+\dots\dots+b_1z+b_0}>0$ 其中 $a_i\in R,\ \forall 0\le i\le m, a_n\neq 0$ 且 $b_i\in R,\ \forall 0\le i\le n, a_n\neq 0$，尋找此時不等式中 $z$ 的複數解為何，且探討將解集合畫在複數平面上會是怎樣的圖形。

# 參、研究設備及器材

紙、筆和電腦繪圖軟體 GeoGebra

# 肆、研究過程

## 一、問題簡化與解決問題的思路：

(一).不等式兩邊同除以首項係數，我們可以將所有的實係數多項式不等式首項係數化為1

(二).我們原來考慮的不等式形式有四種 $f(z)>0$，$f(z)\ge 0$，$f(z)<0$，$f(z)\le 0$，但是因為 $f(z)\ge 0$ 可看成 $f(z)>0$ 和 $f(z)$=0 這兩個解集合的聯集，且 $f(z)\le 0$ 可看成 $f(z)<0$ 和 $f(z)$=0 這兩個解集合的聯集，所以我們只需考慮以下兩個不等式： $f(z)>0$ 和 $f(z)$<0

(三).我們知道 $f(z)=\operatorname{Re}f(z)+i\operatorname{Im}f(z)$，其中 $\operatorname{Re}f(z)$ 為 $f$ 的實部，$\operatorname{Im}f(z)$ 為 $f$ 的虛部，所以不等式 $f(z)>0$ 等價於解 $\operatorname{Re}f(z)>0$ 且 $\operatorname{Im}f(z)$=0，然後將 $\operatorname{Im}f(z)$=0

的複數解畫在複數平面上可得到一曲線關係，再利用 $\operatorname{Re} f(z)>0$ 將複數 $z=x+iy$ 的範圍標示在 $\operatorname{Im} f(z)$=0 的曲線上，這樣我們就求得不等式 $f(z)>0$ 的複數解在複數平面上的圖形

(四).利用變數平移獲得的新函數不等式與原函數不等式之間解集合有某種關係，我們定義下列兩個集合：

$A=\left\{z\in C \middle| f(z)>0\right\}$ ， $B=\left\{z^{'}\in C \middle| z^{'}=z-h, f(z^{'}+h)>0\right\}$ 則我們可以很容易證明

上述兩集合有下面的關係 $A=B+h$，其中 $B+h==\left\{z+h\in C \middle| z\in B\right\}$ 這代表了若我

們能把集合 $B$ 解出來，那集合 $A$ 只需要將集合 $B$ 平移 $h$ 單位即可求出，這點將幫助我們可以藉由變數平移將原函數某些係數變為零，則所得到的新函數將比較容易求得解集合，然後再平移回去即可得到我們所要求的解集合

(五).分式利用以上方法展開後再利用根式有理化 $\frac{A+Bi}{C+Di}=\frac{(AC+BD)+(CB\text{-}AD)i}{C^2+D^2}$

此時分母>0 ，所以只須探討 $(AC+BD)>0$ 且 $(CB\text{-}AD)=0$

(六).利用倒數關係 $\frac{A+Bi}{C+Di}=\frac{(AC+BD)+(CB-AD)i}{C^2+D^2}$ 與 $\frac{C+Di}{A+Bi}=\frac{(AC+BD)+(AD-BC)i}{A^2+B^2}$ 探討

實部 $>0$ 及虛部 $=0$ ，因為實部相同，虛部 $=0$ 兩者意義等價，所以只需討論一種即可

# 二、主要問題結果與討論：

## (一)實係數一次與二次多項式不等式複數解的探討

首先我們先考慮實係數一次多項式不等式 $f(z)=z+p>0$ ，其解很容易解得 $z>-p$ ，同樣的道理如果解 $f(z)=z+p<0$ ，其解為 $z<-p$ ，所以此情況不等式解均為實數解，接者再考慮實係數二次多項式 $f\left(z\right)=z^2+pz+r$ ，令 $z=x+iy$ 其中代入

$$f(x+iy)=(x+iy)^2+p(x+iy)+r$$
$$=x^2-y^2+px+r+i(2xy+py)$$

$f\left(x+iy\right)\in R$ 等於求 $2xy+py=0\Rightarrow y=0$ 或 $\mathrm{x}=-\frac{p}{2}$ 再代回 $f$ 解得

$f\left(x+0i\right)=x^2+px+r$ 或是

$$f\left(-\frac{p}{2}+iy\right)=\frac{p^2}{4}-y^2-\frac{p^2}{2}+r=-\frac{p^2}{4}+r-y^2=\frac{4r-p^2}{4}-y^2$$

若要解 $f(z)>0 \Rightarrow y=0$ 且 $x^2+px+r>0$ ----------(1)

$$x=-\frac{p}{2} \text{且} \frac{4r-p^2}{4}-y^2>0 \qquad \text{-----------(2)}$$

令判別式 $D=p^2-4r$ 則

若 $D>0$，由 $(1)$ 得不等式解為 $z=x+iy$ 其中 $y=0$

$$\text{且}\ x>\frac{-p+\sqrt{D}}{2} \text{或} x<\frac{-p-\sqrt{D}}{2}$$

由(2) 得不等式解為 $z=x+iy$ 其中 $x=-\frac{p}{2}$ 且 $y$ 無實數解

即 $z$ 無複數解

若 $D=0$，由 $(1)$ 得不等式解為 $z=x+iy$ 其中 $y=0$ 且 $x\neq-\frac{p}{2}$

由 $(2)$ 得不等式解為 $z=x+iy$ 其中 $x=-\frac{p}{2}$ 且 $y$ 無實數解

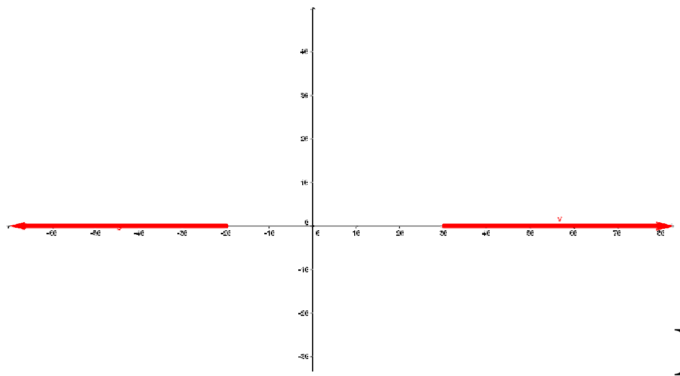
即 $z$ 無複數解

若 $D<0$，由 $(1)$ 得不等式解為 $z=x+iy$ 其中 $y=0$ 且 $x\in R$

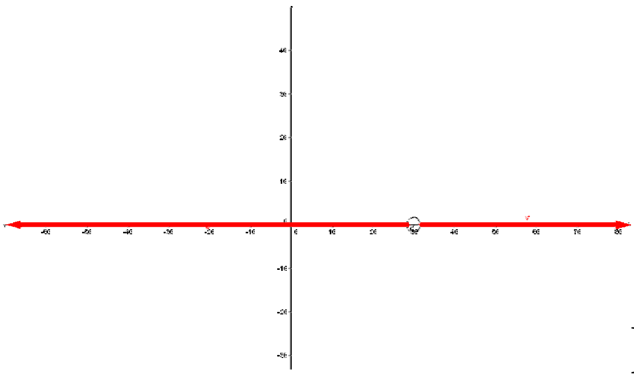
由 $(2)$ 得不等式解為

$z=x+iy$ 其中 $x=-\frac{p}{2}$ 且 $\frac{-\sqrt{-D}}{2}<y<\frac{\sqrt{-D}}{2}$

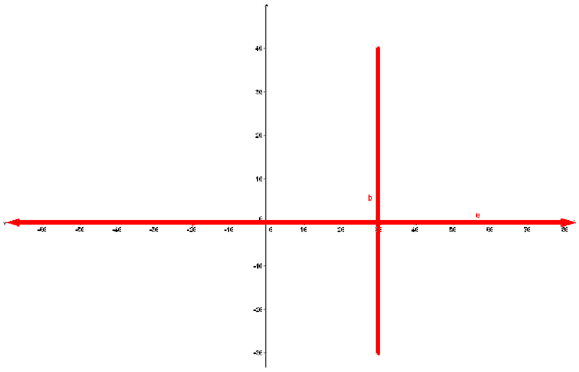
下圖為複數平面上不等式解集合：



D>0



D=0



D<0

## (二)實係數三次多項式不等式複數解的探討

### 1.特殊型實係數三次多項不等式複數解探討：

由於一開始直接處理一般實係數三次多項式不等式有所困難，所以我們先考慮型式為 $f(z)=z^3+q$ ，令 $z=x+iy \quad x,y\in R$ 代入

$$f(x+iy)=(x+iy)^3+q=x^3-3xy^2+q+\mathrm{y}(3x^2-y^2)i$$

若要解 $f(z)>0$ 等於解 $\operatorname{Re} f(z) = x^3-3xy^2+q>0$ 且 $\operatorname{Im} f(z)=y(3x^2-y^2)=0$

於是我們得到

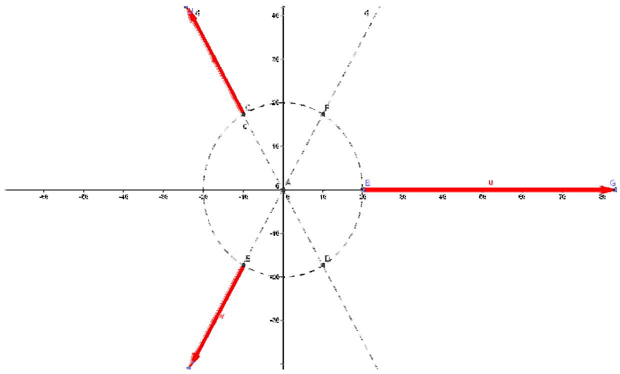
$(1)\ y=0$時 ，$f(x+0i)=x^3+q>0 \Rightarrow x>\sqrt[3]{-q}$

此時得不等式解為 $z=x+iy$ 其中 $y=0$ 且 $x>\sqrt[3]{-q}$

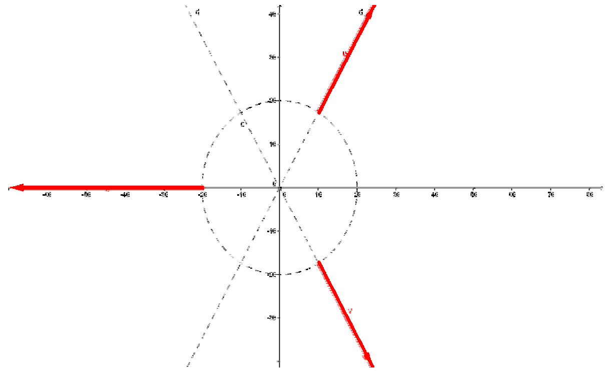
$(2)\ y=\pm\sqrt{3}x$時，$f\left(x\pm(\sqrt{3}x)i\right)=x^3-9x^3+q=-8x^3+q>0 \Rightarrow x<\dfrac{\sqrt[3]{q}}{2}$

此時得不等式解為 $z=x+iy$ 其中 $y=\pm\sqrt{3}x$ 且 $x<\frac{\sqrt[3]{q}}{2}$

下圖為複數平面上不等式解集合：



$f(z)>0$



$f(z)<0$

**2.一般型實係數三次多項不等式複數解探討：**

考慮 $f(z)=z^3+az^2+bz+c$ ，由於我們希望能夠利用變數代換將 $z^2$ 係數消去，我們令 $z'=z+h$ 代換

$$f(z'-h)=(z'-h)^3+a(z'-h)^2+b(z'-h)+c$$
$$=z'^3+(a-3h)z'^2+(3h^2-2ah+b)z'+(ah^2-bh-h^3+c)$$

令 $h=\frac{a}{3}$ 得 $z'=z+\frac{a}{3}$ 代換

$$f\left(z'-\frac{a}{3}\right)=z'^3+pz'+q \quad 其中\ p=b-\frac{a^2}{3},q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$$

我們只需要考慮此形式的實係數三次多項式 $f(z)=z^3+pz+q$ 不等式之複數解，因為一般型式實係數三次多項式可利用平移的手法變成沒有二次係數的三次多項式，最後只需將解平移回去即可得到原實係數三次多項式的複數解，探討 $f(z)=z^3+pz+q$ 的不等式複數解

若 $p=0$ ，得 $f(z)=z^3+q$ 此形式不等式複數解前面已討論過

若$p \neq 0$，得$f\left(x+iy\right)=x^3-3xy^2+px+q+iy(3x^2-y^2+p)$

若要解$f(z)>0 \Rightarrow \operatorname{Re} f=x^3-3xy^2+px+q>0$且$\operatorname{Im} f=y(3x^2-y^2+p)=0$

我們得到$\left(1\right)y=0$時,$f\left(x+0i\right)=x^3+px+q>0$

$\left(2\right)y^2=3x^2+p$時 ,$f\left(x+iy\right)=x^3-3xy^2+px+q>0$

將 $y^2=3x^2+p$ 代入得

$$f\left(x+iy\right)=x^3-3x\left(3x^2+p\right)+px+q=-8x^3-2px+q>0$$

令三次多項式判別式$D=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}$

上述(1)，(2)中的不等式解需要下列定理

**定理：實係數方程$x^3+px+q=0$**

**(a)當 $D$>0 時，有一個實根和兩個共軛虛根；**

**(b)當 $D$=0 時，有三個實根，且其中有兩根相等；**

**(c)當 $D$<0 時，有三個互不相等的實根。**

此定理證明可參照參考資料二

引用上述定理我們可解得

若$D$>0時，$\left(1\right)$的不等式解$z=x+iy$ 其中$x>\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{D}}$且$y=0$

$\left(2\right)$的不等式解$z=x+iy$ 其中 $y^2-3x^2=p$且$x<\dfrac{-1}{2}(\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}-\sqrt{D}})$

若$D$=0時，$\left(1\right)$的不等式解$z=x+iy$ 其中 $x>-2\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}}$但$x\neq\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}}$ 且$y=0$

$\left(2\right)$的不等式解$z=x+iy$ 其中 $y^2-3x^2=p$且$x<\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}}$

但$x\neq\dfrac{-1}{2}(\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}})$

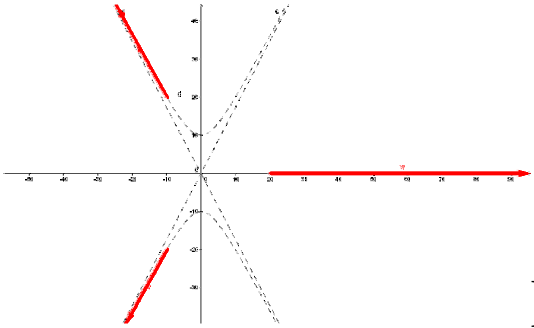
若$D$<0時，利用卡當公式解必可求得三相異根為$x_1<x_2<x_3$

$\left(1\right)$的不等式解$z=x+iy$ 其中 $x_1<x<x_2$或是$x_3<x$且$y=0$

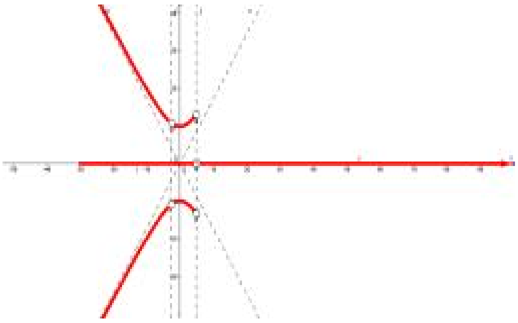
$\left(2\right)$的不等式解$z=x+iy$ 其中 $y^2-3x^2=p$

且$-\dfrac{x_2}{2}<x<-\dfrac{x_1}{2}$或是$x<-\dfrac{x_3}{2}$

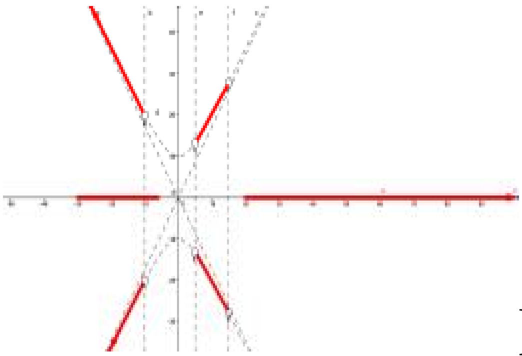
下圖為複數平面上不等式解集合：



D>0



D=0



D<0

### (三)實係數四次多項式不等式複數解的探討

**1.特殊型實係數四次多項不等式複數解探討：**

利用前面討論實係數三次多項不等式的想法，我們先考慮型式較為簡單的實係數四次函數 $f(z)=z^4+q$ ，其中 $q>0$ ，令 $z=x+iy \quad x,y\in R$ 代入

得 $f(x+iy)=(x+iy)^4+q=(x^4-6x^2y^2+y^4+q)+4\text{xy}(x^2-y^2)i$

若要解 $f(z)>0$ 等於解 $\operatorname{Re} f(z)=x^4-6x^2y^2+y^4+q>0$

且 $\operatorname{Im} f(z)=4xy(x^2-y^2)=0$

於是我們得到 $(1)\,x=0$時，$f(0+yi)=y^4+q>0 \;\Rightarrow y\in R$

此時得不等式解為 $z=x+iy$ 其中 $x=0$ 且 $y\in R$

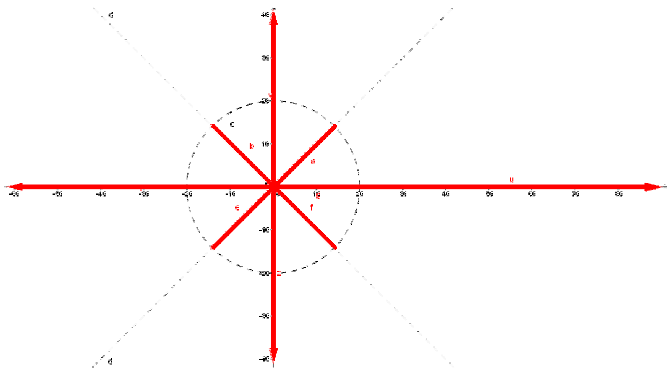
$(2)\ y=0$時，$f(x+0i)=x^4+q>0\Rightarrow x\in R$

此時得不等式解為 $z=x+iy$ 其中 $y=0$ 且 $x\in R$

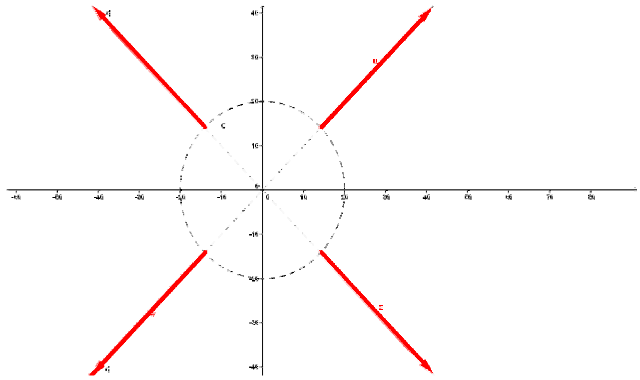
$(3)\ x^2-y^2=0$ 時 $f(x+yi)=-4x^4+q>0\Rightarrow -\sqrt[4]{\frac{q}{4}}<x<\sqrt[4]{\frac{q}{4}}$

此時得不等式解為 $z=x+iy$ 其中 $x^2-y^2=0$ 且 $-\sqrt[4]{\frac{q}{4}}<x<\sqrt[4]{\frac{q}{4}}$

下圖為複數平面上不等式解集合：



$f(z)>0$



$f(z)<0$

類似地我們若考慮 $f(z)<0$ 則此時不等式複數解在(1)與(2)兩情況為 $z$ 無複數解，則在(3)情況不等式解為 $z=x+iy$ 其中 $x^2-y^2=0$ 且 $x<-\sqrt[4]{\frac{q}{4}}$ 或者 $\sqrt[4]{\frac{q}{4}}<x$

因此可以解得實係數四次函數 $f(z)=z^4+q$，其中 $q<0$ 的不等式複數解

**2.一般型實係數四次多項不等式複數解探討：**

首先我們可先利用變數平移將多項式中的三次係數消去，考慮實係數四次多項式

$f(z)=z^4+az^3+bz^2+cz+d$ ，令 $z=z'-\dfrac{a}{4}$代換

得$f\left(z'-\dfrac{a}{4}\right)=z'^4+pz'^2+qz'+r$

其中$p=\dfrac{3a^2}{8}-\dfrac{3a}{4}+b, q=-\dfrac{a^3}{16}+\dfrac{3a^2}{16}-\dfrac{ab}{2}+c, r=\dfrac{-3a^4}{256}+\dfrac{a^2b}{16}-\dfrac{ac}{4}+d$

我們只需要考慮此形式的實係數四次多項式$f(z)=z^4+pz^2+qz+r$不等式之複數解，因為一般型式實係數四次多項式可利用平移的技巧變成沒有三次係數的四次多項式，最後只需將解平移回去即可得到不等式的複數解，探討$f(z)=z^4+pz^2+qz+r$的不等式複數解

在此我們考慮上述函數的特例，我們考慮若$q=0$的情形，即函數形式為$f(z)=z^4+pz^2+r$ ，若$p=0$時我們已在前面討論過。

若$p\neq 0$時令$z=x+iy \quad x,y\in R$代入得

$$f(x+iy)=(x+iy)^4+p(x+iy)^2+r=x^4-6x^2y^2+y^4+p(x^2-y^2)+r+2\text{xy}(2x^2-2y^2+p)i$$

要解$f(z)>0$等於解$\operatorname{Re} f=x^4-6x^2y^2+y^4+p(x^2-y^2)+r>0$

且 $\operatorname{Im} f(z)=2\text{xy}(2x^2-2y^2+p)=0$

假如考慮$D=p^2-4r\geq 0$且$r\leq 0$(注意此時$|p|\leq\sqrt{D}$)於是我們得到

$(1)\, x=0$時$\Rightarrow y^4-py^2+r>0 \;\Rightarrow\; y<-\sqrt{\dfrac{p+\sqrt{D}}{2}}$或$\sqrt{\dfrac{p+\sqrt{D}}{2}}<y$

此時得不等式解為$z=x+iy$ ,其中 $x=0$

且$y<-\sqrt{\dfrac{p+\sqrt{D}}{2}}$或$\sqrt{\dfrac{p+\sqrt{D}}{2}}<y$

$(2)\, y=0\Rightarrow x^4+px^2+r>0\Rightarrow x<-\sqrt{\dfrac{-p+\sqrt{D}}{2}}$或$\sqrt{\dfrac{-p+\sqrt{D}}{2}}<x$

此時得不等式解為$z=x+iy$ ,其中 $y=0$

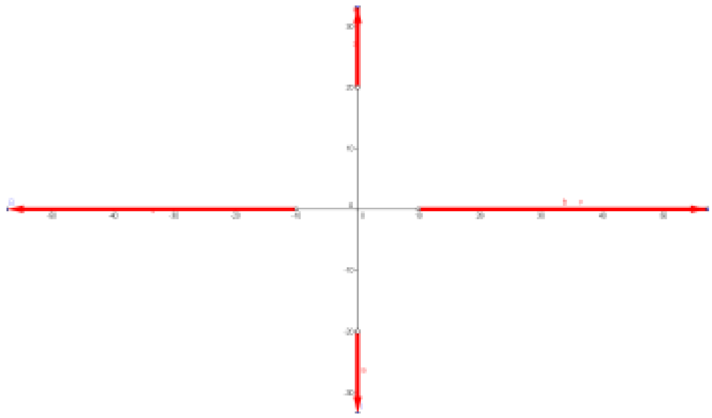
且$x<-\sqrt{\dfrac{-p+\sqrt{D}}{2}}$或$\sqrt{\dfrac{-p+\sqrt{D}}{2}}<x$

$$(3)x^2-y^2=-\frac{p}{2}\Rightarrow -4x^4-2px^2-\frac{p^2}{4}+r>0\Rightarrow 4(x^2+\frac{p}{4})^2-r<0$$

但是$4(x^2+\frac{p}{4})^2-r$恆正，所以上式不等式$x$無實數解

此時解為$z=x+iy$ ,其中 $x^2-y^2=-\frac{p}{2}$且$x$無實數解、即$z$無複數解

下圖為複數平面上不等式解集合：



假如考慮$D=p^2-4r\geq 0$且$r>0$(注意此時$|p|>\sqrt{D}$)

若$p>\sqrt{D}$

$(4)x=0$時$\Rightarrow y^4-py^2+r>0\ \Rightarrow$

$$y<-\sqrt{\frac{p+\sqrt{D}}{2}}\text{或}-\sqrt{\frac{p-\sqrt{D}}{2}}<y<\sqrt{\frac{p-\sqrt{D}}{2}}\text{或}\sqrt{\frac{p+\sqrt{D}}{2}}<y$$

此時得不等式解為$z=x+iy$ ,其中 $x=0$且

$$y<-\sqrt{\frac{p+\sqrt{D}}{2}}\text{或}-\sqrt{\frac{p-\sqrt{D}}{2}}<y<\sqrt{\frac{p-\sqrt{D}}{2}}\text{或}\sqrt{\frac{p+\sqrt{D}}{2}}<y$$

$(5)\,y=0\Rightarrow x^4+px^2+r>0\Rightarrow (x^2-\frac{-p+\sqrt{D}}{2})(x^2-\frac{-p-\sqrt{D}}{2})>0$

$\Rightarrow x$為任意實數

此時得不等式解為$z=x+iy$ ,其中 $y=0$且$x$為任意實數

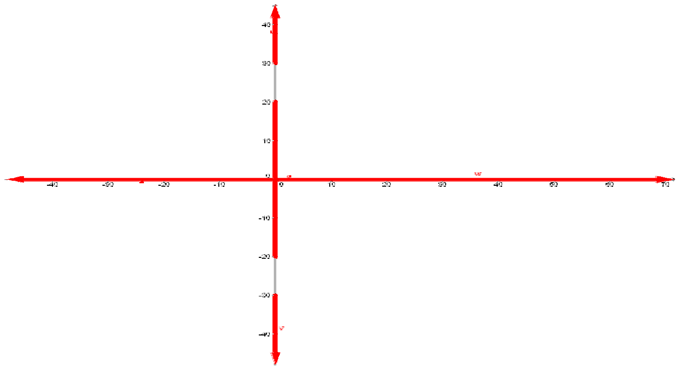
$$(6) x^2 - y^2 = -\frac{p}{2} \Rightarrow -4x^4 - 2px^2 - \frac{p^2}{4} + r > 0 \Rightarrow 4(x^2 + \frac{p}{4})^2 - r < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-p-2\sqrt{r}}{4} < x^2 < \frac{-p+2\sqrt{r}}{4} \leq 0(因為|p| \geq 2\sqrt{r})$$

$\Rightarrow x$無實數解

此時解為 $z = x + iy$ ,其中 $x^2 - y^2 = -\frac{p}{2}$ 且 $x, y$ 為上述關係式

下圖為複數平面上不等式解集合：



若 $p < -\sqrt{D}$ 且 $p \leq -2\sqrt{r}$

$$(7) x = 0時 \Rightarrow y^4 - py^2 + r > 0 \Rightarrow (y^2 - \frac{p+\sqrt{D}}{2})(y^2 - \frac{p-\sqrt{D}}{2}) > 0$$

$\Rightarrow$ y 為任意實數

此時得不等式解為 $z = x + iy$ ,其中 $x = 0$ 且 $y$ 為任意實數

$$(8) y = 0 \Rightarrow x^4 + px^2 + r > 0 \Rightarrow (x^2 - \frac{-p+\sqrt{D}}{2})(x^2 - \frac{-p-\sqrt{D}}{2}) > 0$$

$$x < -\sqrt{\frac{-p+\sqrt{D}}{2}} 或 -\sqrt{\frac{-p-\sqrt{D}}{2}} < x < \sqrt{\frac{-p-\sqrt{D}}{2}} 或 \sqrt{\frac{-p+\sqrt{D}}{2}} < x$$

此時得不等式解為 $z = x + iy$ ,其中　$y = 0$ 且

$$x < -\sqrt{\frac{-p+\sqrt{D}}{2}} 或 -\sqrt{\frac{-p-\sqrt{D}}{2}} < x < \sqrt{\frac{-p-\sqrt{D}}{2}} 或 \sqrt{\frac{-p+\sqrt{D}}{2}} < x$$

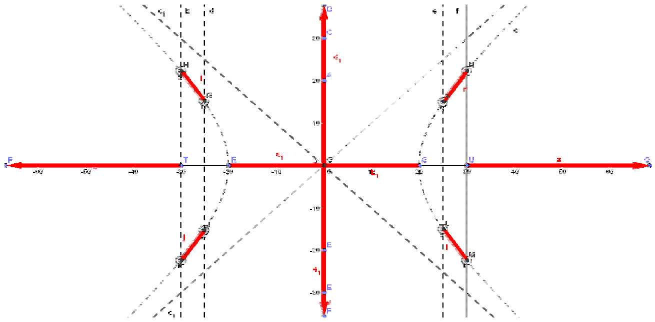
$$(9)x^2-y^2=-\frac{p}{2}\Rightarrow -4x^4-2px^2-\frac{p^2}{4}+r>0\Rightarrow 4(x^2+\frac{p}{4})^2-r<0$$

則不等式解為

$$-\sqrt{\frac{-p+2\sqrt{r}}{4}}<x<-\sqrt{\frac{-p-2\sqrt{r}}{4}} \text{或} \sqrt{\frac{-p-2\sqrt{r}}{4}}<x<\sqrt{\frac{-p+2\sqrt{r}}{4}}$$

此時解為 $z=x+iy$ ,其中 $x^2-y^2=-\frac{p}{2}$ 且 $x,y$ 為上述關係式

下圖為複數平面上不等式解集合：



因此若 $D=p^2-4r<0$ 且 $r\le 0$ 或是 $D=p^2-4r<0$ 且 $r>0$ 我們也可以討論，若要解 $f(z)<0$，則將上次不等式方向變號即可。

## (四)型如 $\frac{z+e}{z+a}$ 與 $\frac{z+e}{z^2+az+b}$ 分式不等式複數解的討論

考慮分式 $f(z)=\frac{z+e}{z+a}$，令 $z=x+yi$ 代入得 $f(z)=f(x+yi)=\frac{x+e+yi}{x+a+yi}$

展開後整理得

實部：$\operatorname{Re} f(z)=\frac{(x+e)(x+a)+y^2}{(x+a)^2+y^2}$

虛部：$\operatorname{Im} f(z)=\frac{(x+a)y-(x+e)y}{(x+a)^2+y^2}$

$f(x+iy)\in R$ 等於求 $\operatorname{Im} f(z)=0$

(1) $y=0\Rightarrow (x+e)(x+a)>0$

(2) $y\neq 0\Rightarrow a=e$ 此時分母與分子相同，不等式只在 $>0$ 成立，即 $1>0$

接著考慮分式 $f(z)=\frac{z+e}{z^2+az+b}$，令 $z=x+yi$ 代入

得 $f(z)=f(x+yi)=\dfrac{(x+yi)+e}{(x+yi)^2+a(x+yi)+b}$

展開整理後得

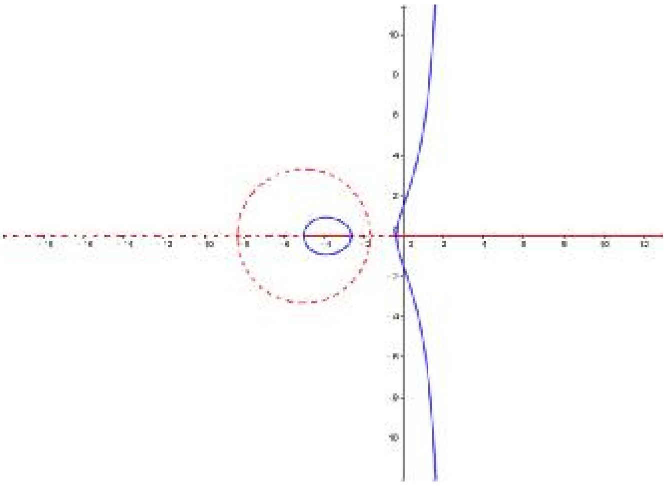
實部： $\operatorname{Re} f(z)=\dfrac{(x^2-y^2+ax+b)(x+e)+y(2xy+ay)}{(x^2-y^2+ax+b)^2+(2xy+ay)^2}$

虛部： $\operatorname{Im} f(z)=\dfrac{(x^2-y^2+ax+b)y-(2xy+ay)(x+e)}{(x^2-y^2+ax+b)^2+(2xy+ay)^2}$

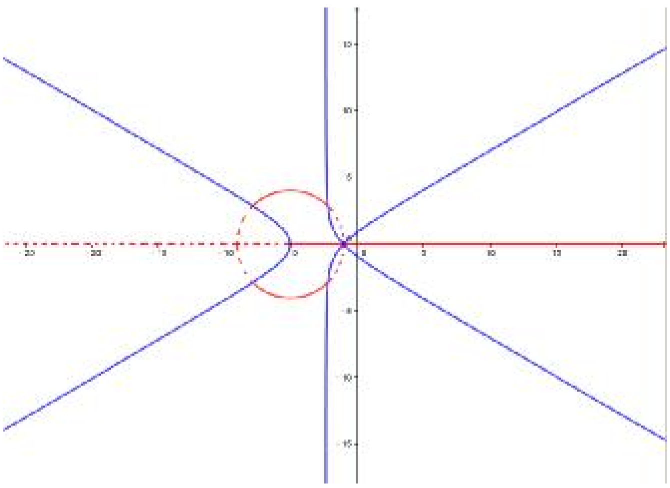
$f(x+iy)\in R$ 等於求 $\operatorname{Im} f(z)=0$

(1) $y=0 \Rightarrow (x^2+ax+b)(x+e)>0$

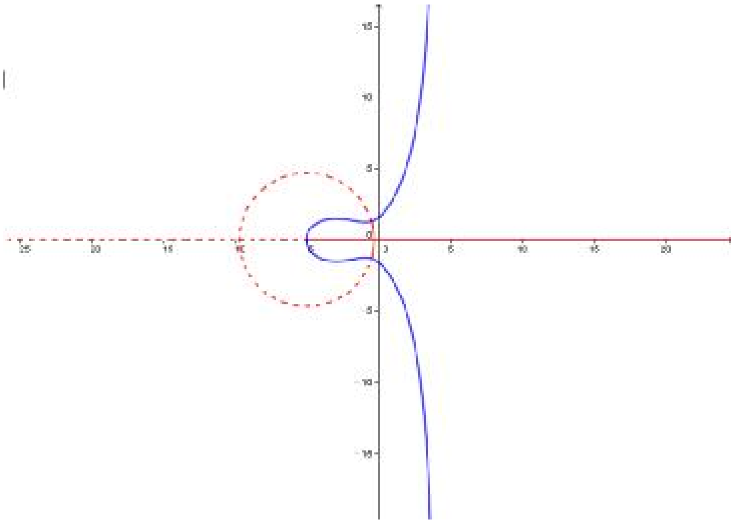
(2) $y\neq 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f(z)=0$ 在此條件下利用 $\operatorname{Re} f(z)>0$ 截出的範圍即為所求



D>0



D=0



D<0

## (五)型如 $\dfrac{z^2+ez+f}{z^2+az+b}$ 分式不等式複數解的討論

考慮分式 $f(z)=\dfrac{z^2+ez+f}{z^2+az+b}$ ，令 $z=x+yi$ 代入得

$$f(z)=f(x+yi)=\frac{(x+yi)^2+e(x+yi)+f}{(x+yi)^2+a(x+yi)+b}$$

展開整理後得

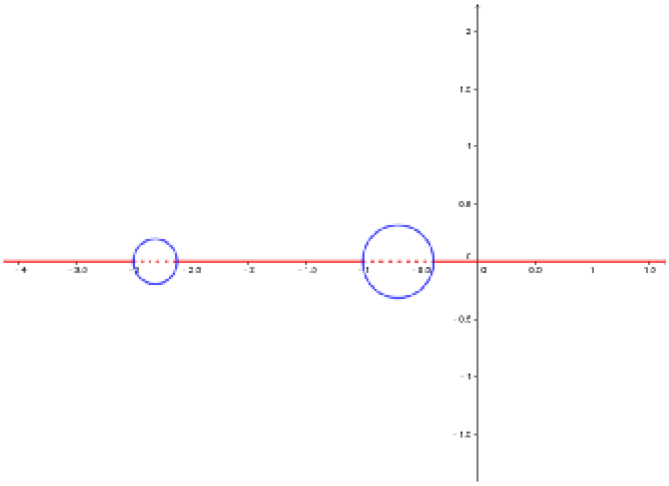
實部：$\operatorname{Re} f(z)=\dfrac{(x^2-y^2+ax+b)(x^2-y^2+ex+f)+(2xy+ey)(2xy+ay)}{(x^2-y^2+ax+b)^2+(2xy+ay)^2}$

虛部：$\operatorname{Im} f(z)=\dfrac{(x^2-y^2+ax+b)(2xy+ey)-(x^2-y^2+ex+f)(2xy+ay)}{(x^2-y^2+ax+b)^2+(2xy+ay)^2}$

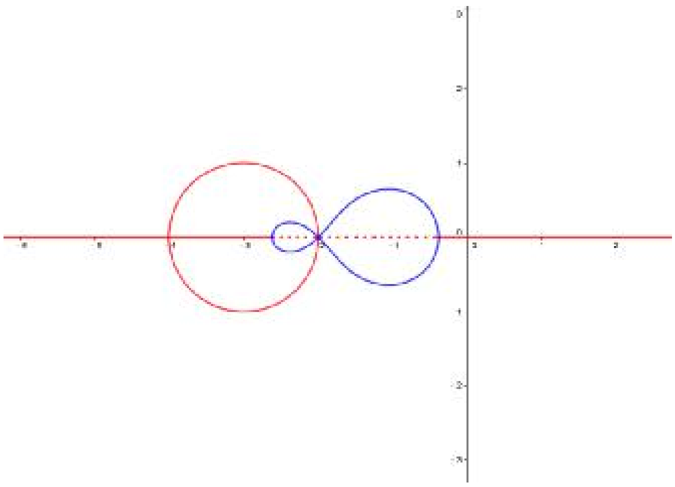
$f(x+iy)\in R$ 等於求 $\operatorname{Im} f(z)=0$

(1) $y=0 \Rightarrow (x^2+ax+b)(x^2+ex+f)>0$

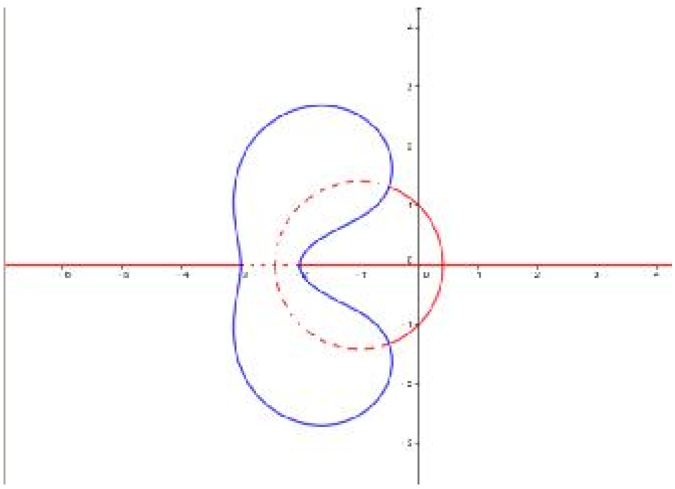
(2) $y\neq 0$ 且 $\operatorname{Im} f(z)=0$ 在此條件下利用 $\operatorname{Re} f(z)>0$ 截出的範圍即為所求



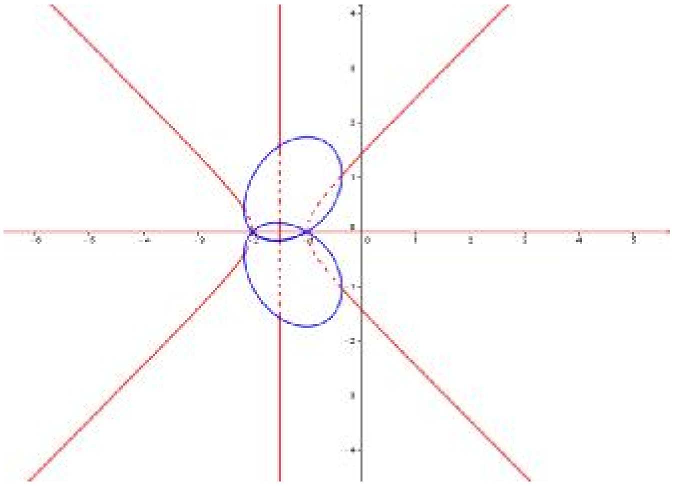
D>0,D>0



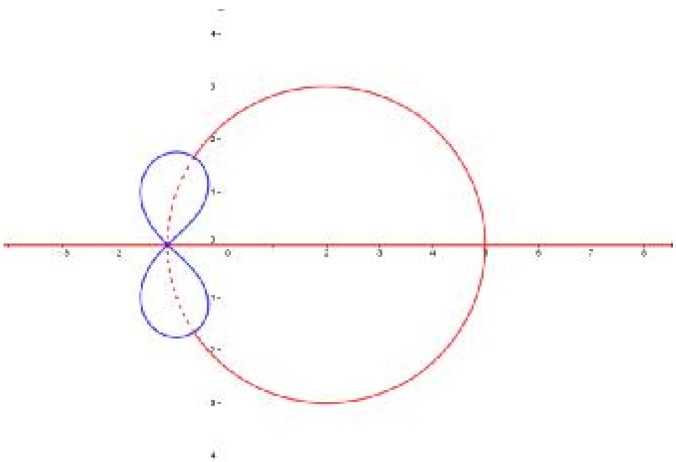
D>0,D=0



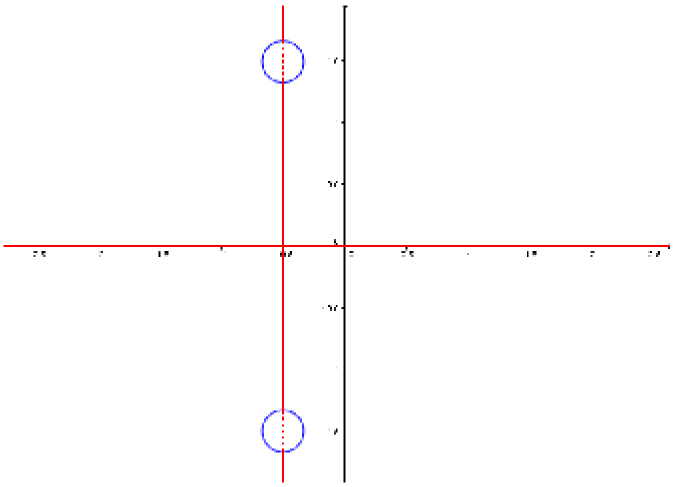
D>0,D<0



D=0,D=0



D=0,D<0



D<0,D<0

## (六)型如 $\dfrac{z+e}{z^3+az^2+bz+c}$ 分式不等式複數解的討論

考 慮 分 式 $f(z)=\dfrac{z+e}{z^3+az^2+bz+c}$ ， 先 利 用 變 數 代 換 得

$$f(z)=\frac{z+r}{z^3+pz+z}$$

其中 $p=-\dfrac{a^2}{3}+b \qquad q=\dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{ab}{3}+c \qquad r=-\dfrac{a}{3}+e$

令 $z=x+yi$ 代入得

$$f(z)=f(x+yi)=\frac{x+yi+r}{(x+yi)^3+p(x+yi)+q}$$

展開整理後得

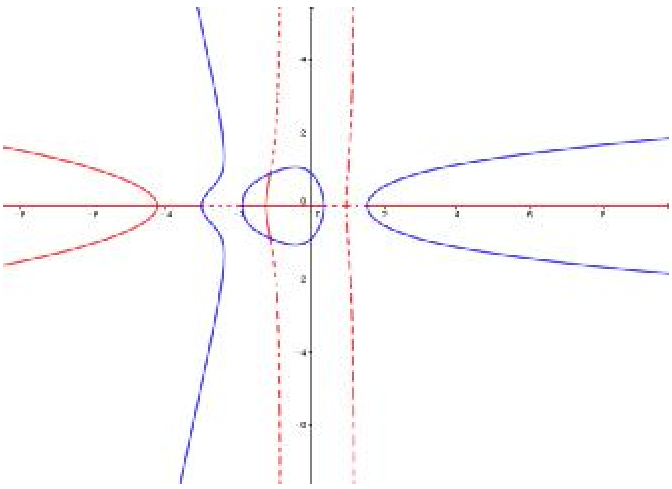
實部： $\operatorname{Re} f(z)=\dfrac{(x+r)(x^3-3xy^2+px+q)+(3x^2y-y^3+py)y}{(x^3-3xy^2+px+q)^2+(3x^2y-y^3+py)^2}$

虛部： $\operatorname{Im} f(z)=\dfrac{(x^3-3xy^2+px+q)y-(x+r)(3x^2y-y^3+py)}{(x^3-3xy^2+px+q)^2+(3x^2y-y^3+py)^2}$

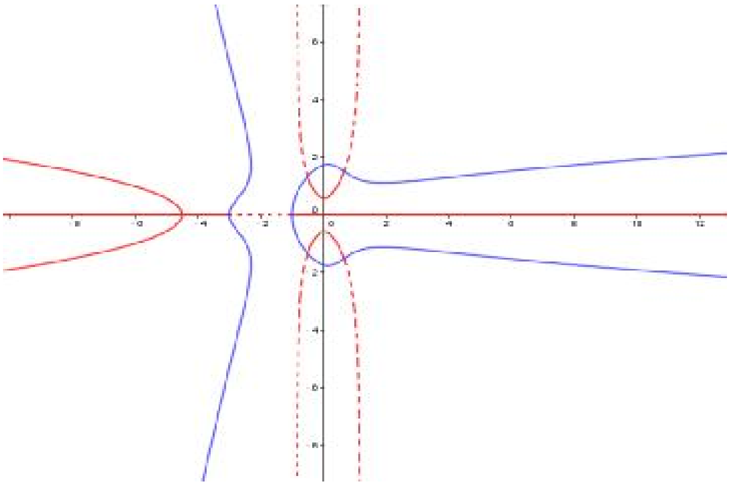
$f(x+iy)\in R$ 等於求 $\operatorname{Im} f(z)=0$

(1) $y=0 \Rightarrow (x+r)(x^3+px+q)>0$

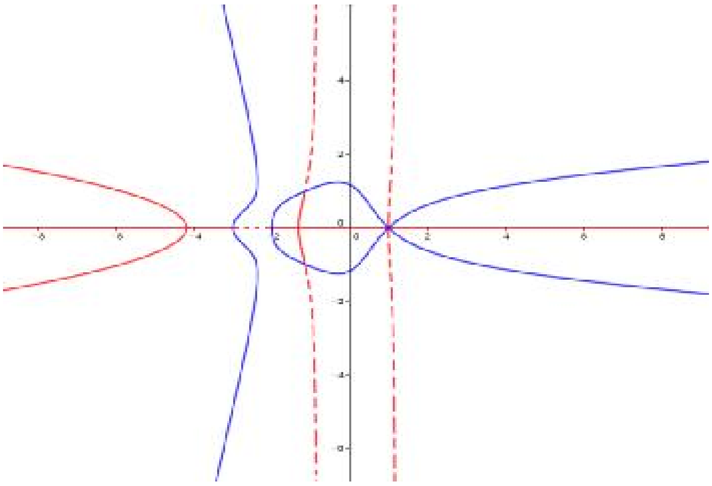
(2) $y\neq 0$ 且 $\operatorname{Im}f(z)=0$ 在此條件下利用 $\operatorname{Re}f(z)>0$ 截出的範圍即為所求



D>0



D=0



D<0

## (七)型如$\dfrac{z^2+ez+f}{z^3+az^2+bz+c}$分式不等式複數解的討論

考慮分式$f(z)=\dfrac{z^2+ez+f}{z^3+az^2+bz+c}$，先利用變數代換

得$f(z)=\dfrac{z^2+mz+n}{z^3+pz+q}$

其中$p=-\dfrac{a^2}{3}+b$　　$q=\dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{ab}{3}+c$　　$m=-\dfrac{2a}{3}+e$　　$n=\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{ae}{3}+f$

令$z=x+yi$代入得

$$f(z)=f(x+yi)=\frac{(x+yi)^2+m(x+yi)+n}{(x+yi)^3+p(x+yi)+q}$$

展開整理後得

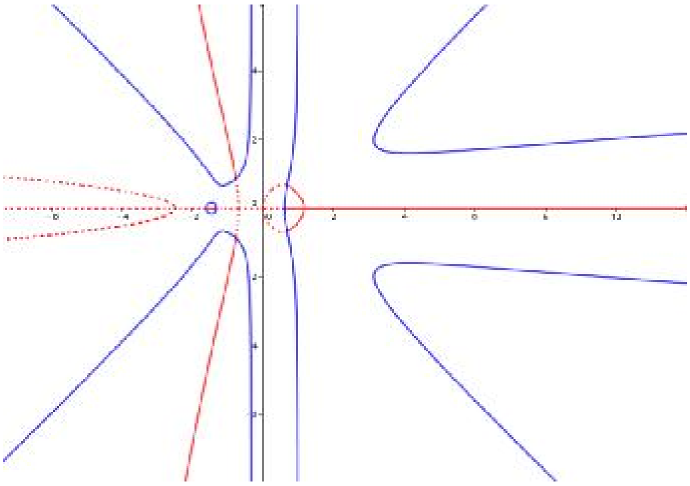
實部：$\operatorname{Re} f(z)=\dfrac{(x^2-y^2+mx+n)(x^3-3xy^2+px+q)+(3x^2y-y^3+py)(2xy+my)}{(x^3-3xy^2+px+q)^2+(3x^2y-y^3+py)^2}$

虛部：$\operatorname{Im} f\left(z\right)=\dfrac{(x^3-3xy^2+px+q)(2xy+my)-(x^2-y^2+mx+n)(3x^2y-y^3+py)}{(x^3-3xy^2+px+q)^2+(3x^2y-y^3+py)^2}$

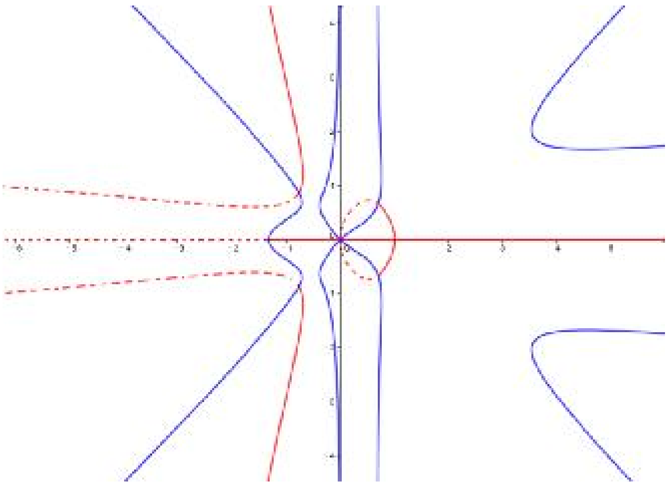
$f\left(x+iy\right)\in R$ 等於求 $\operatorname{Im} f\left(z\right)=0$

(1) $y=0 \Rightarrow (x^2+mx+n)(x^3+px+q)>0$

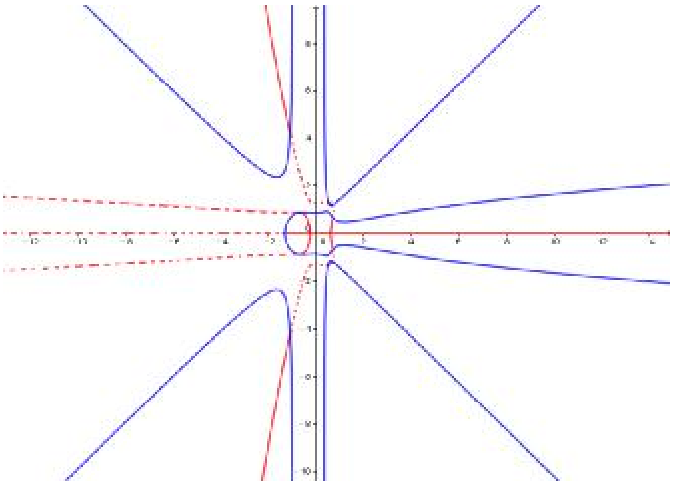
(2) $y\neq 0$ 且 $\operatorname{Im} f\left(z\right)=0$ 在此條件利用 $\operatorname{Re} f\left(z\right)>0$ 截出的範圍即為所求



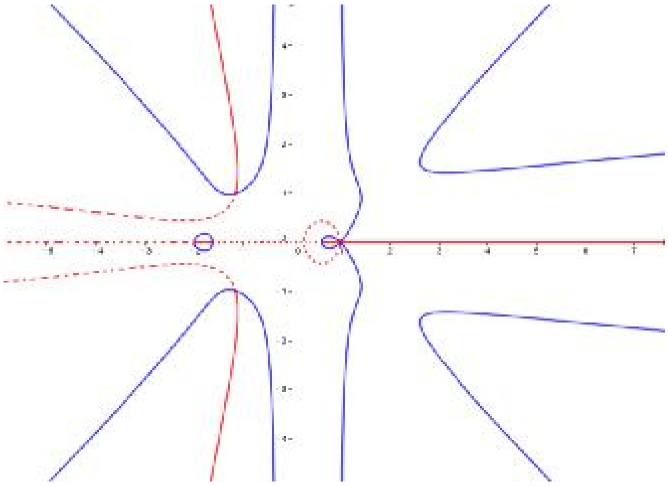
D>0,D>0



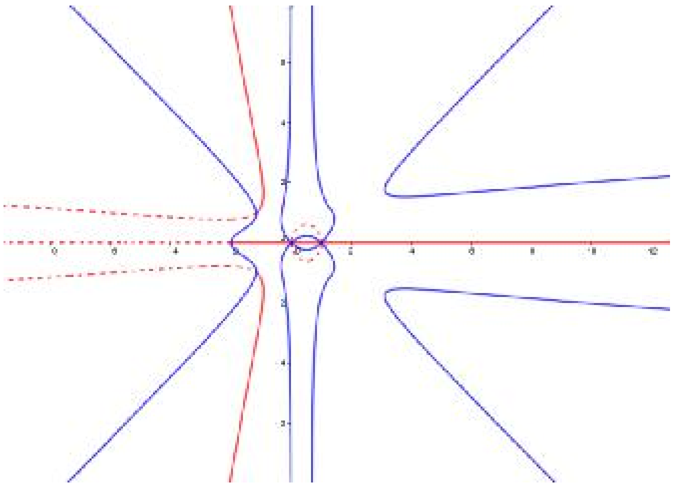
D>0,D=0



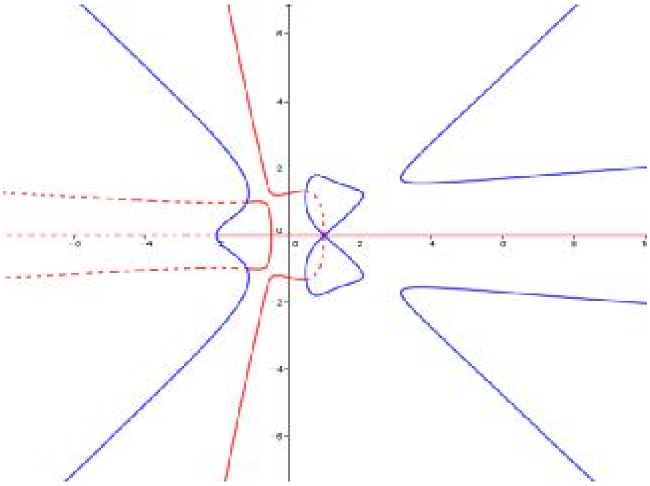
D>0,D<0



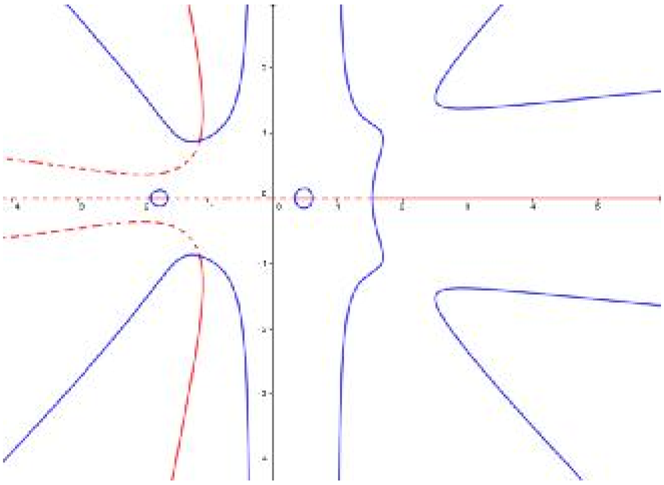
D=0,D>0



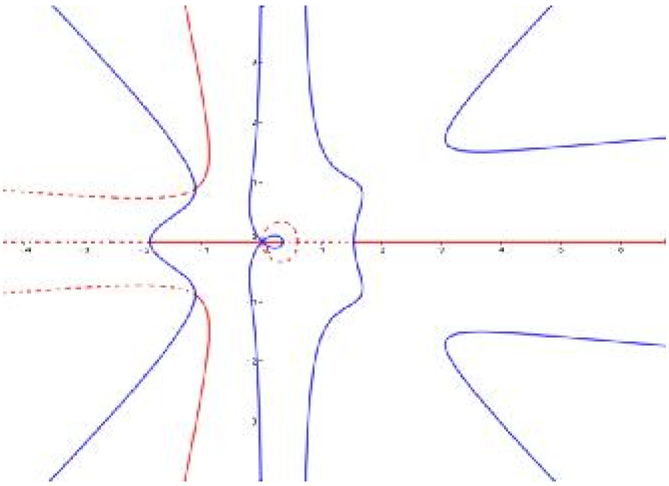
D=0,D=0



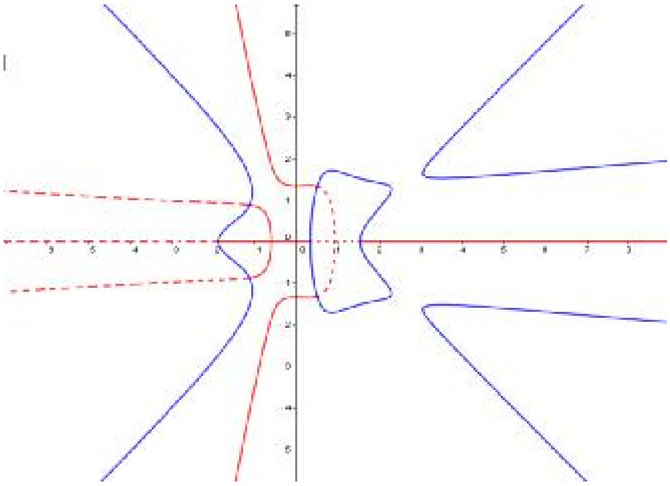
D=0,D<0



D<0,D>0



D<0,D=0



D<0,D<0

## (八)型如 $\dfrac{z^3+ez^2+fz+g}{z^3+az^2+bz+c}$ 分式不等式複數解的討論

考慮分式 $f(z)=\dfrac{z^3+ez^2+fz+g}{z^3+az^2+bz+c}$，先利用變數代換

得 $f(z)=\dfrac{z^3+mz+n}{z^3+pz^2+qz+r}$

其中 $m=-\dfrac{e^2}{3}+f \qquad n=\dfrac{2e^3}{27}-\dfrac{ef}{3}+g \qquad p=-\dfrac{e}{3}+a$

$q=\dfrac{e^2}{9}-\dfrac{ae}{3}+b \qquad r=-\dfrac{e^3}{27}+\dfrac{ae^2}{9}-\dfrac{be}{3}+c$

令 $z=x+yi$ 代入得

$$f(z)=f(x+yi)=\frac{(x+yi)^3+m(x+yi)+n}{(x+yi)^3+p(x+yi)^2+q(x+yi)+r}$$

展開整理後得

實部：

$$\operatorname{Re}f(z)=\frac{(x^3-3xy^2+mx+n)(x^3-3xy^2+px^2-py^2+px+q)+(3x^2y-y^3+my)(3x^2y-y^3+2pxy+py)}{(x^3-3xy^2+px^2-py^2+px+q)^2+(3x^2y-y^3+2pxy+py)^2}$$

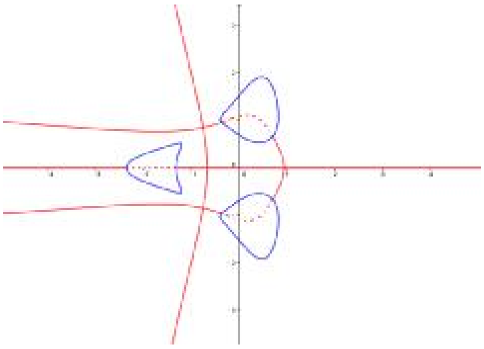
虛部：

$$\operatorname{Im}f(z)=\frac{(x^3-3xy^2+px^2-py^2+px+q)(3x^2y-y^3+my)-(x^3-3xy^2+mx+n)(3x^2y-y^3+2pxy+py)}{(x^3-3xy^2+px^2-py^2+px+q)^2+(3x^2y-y^3+2pxy+py)^2}$$

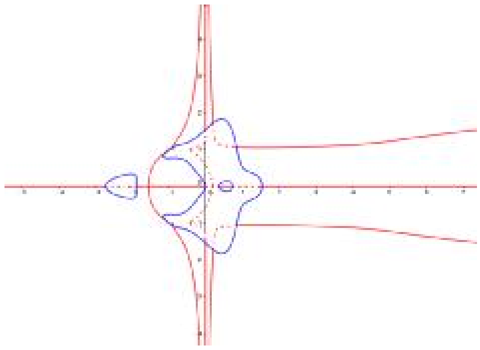
$f(x+iy)\in R$ 等於求 $\operatorname{Im}f(z)=0$

(1) $y=0\Rightarrow(x^3+mx+n)(x^3+px^2+px+q)>0$

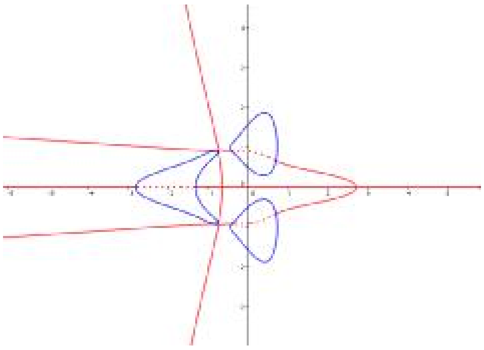
(2) $y\neq 0$ 且 $\operatorname{Im}f(z)=0$ 在此條件利用 $\operatorname{Re}f(z)>0$ 截出的範圍即為所求



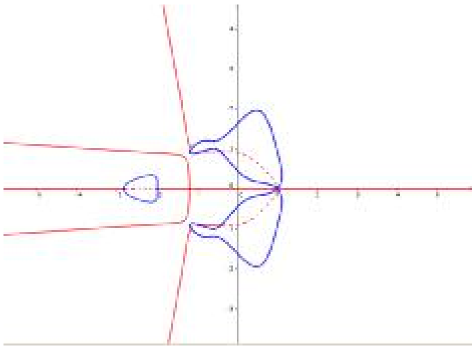
D>0,D>0



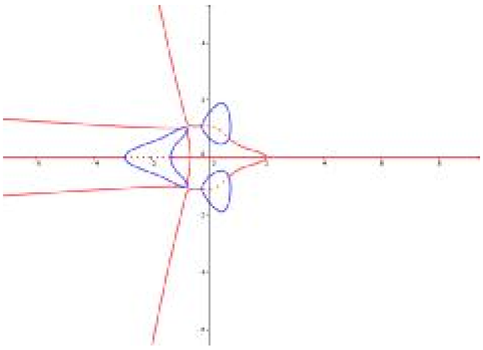
D<0,D<0



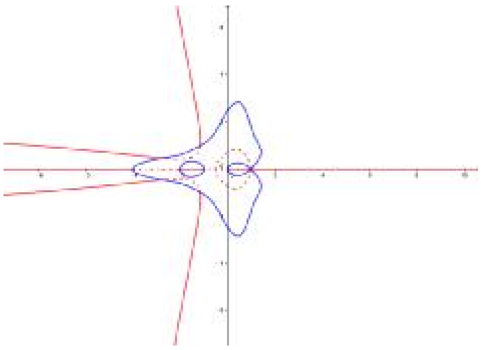
D>0,D<0



D=0,D<0



D>0,D=0



D=0,D=0

## (九)型如 $\dfrac{z+e}{z^4+az^3+bz^2+cz+d}$ 分式不等式複數解的討論

考慮分式 $f(z)=\dfrac{z+e}{z^4+az^3+bz^2+cz+d}$ ，

先利用變數代換得 $f(z)=\dfrac{z+s}{z^4+pz^2+qz+r}$

其中 $p=\dfrac{3a^2}{8}-\dfrac{3a}{4}+b$　　　$q=-\dfrac{a^3}{16}+\dfrac{3a^2}{16}-\dfrac{ab}{2}+c$

$r=\dfrac{-3a^4}{256}+\dfrac{a^2b}{16}-\dfrac{ac}{4}+d$　　$s=-\dfrac{a}{4}+e$

令 $z=x+yi$ 代入得

$$f(z)=f(x+yi)=\frac{(x+yi)+s}{(x+yi)^4+p(x+yi)^2+q(x+yi)+r}$$

展開整理後得

實部：

$$\operatorname{Re} f(z)=\frac{(x+s)(x^4-6x^2y^2+y^4+px^2-py^2+qx+r)+y(4x^3y-4xy^3+2xy+qy)}{(x^4-6x^2y^2+y^4+px^2-py^2+qx+r)^2+(4x^3y-4xy^3+2xy+qy)^2}$$

虛部：

$$\operatorname{Im} f(z)=\frac{y(x^4-6x^2y^2+y^4+px^2-py^2+qx+r)-(x+s)(4x^3y-4xy^3+2xy+qy)}{(x^4-6x^2y^2+y^4+px^2-py^2+qx+r)^2+(4x^3y-4xy^3+2xy+qy)^2}$$

$f(x+iy)\in R$ 等於求 $\operatorname{Im} f(z)=0$

(1) $y=0 \Rightarrow (x+s)(x^4+px^2+qx+r)>0$

(2) $y\neq 0$ 且 $\operatorname{Im} f(z)=0$ 在此條件利用 $\operatorname{Re} f(z)>0$ 截出的範圍即為所求

## (十)型如 $\dfrac{z^2+ez+f}{z^4+az^3+bz^2+cz+d}$ 分式不等式複數解的討論

考慮分式 $f(z)=\dfrac{z^2+ez+f}{z^4+az^3+bz^2+cz+d}$ ，先利用變數代換得

其中 $p=\dfrac{3a^2}{8}-\dfrac{3a}{4}+b$　　$q=-\dfrac{a^3}{16}+\dfrac{3a^2}{16}-\dfrac{ab}{2}+c$

$r=\dfrac{-3a^4}{256}+\dfrac{a^2b}{16}-\dfrac{ac}{4}+d$　　$m=-\dfrac{a}{2}+e$　　$n=\dfrac{a^2}{16}-\dfrac{ae}{4}+f$

令 $z=x+yi$ 代入得

$$f(z)=f(x+yi)=\frac{(x+yi)^2+m(x+yi)+n}{(x+yi)^4+p(x+yi)^2+q(x+yi)+r}$$

展開整理後得

實部：

$$\operatorname{Re} f\left(z\right)=\frac{(x^2-y^2+mx+n)(x^4-6x^2y^2+y^4+px^2-py^2+qx+r)+(2xy+my)(4x^3y-4xy^3+2xy+qy)}{(x^4-6x^2y^2+y^4+px^2-py^2+qx+r)^2+(4x^3y-4xy^3+2xy+qy)^2}$$

虛部：

$$\operatorname{Im} f\left(z\right)=\frac{(2xy+my)(x^4-6x^2y^2+y^4+px^2-py^2+qx+r)-(x^2-y^2+mx+n)(4x^3y-4xy^3+2xy+qy)}{(x^4-6x^2y^2+y^4+px^2-py^2+qx+r)^2+(4x^3y-4xy^3+2xy+qy)^2}$$

$f\left(x+iy\right)\in R$ 等於求 $\operatorname{Im} f\left(z\right)=0$

(1) $y=0\Rightarrow(x^2+mx+n)(x^4+px^2+qx+r)>0$

(2) $y\neq 0$ 且 $\operatorname{Im} f\left(z\right)=0$ 在此條件利用 $\operatorname{Re} f\left(z\right)>0$ 截出的範圍即為所求

## (十一)型如 $\dfrac{z^3+ez^2+fz+g}{z^4+az^3+bz^2+cz+d}$ 分式不等式複數解的討論

考慮分式 $f\left(z\right)=\dfrac{z^3+ez^2+fz+g}{z^4+az^3+bz^2+cz+d}$ ，

先利用變數代換得 $f\left(z\right)=\dfrac{z^3+mz^2+nz+s}{z^4+pz^2+qz+r}$

其中 $p=\dfrac{3a^2}{8}-\dfrac{3a}{4}+b$ $q=-\dfrac{a^3}{16}+\dfrac{3a^2}{16}-\dfrac{ab}{2}+c$ $r=\dfrac{-3a^4}{256}+\dfrac{a^2b}{16}-\dfrac{ac}{4}+d$

$m=-\dfrac{a}{4}+e$ $n=\dfrac{a^2}{16}-\dfrac{ae}{2}+f$ $s=-\dfrac{a^3}{64}+\dfrac{a^2e}{16}-\dfrac{af}{4}+g$

令 $z=x+yi$ 代入得

$$f\left(z\right)=f\left(x+yi\right)=\frac{\left(x+yi\right)^3+m\left(x+yi\right)^2+n\left(x+yi\right)+s}{\left(x+yi\right)^4+p\left(x+yi\right)^2+q\left(x+yi\right)+r}$$

展開整理後得

實部：

$$\operatorname{Re} f\left(z\right)=\frac{(x^3-3xy^2+mx^2-my^2+nx+s)(x^4-6x^2y^2+y^4+px^2-py^2+qx+r)+(3x^2y-y^3+2mxy+ny)(4x^3y-4xy^3+2pxy+q}{(x^4-6x^2y^2+y^4+px^2-py^2+qx+r)^2+(4x^3y-4xy^3+2pxy+qy)^2}$$

虛部：

$$\operatorname{Im} f\left(z\right)=\frac{(x^4-6x^2y^2+y^4+px^2-py^2+qx+r)(3x^2y-y^3+2mxy+ny)-(x^3-3xy^2+mx^2-my^2+nx+s)(4x^3y-4xy^3+2pxy+q}{(x^4-6x^2y^2+y^4+px^2-py^2+qx+r)^2+(4x^3y-4xy^3+2pxy+qy)^2}$$

$f\left(x+iy\right)\in R$ 等於求 $\operatorname{Im} f\left(z\right)=0$

(1) $y=0 \Rightarrow (x^3+mx^2+nx+s)(x^4+px^2+qx+r)>0$

(2) $y \neq 0$ 且 $\operatorname{Im} f(z)=0$ 在此條件利用 $\operatorname{Re} f(z)>0$ 截出的範圍即為所求

## (十二)型如 $\dfrac{z^4+ez^3+fz^2+gz+h}{z^4+az^3+bz^2+cz+d}$ 分式不等式複數解的討論

考慮分式 $f(z)=\dfrac{z^4+ez^3+fz^2+gz+h}{z^4+az^3+bz^2+cz+d}$ ，利用變數代換

得 $f(z)=\dfrac{z^4+mz^2+nz+t}{z^4+pz^3+qz^2+rz+s}$

其中 $\mathrm{m}=\dfrac{3e^2}{8}-\dfrac{3e}{4}+f \quad n=-\dfrac{e^3}{16}+\dfrac{3e^2}{16}-\dfrac{ef}{2}+g \quad t=\dfrac{-3e^4}{256}+\dfrac{e^2f}{16}-\dfrac{eg}{4}+h$

$p=-\dfrac{e}{4}+a \quad q=\dfrac{e^2}{16}-\dfrac{ae}{4}+b \quad r=-\dfrac{e^3}{64}+\dfrac{ae^2}{16}+\dfrac{be}{4}+c \quad s=\dfrac{e^4}{256}-\dfrac{ae^3}{64}+\dfrac{be^2}{16}-\dfrac{ce}{4}+d$

令 $z=x+yi$ 代入得

$$f(z)=f(x+yi)=\frac{(x+yi)^4+m(x+yi)^2+n(x+yi)+t}{(x+yi)^4+p(x+yi)^3+q(x+yi)^2+r(x+yi)+s}$$

展開整理後得

實部：

$$\operatorname{Re} f(z)=\frac{(x^4-6x^2y^2+y^4+mx^2-my^2+nx+t)(x^4-6x^2y^2+y^4+px^3-3pxy^2+qx^2-qy^2+rx+s)+(4x^3y-4xy^3+2xy+ny)(4x^3y-4xy^3+3px^2y-py^3+2qxy+}{(x^4-6x^2y^2+y^4+px^3-3pxy^2+qx^2-qy^2+rx+s)^2+(4x^3y-4xy^3+3px^2y-py^3+2qxy+ry)^2}$$

虛部：

$$\operatorname{Im} f(z)=\frac{(4x^3y-4xy^3+2xy+ny)(x^4-6x^2y^2+y^4+px^3-3pxy^2+qx^2-qy^2+rx+s)-(x^4-6x^2y^2+y^4+mx^2-my^2+nx+t)(4x^3y-4xy^3+3px^2y-py^3+2qxy}{(x^4-6x^2y^2+y^4+px^3-3pxy^2+qx^2-qy^2+rx+s)^2+(4x^3y-4xy^3+3px^2y-py^3+2qxy+ry)^2}$$

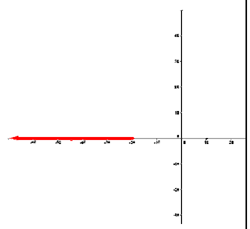
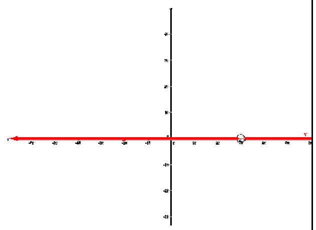
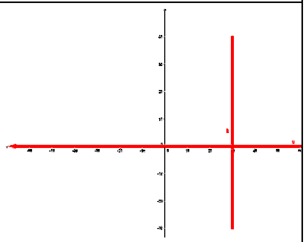
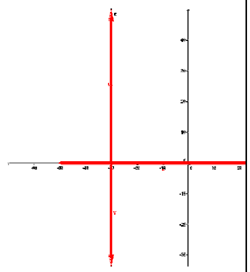
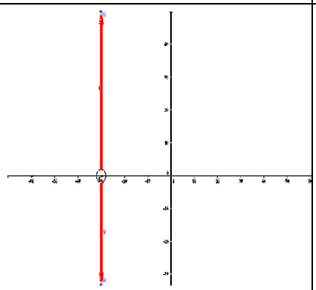
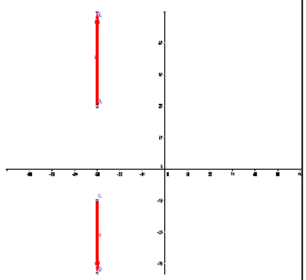
$f(x+iy)\in R$ 等於求 $\operatorname{Im} f(z)=0$

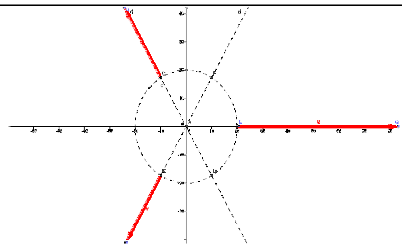
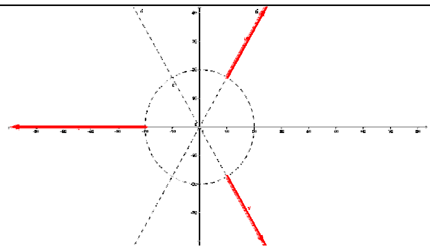
(1) $y=0 \Rightarrow (x^4+mx^2+nx+t)(x^4+px^3+qx^2+rx+s)>0$

(2) $y \neq 0$ 且 $\operatorname{Im} f(z)=0$ 在此條件利用 $\operatorname{Re} f(z)>0$ 截出的範圍即為所求

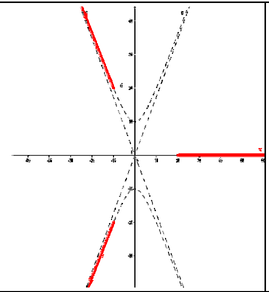
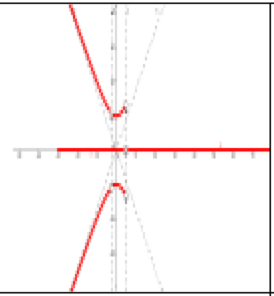
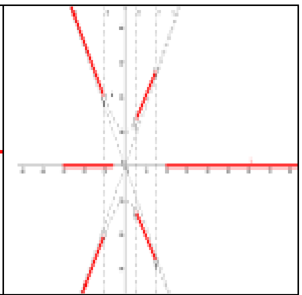
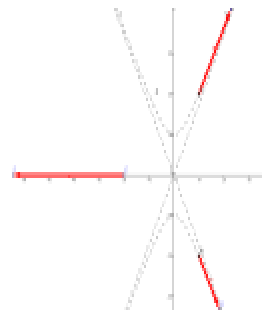
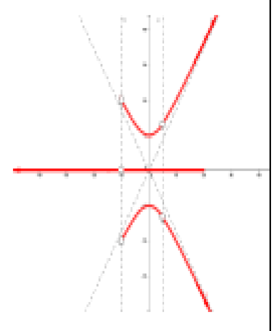
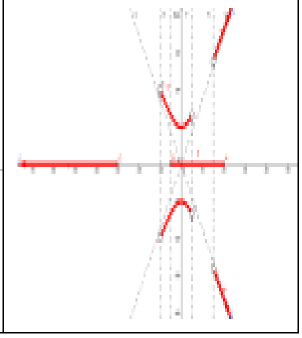
# 伍、結論

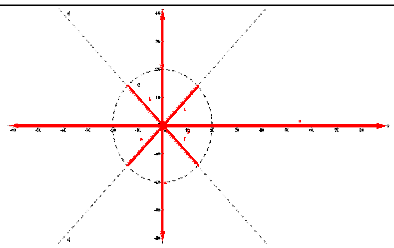
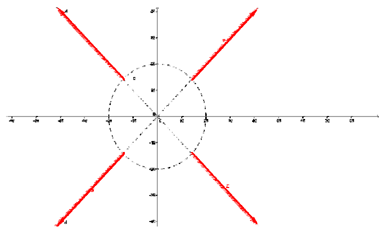
## 實系數多項式不等式結論:

| 實係數二次不等式複數解 | | | |
|---|---|---|---|
| $D=p^2-4r$ | $D>0$ | $D=0$ | $D<0$ |
| $f(z)=z^2+pz+r>0$ |  |  |  |
| $f(z)=z^2+pz+r<0$ |  |  |  |

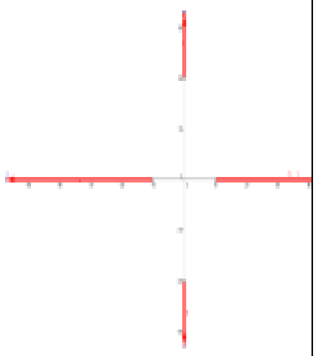
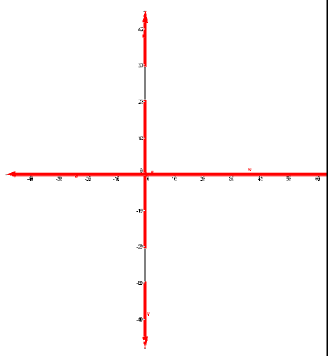
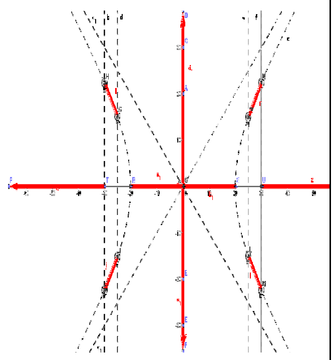
| 特殊型實係數三次不等式複數解 | |
|---|---|
| $f(z)=z^3+q>0$ |  |
| $f(z)=z^3+q<0$ |  |

| 一般型實係數三次不等式複數解 | | | |
|---|---|---|---|
| $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ | $D>0$ | $D=0$ | $D<0$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(z)=z^3+pz+q>0$ |  |  |  |
| $f(z)=z^3+pz+q>0$ |  |  |  |

| 特殊型實係數四次不等式複數解 | |
|---|---|
| $f(z)=z^4+q>0$ |  |
| $f(z)=z^4+q<0$ |  |

| 一般型實係數四次不等式複數解 | | | |
|---|---|---|---|
| $D=p^2-4r\geq 0$ | $r\leq 0$ | $r>0$ | |
| $f(z)=z^4+pz^2+r>0$ | $\lvert p\rvert\leq\sqrt{D}$ | $p>\sqrt{D}$ | $p<-\sqrt{D}$且$p\leq -2\sqrt{r}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| |  |  |  |

附註：若$D = p^2 - 4r \geq 0$且$r \leq 0$則$|p| \leq \sqrt{D}$，若$D = p^2 - 4r \geq 0$且$r > 0$則$|p| > \sqrt{D}$

**注意到(1)上面所討論的一般型式都是指變數平移過後所得新函數不等式解的圖形，一般而言原函數不等式只須把新函數不等式解的圖形平移回去即可得到。**

**(2)一般型四次不等式中若$D = p^2 - 4r < 0$且$r \leq 0$或是$D = p^2 - 4r < 0$且$r > 0$另外二種**
**情況不等式解圖形可類似畫出。**

## 分式多項式不等式複數解結論:

使用繪圖方式可求得任何分式不等式之複數解，且所有圖皆對稱於$X$軸，可視為有共軛根。

解完求得的實部、虛部過於複雜，無法直接判斷分類，先行使用判別式正負分別繪圖，觀察出許多圖形雷同，發現判別式並非影響圖形的主要原因，將再進而尋找影響圖形的原因。

型如$\dfrac{z+e}{z+a}$分式不等式均為實數解。

型如$\dfrac{z+e}{z^2+az+b}$分式不等式在判別式大於 0 及小於 0 時圖形類似，而判別式等於 0 時出現我們無法解釋之圖形，另外三者$\operatorname{Im} f(z) = 0$皆為$X$軸與一直徑在$X$軸上之圓。

型如$\dfrac{z^2+ez+f}{z^2+az+b}$分式不等式在兩判別式皆大於 0 時$\operatorname{Im} f(z) = 0$只有$X$軸，且$\operatorname{Re} f(z) = 0$為兩個直徑過$X$軸之圓。在兩判別式大於 0 等於 0、大於 0 小於 0、等於 0 小於 0 時，虛部=0 為$X$軸及一直徑過 X 軸圓，$\operatorname{Re} f(z) = 0$在前者為左右

分別的封閉圖形，在其餘兩者則為上下分別的封閉圖形。兩者判別式皆等於 0 時圖形我們無法解釋。兩者判別式皆小於 0 時，$\operatorname{Im} f(z)=0$ 為 $X$ 軸與一鉛直線，$\operatorname{Re} f(z)=0$ 則為直徑過鉛直線的兩圓。

型如 $\dfrac{z+e}{z^3+az^2+bz+c}$ 分式不等式雖無法解釋圖形組成，但可看出在判別式大於 0、等於 0、小於 0 圖型雷同，認為判別式並非決定此類分式不等式複數解圖形的原因。

型如 $\dfrac{z^2+ez+f}{z^3+az^2+bz+c}$ 分式不等式也無法解釋圖形組成，但也認為判別式並非決定此類分式不等式複數解圖形的原因。

型如 $\dfrac{z^3+ez^2+fz+g}{z^3+az^2+bz+c}$ 分式不等式複數解無法解釋圖形組成，除兩多項式判別式皆小於 0 外，圖形皆有雷同。

# 陸、未來展望

高次多項式因為無公式解而沒辦法繼續求解，高次多項式分式雖可繪出圖形，但因過於複雜而無法解釋，希望能夠研究出圖形所含意義並解釋，然後繼續往高次進行。

# 柒、參考資料

一、左鈺如、季素月、朱家生、陳鼎(民 87)。初等代數研究。臺北市：九章
二、普通高級中學教科用書：數學 1。南一書局