2013年臺灣國際科學展覽會

研究報告

標　　號：010042-16

作　　者：吳邦誠、陳柏叡

作品名稱：電梯搭載最短路徑問題

學　　校：高雄市立高雄高級中學

指導老師：黃仁杰

關 鍵 詞：電梯、最短路徑、排列群

作者簡介

我是**吳邦誠**，目前就讀**高雄中學科學班**一年級。

我愛好下棋、運動，但我更忘我於數學的美妙世界中。對我而言，研究各式各樣的數學難題是生活中莫大的享受，那種腦力激盪後成功解出題目的愉悅讓人無法抗拒。平日不只購買書籍研讀，尚有參與各類數學活動，以增加自己的見識，並認識更多數學同好。
這次有機會參加國際科展，一路來的研究歷程我學到不少，收穫良多！

我是**陳柏叡**，目前就讀於**高雄中學科學班**一年級，我的興趣是打球和數學研究。

從國中起，我便對數學有著濃厚的興趣；在高中參加科展後，更是堅定我對數學的狂熱——享受發現問題，進而解決問題的快樂。我曾參加過許多數學競賽和營隊等，並且結交到許多愛好數學的朋友，更讓我的能力得以提升。

摘要

我們研究問題是：當一棟大樓只有一部電梯，且每一層樓都有一個人，那個人要去其他樓層，那麼應該如何去規劃電梯搭載的路徑，使得電梯走的樓層數最少。首先我們討論的是一對一且映成的情形，而在試過許多例子之後我們定義了一個新名詞「環」(循環節)來解決問題，而這讓我們的問題簡單許多。在作完第一個問題之後，我們又想：如果每層樓的人要去的樓層不完全是全部的樓層，那麼問題就變的比較複雜，而我們又定義一個新的名詞：「線」，但在討論時又發現有許多的例外，於是我們又找出了幾個規則來使我們的結論是正確的。

ABSTRACT

We started from the problem: There is an elevator in the building and one person at each floor, and they want to go to the other floor. Our research discussed about how to plan the shortest routes of elevator and carry those people to the correct floor. In question one, there was a condition that every person wants to go to different floor, and we gave a concept "cycle" to analyze all the situations, by means of merging the "cycle", we could simplify the problem. There was not the condition we mentioned above in question two, and we also gave the concepts "string" and its separation and merger to discuss all the situations. Question three and four are more general than question two, and we use the conclusion of question two to discuss them. Finally, we gave the minimum distance and the routes of the elevator in question one to four.

目錄

壹、 研究動機

有一天，在排隊等電梯時，我們突然想到：如果一棟大樓裡面，每層樓都有人，且他們都想要搭電梯前往其他樓層，可是現在唯一的一台電梯一次只能搭載一個人。那麼要怎麼樣才能把大家各自送到想去的樓層？如果他們想去的樓層都不一樣？如果有可能有超過一個人想去同一層樓呢？我們想要從中找出最節能(也就是路徑最短)的電梯搭載方法，於是我們開始了我們的研究。

貳、研究目的

本次研究主要討論當一部電梯只能搭載一人，大樓每層樓層可能分別有人欲前往，若想將所有人搭載到指定樓層，如何讓電梯搭載的路徑長最短，我們主要以下四個問題做研究討論：

問題一、若有n個人分別在$1\sim n$層樓，而他們現在均想離開所在樓層，其中沒有任何兩個人是要到同一層樓的，假若只有一部電梯，其最大容量為1人，且一開始位於1樓，試求電梯搭載所需之最短路徑長？

問題二、若有n個人分別在$1\sim n$層樓，而他們現在均想離開所在樓層，再者，只有一部電梯，其最大容量為1人，且一開始位於1樓，試求電梯搭載所需之最短路徑長？

問題三、若有t個人在$1\sim n$ (其中$t<n$) 層樓，且同一層樓不會有兩個人，而他們現在均想離開所在樓層，且只有一部電梯，其最大容量為1人，且一開始位於1樓，試求電梯搭載所需之最短路徑長？

問題四、若有t個人分別在$1\sim n$樓，且允許有同一層樓會有兩個或兩個以上的人，而他們現在均想離開所在樓層，且只有一部電梯，其最大容量為1人，且一開始位於1樓，試求電梯搭載所需之最短路徑長？

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦、MathType5、Microsoft Office Word

肆、名詞與定義

一、名詞解釋

(一).對應符號：

若 $f:\{1,2,3,...,n\}\to\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ 代表第 $_k$ 層樓的人想到第 a_k 層樓。

(二).電梯移動表示法：

$[b_1(c_1),b_2(c_2),b_3(c_3),b_4(c_4)...]$ 代表說電梯從 b_1 開始，接著往 b_2，再往 b_3，再到 b_4 ...依此類推，並且 (c_i) 表示電梯在 b_i 到 b_{i+1} 之間所載的人欲往的樓層，當然 c_i 可以是空集合，亦即不載人。

(三).環(cycle)：

令 f 滿足 $f(i)=a_i$ 並記 $f^n(i)=f(f^{n-1}(i))$ ，$f^1(i)=f(i)$ 而現在找到最小的正整數 n 使得

$f^n(i)=i$ ，那麼定義環(cycle)的集合 $\{i,f(i),f^2(i)...f^{n-1}(i)\}$ 並記作：環 $=(a,b)$ 代表環的區

間其中 a 是最小元素，b 是最大元素。

(四).全環(best cycle)：

若討論情形中存在一個環 $\{i,f(i),f^2(i)...f^{k-1}(i)\}$，並且滿足 1 到 n 都在此集合內(即這個環涵蓋了所有的樓層)，那麼我們就稱這個環為全環。

(五).環循環：

若 $\{i,f(i),f^2(i)...f^{n-1}(i)\}$ 是一個環，那麼 $\{f(i),f^2(i)...f^{n-1}(i),i\}$ 也會是一個環，也就是不管從哪一個元素開始，往後的 n 個數的集合都會是一個環，也就是
$\{f^k(i),f^{k+1}(i),...f^{k-3}(i),f^{k-2}(i),f^{k-1}(i)\}$ 是一個環，其中 $1\le k\le n-1$。

(六).環合併：

當兩個環的區間有交集時，我們可以把這兩個環等價於一個更大的環，而這個環的區間是原來兩個環的聯集。

(七).修正量：

下界與實際上我們所需的最小值的差值。

(八).線(string)：

令 f 滿足 $f(i)=a_i$ 並且正整數 n (這裡的 n 是滿足 $i,f(i),f^2(i),...,f^{n-1}(i)$ 均相異的最大正整數)，並且不滿足 $f^{n-1}(i)=f(i)$ ，但存在正整數 k 使得 $f^{n-1}(i)=f^k(i)$ ，於是

$\{f^{k+1}(i), f^{k+2}(i)\dots f^{n-1}(i)\}$ 是一個環，於是我們定義線(string)的集合為：

$\{i, f(i), f^2(i)\dots f^{n\text{-}1}(i)\} \setminus \{f^{k+1}(i), f^{k+2}(i)\dots f^{n\text{-}1}(i)\} = \{i, f(i), f^2(i)\dots f^k(i)\}$，

並記作：線 $=(a,b)$，其中 a 是線的起點，b 是線的終點。

(九).線的分割：

在我們上面定義的線，一條線內可能有時候的方向是向上，有時候的方向是向下，於是以向上和向下的分界點將這條線分開，變成一條向上和一條向下的線，以方便後面我們的討論。

(十).最大最小值表示法：

我們以 $\mathbf{max}(a,b)$ 表示 a,b 中較大的數，與 $\mathbf{min}(a,b)$ 表示 a,b 中較小的數。而若一非空集合 A，以 $\mathbf{max}(A)$ 表示 A 集合中最大的數，並以 $\mathbf{max}^2(A)$ 表示 A 集合中第二的數，即 $\mathbf{max}(A-\{\mathbf{max}(A)\})$，更一般的，以 $\mathbf{max}^k(A)$ 代表 A 集合中第 k 大的元素，而最小元素與第 k 小的元素則以 $\mathbf{min}(A)$ 和 $\mathbf{min}^k(A)$ 表示。

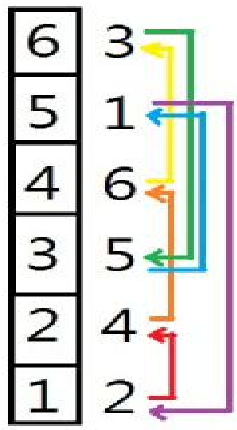
伍、研究方法與過程

問題一的研究過程與結果：

首先我們就問題一做簡單的歸納討論，討論如下：假若大樓有六層樓，我們假定嘗試：$f:\{1,2,3,4,5,6\}\to\{2,4,5,6,1,3\}$，如圖一所示，取電梯路徑為$[1(2),2(4),4(6),6(3),3(5),5(1),1]$，即將1樓的人送至2樓，將2樓的人送至4樓，將4樓的人送至6樓，將6樓的人送至3樓，將3樓的人送至5樓，將5樓的人送至1樓，故所求電梯路徑長度為

$\sum_{i=1}^{n}|a_i-i|=|2-1|+|4-2|+|5-3|+|6-4|+|1-5|+|3-6|=14$ 層。

所以我們猜測所需之步數為所有對應差值之和。



圖(一)

定理一：若大樓有 n 層樓，每層樓有一個人將前往指定的樓層，且電梯路徑所走總路徑長為 l 層，則 $l\geq\sum_{i=1}^{n}|a_i-i|$。

證明：首先先證明 $\sum_{i=1}^{n}|a_i-i|$ 為電梯路徑所走總路徑長之下界，

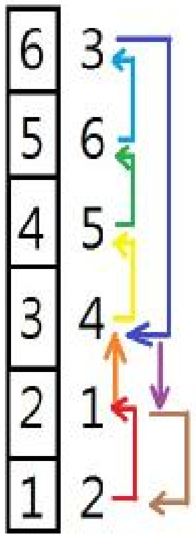
由於電梯每次只能搭載一人到指定樓層

所以上述之"差值"至多減少1，又因為最終情況是 $a_i^{'}=i$

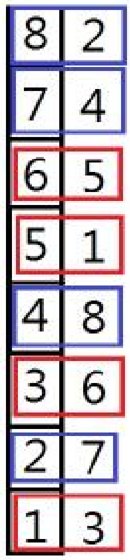
即 $\sum_{i=1}^{n}|a_i^{'}-i|=0$，從而電梯搭載總路徑長 $l\geq\sum_{i=1}^{n}|a_i-i|$。

接者我們嘗試樓層對應為 $f:\{1,2,3,4,5,6\} \to \{2,1,4,5,6,3\}$，取電梯路徑為 $[1(2),2,3(4),4(5),5(6),6(3),3,2(1),1]$，如圖二所示，即將1樓的人送至2樓，電梯不載人至3樓，再將3樓的人送至4樓，4樓的人送至5樓，再將5樓的人送至6樓，6樓的人送至3樓，電梯不載人至2樓，最後2樓的人送至1樓，故所求電梯搭載路徑長度為10層，但此時

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i - i| = |2-1|+|1-2|+|4-3|+|5-4|+|6-5|+|3-6| = 8 < 10$$



圖(二)



圖(三)

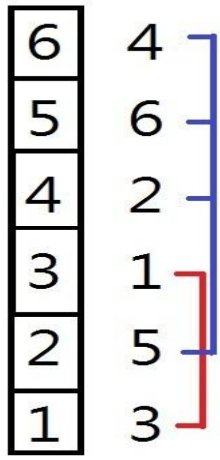
我們將在後面定理說明此走法中電梯搭載路徑長度為10層為最小值，而非 $\sum_{i=1}^{n}|a_i - i|$。主要原因是因為電梯不載人所走的距離有關，並且發現，$\{1,2\}$ 和 $\{3,4,5,6\}$ 可以說是獨立的，於是我們想到利用「環」概念來解決並加上修正量來解決問題。

下面舉一個環的例子：如圖三所示，在此例中，$\{1,3,6,5\}$ 和 $\{2,7,4,8\}$ 各為一個環。環的比較容易理解的定義是：能夠不斷的對應直到回到原點(像這裡就是 $1 \to 3$、$3 \to 6$、$6 \to 5$、$5 \to 1$)，就說這四個樓層構成了一個「環」，而 $\{2,7,4,8\}$ 也一樣。

假若我們再嘗試樓層對應為 $f:\{1,2,3,4,5,6\}\to\{3,5,1,2,6,4\}$ (如圖四)，此圖可見兩個環，為 $\{1,3\}$、$\{2,5,6,4\}$，且兩個環有交集，在這裡的交集指兩個環的範圍有重合，即區間 $[1,3]$ 與 $[2,6]$ 有交集。

此時我們可以用以下的方法達成最小次數12次：

[1(3),2(5),5(6),6(4),4(2),2(3),3(1),1]，即將1樓的人(欲前往3樓)送至2樓，再將2樓的人送至5樓，5樓的人送至6樓，將6樓的人送至4樓，再將4樓的人送至2樓，再將2樓的人(欲前往3樓)送至3樓，最後3樓的人送至1樓，故所求電梯搭載路徑長度為12層。由此可知，我們可以在完成 $\{1,3\}$ 這個環的同時，在經過2樓的時候，也同時完成 $\{2,5,6,4\}$ 這個環，這樣就可以達到最小次數(即空走次數＝0)，於是我們稱這兩個環可以「合併」。意即走兩個環{a,b}{c,d}等價於走一個環{min(a,c),max(b,d)}。



圖(四)

以下我們將利用兩個定理說明環的合併：

定理二：每個元素都會在一個環當中。

證明：

利用反證法，假設$\exists k \notin$任何一個環

而我們必定能找到一個b_1使得$f(b_1)=k$，同理可以找到$f(b_2)=b_1$、…、$f(b_n)=b_{n-1}$

但是$b_i \neq k \quad \forall i \in \{1,2,...,n\}$

否則可得到k屬於其中一個環

此時由$k,b_1,b_2...b_n \in \{1,2,3...n\}$

$\Rightarrow \exists 1 \le i < j \le n$ 使得 $b_i = b_j$

$\Rightarrow f(b_i) = b_{i-1} = b_{j-1} = f(b_j)...$

$\Rightarrow b_{i-2} = b_{j-2}$、$b_{i-3} = b_{j-3}$、…、$b_1 = b_{1-i+j}$、k=b$_{j-i}$

$\Rightarrow \{k, b_i, b_2 ... b_{j-i-1}\}$為環，矛盾

從而每個元素都應該要屬於任意一個環。

定理三：(環的合併性)：對於兩個已存在的環，分別為$\{x_1,x_2,...,x_p\}=(m_1,n_1)$，$\{y_1,y_2,...,y_p\}=(m_2,n_2)$，$[m_1,n_1]\cap[m_2,n_2]\neq\varnothing$**，則必定存在一種方法能夠同時完成此兩個環，並且達到最小次數。**

證明：

不妨設$m_1 < m_2$。必存在k使得$m_2 \in [x_k, x_{k+1}]$（若不存在，則第一個環的區間勢必沒辦法達到n_1），其中$k \in \{1,2,...,p\}$。我們現有的走完第一個環的方法為：

$[x_1(x_2), x_2(x_3), ..., x_k(x_{k+1}), x_{k+1}(x_{k+2}), ..., x_p(x_1), x_1]$，

而我們令$m_2 = y_{m_2} = f^{m_2}(y_1)$，並由環的循環性可知$\{y_{m_2}, y_{m_2+1}, ..., y_{m_2-1}\}$亦為一環，

則由以下方法可達成最小次數：(其中紅色標示處為第二個環)

$[x_1(x_2), x_2(x_3), ..., x_k(x_{k+1}), y_{m_2}(y_{m_2+1}), ..., y_{m_2-1}\ (y_{m_2}), y_{m_2}(x_{k+1}), x_{k+1}(x_{k+2}), ..., x_p(x_1), x_1]$

且顯見每次電梯的移動均有載人(無空走次數)，故其為最短路徑。

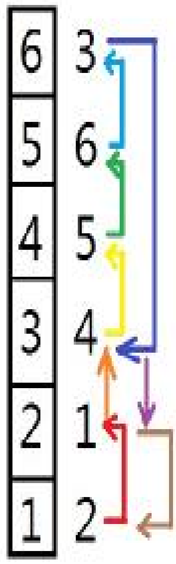
定理四：合併到最後的所有環必為緊鄰的。

證明：

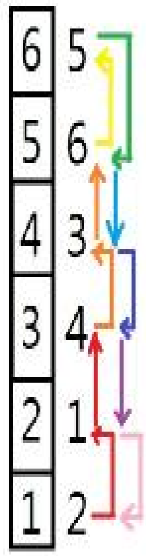
設合併完後有 m 個環 $(a_1,b_1),(a_2,b_2)...(a_m,b_m)$，其中 $a_1<a_2<...<a_m$，則可知 $b_i<a_{i+1}(i=1\sim m-1)$
(若不然，則還可以繼續合併)，假設存在一個 k 使得 $a_k=b_{k-1}+x$ (其中 $x-1\in N$)
那麼環 (a_{k-1},b_{k-1}) 和 (a_k,b_k) 之間尚有 $x-1$ 個元素，由定理二知這 $x-1$ 個元素均會屬於一個環
但這個環不屬於前面所提及的 m 個環，但這與已經合併後有 m 個環矛盾
$\Rightarrow x=1$，即每個環都是緊鄰的。

接者我們嘗試： $f:\{1,2,3,4,5,6\}\to\{2,1,4,5,6,3\}$ (如圖五)，取[1(2),2,3(4),4(5),5(6),6(3),3,2(1),1]

1.將1樓的人送至2樓
2.電梯不載人至3樓
3.將3樓的人送至4樓
4.將4樓的人送至5樓
5.將5樓的人送至6樓
6.將6樓的人送至3樓
7.電梯不載人至2樓
8.將2樓的人送至1樓
達到最小值 $8+2=10$ 。



圖(五)



圖(六)

我們猜測：若存在一個環，那麼下界應修正。

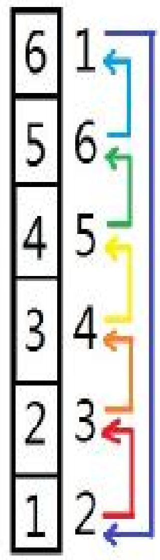
再嘗試： $f:\{1,2,3,4,5,6\}\to\{2,1,4,3,6,5\}$ ，
取[1(2),2,3(4),4,5(6),6(5),5,4(3),3,2(1),1] (如圖六)

1.將1樓的人送至2樓
2.電梯不載人至3樓
3.將3樓的人送至4樓
4.電梯不載人至5樓
5.將5樓的人送至6樓
6.將6樓的人送至5樓
7.電梯不載人至4樓
8.將4樓的人送至3樓
9.電梯不載人至2樓
10.將2樓的人送至1樓，得出最小值為 $6+4=10$ 。

猜測：當存在 n 個環，那麼修正量為 $2(n-1)$ (其中 n 為環的個數)

再嘗試：$\{1,2,3,4,5,6\}\to\{2,3,4,5,6,1\}$ (如圖七)
取[1(2),2(3),3(4),4(5),5(6),6(1),1]

1.將1樓的人送至2樓
2.將2樓的人送至3樓
3.將3樓的人送至4樓
4.將4樓的人送至5樓
5.將5樓的人送至6樓
6.將6樓的人送至1樓，即達到最小值10。



圖(七)

定理五：若緊鄰的n個環合併時，則所需要的修正量為$2(n-1)$。

證明：

我們先將所有環合併完(由定理二)，並知每個環為緊鄰的(由定理四)

當$n=2$時，因為一個環和一個環之間間隔為1，所以修正量≥ 1，而以下證明修正量為1是不可能的： 利用反證法，假設1是可以成立的，那麼表示走完第一個環緊接著走第二個環，但是由於起始時電梯是位於一樓的，也就代表上述是不可能的，從而修正量≥ 2。

構造出一個方法，具體作法如下：

當走到合併環的最大元素時，便先空走到第二個環(此時多1)，然後把這個環完成，這時會回到此環的最底端(因為環的定義)，只要回到第一個環(此時再加1)把第一個環繼續完成即可。

綜合以上討論，我們有兩個環所需之修正量為2。

最後用數學歸納法：

由上當$n=2$時，修正量為$2(2-1)=2$成立。

假設$n=k$時，修正量為$2(k-1)$亦為正確的。

則當$n=k+1$時：

先將前面的k個環合併起來，由假設得此時修正量為$2(k-1)$，在將此合併環和第$(k+1)$個環合併，此時又需多加2的修正量，於是此時修正量為$2k$，由數學歸納法得證。

所以由以上定理，我們得出問題一的結果，假若有n個人分別在$1\sim n$層樓，而他們現在均想離開所在樓層，其中沒有任何兩個人是要到同一層樓的，且只有一部電梯，其最大容量為1人，且一開始位於1樓，則電梯搭載所需之最短路徑長為$\sum_{i=1}^{n}|a_i-i|+2k-2$，其中$k$表示合併完所剩餘的環的數量。

問題二的研究過程與結果：

首先在問題二的情形當中我們發現需要利用環可以先從其所在的線上拉出來這件事實，來解決問題二。

因為我們能夠完成一條線時，則這條線所接到的環必定也能在此時一起完成。

所以只要有一個方法能讓走完所有的線之後次數是最小的，也就代表了考慮環之後它也是最小的，於是接下來先不要看這些環，考慮線的合併即可。而線是可以分割的，於是我們把線都分割成向上和向下的線。

以下我們將說明線的合併：

分類討論「向上和向上的線」、「向下和向下的線」、與「向上和向下的線」三種情形：

情形(一)：若已有兩線(a,b)、(c,d)均要往上，則所需修正量為$|\min(b,d)-\max(a,c)|$。

證明：

假如兩線有交集時：

不妨設$a>c$，而兩線有交集即$d>a$，而當$d>b$時，由線的分割性可將(c,d)分割為(c,b)和(b,d)，再將(b,d)，(a,b)合併成為(a,d)於是此時變成(c,b)和(a,d)兩線，所以兩線(a,b)、(c,d)和(a,d)、(b,c)可以說是等價的，於是我們也可以假設$b>d$。

當我們要完成這兩條線時，必定是先由$c\to a$，中間經過兩條線並排的區域(即 a 到 d)，再由$d\to b$，而$c\to a$和$d\to b$不需要加上修正量，於是我們只要考慮a到d這段。

設$d-a=n$，下面我們證明所需修正量為 n ，我們將對 n 做數學歸納法：

首先$n=1$時，即$d-a=1$，而這是很顯然的，因為在我們走到 a 時一定要從中擇一人往上，但是由於另外一個人也要往上，所以必須再回來載第二個人，因此修正量為1。

假設$n=1,2,\ldots,k$時成立，則當$n=k+1$時：

若電梯一次就把其中一個人送到目標，那就有修正量為$k+1$，即結論成立。

當電梯把第一個人載了i的距離，並回頭載第二人，而如果電梯將第二人載的距離為j(其中$j<i$)，則電梯還必須空走$i-j$這段距離，這樣並不會達到最小值。於是電梯一定會將第二人載i的距離以上，而在電梯將第二個人載至第i樓時，可知這時的修正量為i，再由歸納假設，可知剩下的$n-i$的那段修正量為$k+1-i$，於是修正量為$i+k+1-i=k+1$，即結論成立。

於是我們可以把d - a寫成較一般的情形：$|\min(b,d)-\max(a,c)|$。

假如兩線沒有交集時：

先將第一個人送到目的地，再空走$|\min(b,d)-\max(a,c)|$的距離，再把第二個人送到目的地故修正量也是$|\min(b,d)-\max(a,c)|$

於是綜合以上討論，我們得出兩向上線合併時所需的修正量均為$|\min(b,d)-\max(a,c)|$。

情形(二)：若已有兩線(a,b)、(c,d)均要往下，則所需修正量為 $|\min(a,c)-\max(b,d)|$。

證明：

假如兩線有交集時：

由情形(一)的討論，可知(a,b)、(c,d)等價於$(\min(a,c),\max(b,d))$、$(\min(a,c),\max(b,d))$所需之修正量，一樣對$(\min(a,c),\max(b,d))=n$，所需之修正量$=n$做數學歸納法：

當$n=1$時，即$|\min(a,c)-\max(b,d)|=1$時，這是很顯然的，因為電梯在走到$\max(b,d)$時，一定要從中擇一人往下，但是由於另外一個人也要往下，所以電梯必須空走回來載第二個人，於是修正量為1。

假設$n=1,2,...,k$時成立，則$n=k+1$時：

若電梯一次就把其中一個人送到目標，那就有修正量為$k+1$，即結論成立。

當電梯把第一個人載了i的距離，並回頭載第二人，而如果電梯將第二人載的距離為j(其中$j<i$)，則電梯還必須空走$i-j$這段距離，這樣並不會達到最小值。於是電梯一定會將第二人載i的距離以上，而在電梯將第二個人載至第i樓時，可知這時的修正量為i，再由歸納假設，可知剩下的$n-i$的那段修正量為$k+1-i$

於是修正量為$i+k+1-i=k+1$，即結論成立。

所以兩線有交集時，所需修正量為$|\min(a,c)-\max(b,d)|$。

假如兩線沒有交集時：

先將第一個人送到目的地，再空走$|\min(a,c)-\max(b,d)|$的距離，再把第二個人送到目的地故修正量也是$|\min(a,c)-\max(b,d)|$。

於是綜合以上討論，我們得出兩向下線合併時所需的修正量均為$|\min(a,c)-\max(b,d)|$。

情形(三)：若已有線(a,b)要往上，線(c,d)要往下，則所需修正量為$|b-c|$。

證明：

向上線的終點為b，向下線的起點為c，那麼所需之修正量即為$|b-c|$

這其實是顯然的，因為一開始電梯是在一樓，所以先完成(a,b)，之後再空走至c完成(c,d)於是就會有修正量為$|b-c|$，於是結論成立。

接下來我們討論一般情況「n條向上的線」和「n條向下的線」的合併情形之修正量結果。

定理六：當有n條向上線段 (a_1,b_1)、(a_2,b_2)、⋯、(a_n,b_n) 的時候，並令 $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$、$B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$，則修正量為

$$|\min(B)-\min^2(A)|+|\min^2(B)-\min^3(A)|+...+|\min^{n-1}(B)-\min^n(A)|=\sum_{k=1}^{n-1}(|\min^k(B)-\min^{k+1}(A)|)$$

證明：

先將 A 與 B 集合由小到大排列，設排列後的集合 $A'=\{a_1',a_2',...,a_n'\}$，$B'=\{b_1',b_2',...,b_n'\}$

於是由於線可以分割、合併，可以把原來的 n 條線換成以下 n 條線：

(a_1',b_1')、(a_2',b_2')、⋯、(a_n',b_n')

而我們先證明這 n 條線裡不會有向下的線：

假設存在一條向下的線 (a_k',b_k')，即 $a_k'>b_k'$，且 $b_k'>b_{k-1}'>...>b_n'$

那麼考慮原本線尾是 b_k' 的線，因為原本的線均是向上的，所以他的起點一定是 a_{k-1}'、a_{k-2}'、⋯、a_1' 中的其中一個，而再考慮原本線尾是 b_k'、b_k'、⋯、b_k' 的線，他們的起點也一定分別都是 a_{k-1}'、a_{k-2}'、⋯、a_1' 中的其中一個，於是這就導致有 $k-1$ 個線的起點必須對到 k 個線的終點，於是得到矛盾，故得證。於是接下來只需要把這 n 條線合併，下面證明：當取走法 $[a_1'(a_1'),b_1',a_2'(a_2'),...,a_n'(a_n'),b_n']$，其修正量為 $|b_1'-a_2'|+|b_2'-a_3'|+...+|b_{n-1}'-a_n'|=\sum_{k=1}^{n-1}|b_k'-a_{k+1}'|$ 時會最小(如圖八)：

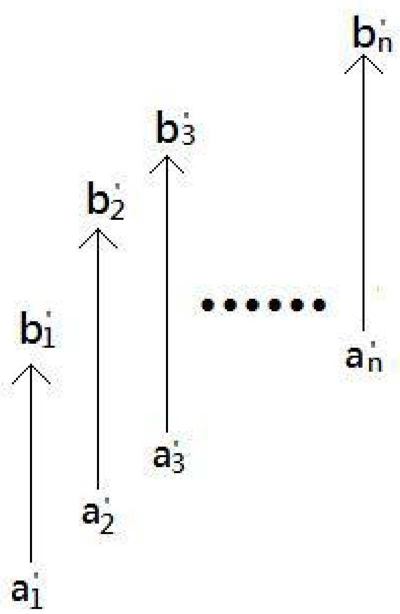
假設走到第 k 條線時先走了第 $k+2$ 條線，然後再去走第 $k+1$ 條線，那麼他的修正量就是 $|b_k'-a_{k+2}'|+|b_{k+2}'-a_{k+1}'|=S_1$，那如果先走第 $k+1$ 條線再走第 $k+2$ 條線，他的修正量會是 $|b_k'-a_{k+1}'|+|b_{k+1}'-a_{k+2}'|=S_2$，而 $S_2\le|b_{k+1}'-a_{k+1}'|+|a_{k+2}'-b_k'|$(如圖九的兩種狀況) $<|b_{k+1}'-a_{k+1}'|+|a_{k+2}'-b_k'|+(b_{k+2}'-b_{k+1}')=|b_{k+2}'-a_{k+1}'|+|b_k'-a_{k+2}'|=S_1$。所以必須要按照順序先走第1條，再走第2條、⋯、再走第 n 條，於是走法即為 $[a_1'(a_1'),b_1',a_2'(a_2'),...,a_n'(a_n'),b_n']$

則此時修正量為 $|b_1'-a_2'|+|b_2'-a_3'|+...+|b_{n-1}'-a_n'|=\sum_{k=1}^{n-1}|b_k'-a_{k+1}'|$，故得證。

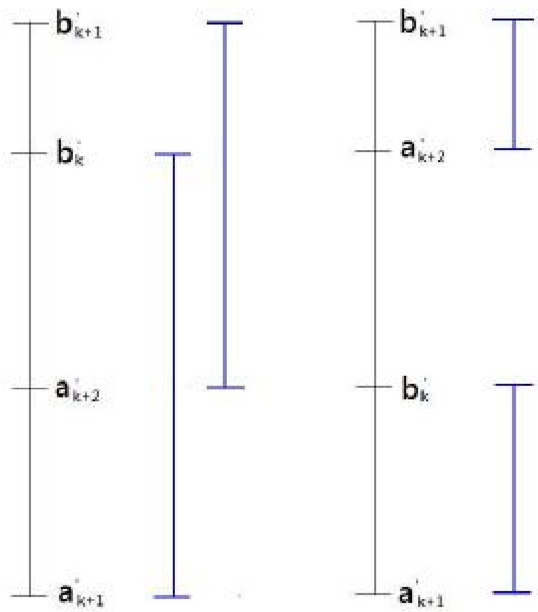
而再把它以排序前的 $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n$ 表示，於是修正量的公式就寫成：

$$|\min(B)-\min^2(A)|+|\min^2(B)-\min^3(A)|+...=\sum_{k=1}^{n-1}(|\min^k(B)-\min^{k+1}(A)|)$$

故結論成立。



圖(八)



圖(九)

定理七：若當有 n 條向下線段 (a_1,b_1)、(a_2,b_2)、…、(a_n,b_n) 的時候，並令 $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$、$B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$，則修正量為

$$|\max(B)-\max^2(A)|+|\max^2(B)-\max^3(A)|+...+|\max^{n-1}(B)-\max^n(A)|=\sum_{k=1}^{n-1}(|\max^k(B)-\max^{k+1}(A)|)$$

證明：只須將定理六的圖形倒轉 180^0 即可。

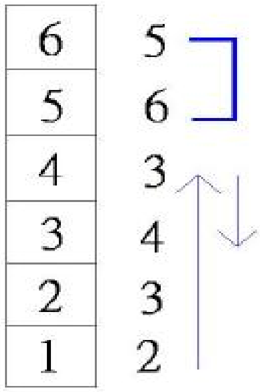
最後，我們將已經合併好的一條向上的線與一條向下的線合併，於是可以得到將所有線合併起來後的公式：

定理八：假設有 m 條向上的線 (a_1,b_1)、(a_2,b_2)、…、(a_m,b_m)，與 n 條向下的線 $(\mathrm{c}_1,\mathrm{d}_1)$、$(\mathrm{c}_2,\mathrm{d}_2)$、…、$(\mathrm{c}_n,\mathrm{d}_n)$，並令 $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$、$B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$、$\mathrm{C}=\{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,...,\mathrm{c}_n\}$、$\mathrm{D}=\{\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,...,\mathrm{d}_n\}$，則修正量的公式為：

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{m}-1}(|\min^k(B)-\min^{k+1}(A)|)+\sum_{k=1}^{n-1}(|\max^k(\mathrm{D})-\max^{k+1}(\mathrm{C})|)+|\max(B)-\max(C)|$$ 。

而又再經過許多嘗試後，我們發現有一個例子是還必須要考慮環的，也就是再把環拉出來，並把所有線合併之後，還必須考慮環有沒有和線有交集，如果沒有交集，則還需要加上修正量，如下面這個例子：$f:\{1,2,3,4,5,6\} \to \{2,3,4,3,6,5\}$ (如圖十)。

可以看到圖中有一條向上的線、一條向下的線與一個環，首先先把向上與向下的線合併，其修正量為0，於是這樣就得到修正量是0，但這和結果是不合的，因為當我們完成線時，不能夠完成最上面那個環，所以正確走法應該是：當我們走到4樓時，先空走一樓往上，完成$\{5,6\}$這個環後，再空走回來4樓，再繼續完成線。走法為：
$\{1(2),2(3),3(4),4,5(6),6(5),5,4(3),3\}$



圖(十)

於是發現他的修正量是2，而我們由此發現可以得到下面這個定理：

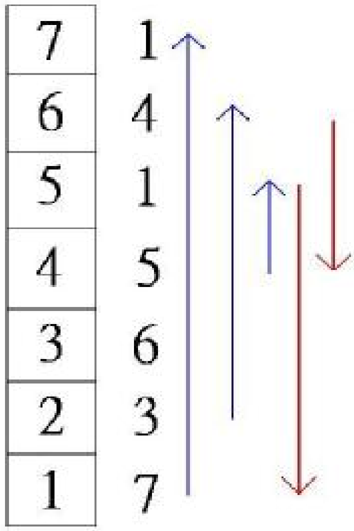
定理九：假設有m條向上的線(a_1,b_1)、(a_2,b_2)、…、(a_m,b_m)，與n條向下的線(c_1,d_1)、(c_2,d_2)、…、(c_n,d_n)，並令$A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$、$B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$、$C=\{c_1,c_2,...,c_n\}$、$D=\{d_1,d_2,...,d_n\}$，且若所有的線合併完之後，如果有L個環(已全部合併的)和這條線沒有交集，則修正量必須要再加$2L$ 即修正量為

$$\sum_{k=1}^{m-1}(|\min^k(B)-\min^{k+1}(A)|)+\sum_{k=1}^{n-1}(|\max^k(D)-\max^{k+1}(C)|)+|\max(B)-\max(C)|+2L$$

證明：

首先我們先把這L個環合併，所需的修正量為$2(L-1)$，接下來只需要證明：這個環和這條線所需的修正量為2即可。當我們先走到這條線的頂部時，必須先空走1層樓才能到達這個環，並把他完成，於是這樣修正量就必須≥ 1，而在完成這個環之後回到原點，但是下面的線還沒被完成，因為當我們考慮在線頂的那個人，如果他是要往上，那麼這條線就必須再延伸上去，並非以這個點為最高點，所以他必須是往下的，所以還要往下空走1層樓繼續完成下面的線，所以修正量至少需要$(2L-2)+2=2L$。

經過許多次的嘗試，我們發現先把所有向上的線合併，再把所有向下的線合併，最後再把向上和向下的線合併，這個方法的修正量不一定會最小，下面是一個反例：（如圖十一）
$f:\{1,2,3,4,5,6,7\}\to\{7,3,6,5,1,4,1\}$ 由原本的方法是先合併向上的線，修正量為2+3=5，再合併向下的線，修正量為1，再合併向下與向下的線，修正量為1，所以我們需要的修正量為5+1+1=7，但這種狀況有一個更好的走法，那就是$[1,2(3),3(6),6(4),4(5),5(1),1(7),7]$，這樣的修正量等於1。



圖(十一)

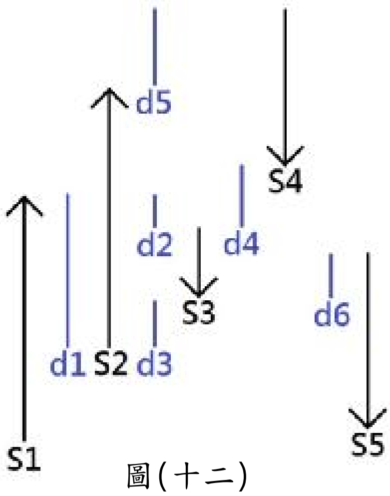
<走法1>：
1.將1樓的人送到2樓
2.將2樓的人送到6樓
3.電梯不載人到4樓
4.將4樓的人送到5樓
5.電梯不載人到2樓
6.將2樓的人送到7樓
7.電梯不載人送到6樓
8.將6樓的人送到4樓
9.電梯不載人到5樓
10.將5樓的人送到1樓
此時修正量為7。

<走法2>：
1.電梯不載人到2樓
2.將2樓的人送到3樓
3.將3樓的人送到6樓
4.將6樓的人送到4樓
5.將4樓的人送到5樓
6.將5樓的人送到1樓
7.將1樓的人送到7樓
此時有最小的修正量1。

於是我們發現在走向上的線的時候有時候也要走向下的線，才會達到最小。我們歸納了下面幾種情況，並討論何時需先走向下的線才能使修正量最小：
情況(一)：如圖十二所示
利用到調整法，也就是只要存在一個線使得走此所需要的修正量比原先之修正量還少，就先走能使修正量變少的那條線，所以我們只要找出上述兩者的值就可以進行判斷了。在此情況中考慮S_3被d_1包含：

1.走上走到一半時先走下的修正量為$d_2+d_3+d_5\pm d_4+S_3-d_6$，其中若$S_4$的終點在$S_3$起點之上則取正號，反之則取負號，並將線$S_i$之長度記為$S_i$。由於我們已知向上與向上、向上與向下、向下與向下之線的合併規則，所以：
$S_1\to S_3$所需要之修正量為d_2，$S_3\to S_2$所需要之修正量為d_3，$S_2\to S_4$所需要之修正量為d_5，接下來走S_3與S_5的修正量為$\pm d_4+S_3-d_6$。故綜合以上，我們得出其中間便往下所需要之修正量為$d_2+d_3+d_5\pm d_4+S_3-d_6$。

2.原先往上所需要之修正量為$d_1+d_5+d_4+d_6$，同剛才的做法，$S_1\to S_2$所需要之修正量為d_1，$S_2\to S_4$所需要之修正量為d_5，$S_4\to S_3$所需要之修正量為d_4，$S_3\to S_5$所需要之修正量為d_6。故綜合以上，我們得出依照原本方法所需要之修正量為$d_1+d_5+d_4+d_6$

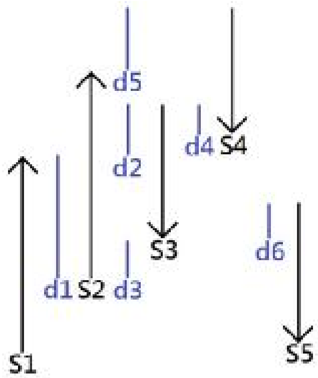


圖(十二)

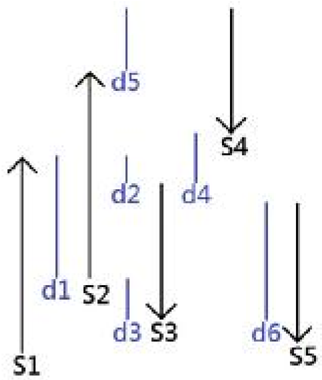
於是比較上面兩種走法，發現必須滿足下述條件，才會使得在往上的過程中，進行往下的線段可以使其修正量達到最小值亦即要滿足$d_2+d_3+d_5\pm d_4+S_3-d_6<d_1+d_5+d_4+d_6$

因此得出$0<2d_6$或$0<2d_4+2d_6$，其中前者為d_4前的符號取正，後者為取負。

用同樣的方式，可以得出圖十三的情況是要滿足：$2d_2<2d_6$或$2d_2<2d_4+2d_6$
而圖十四之情形是要滿足：$2d_3<2d_6$或$2d_3<2d_4+2d_6$



圖(十三)



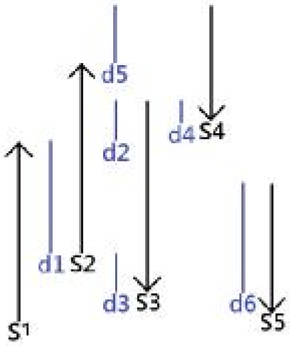
圖(十四)

類似的討論我們可以得出以下情況的結果：

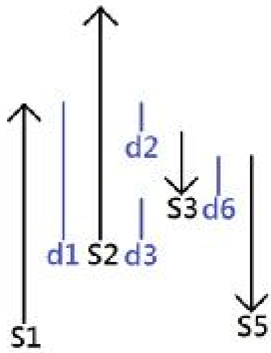
圖十五則是要滿足：$2d_2 + 2d_3 < 2d_6$或 $2d_2 + 2d_3 < 2d_4 + 2d_6$

圖十六則是要滿足：$0 < 2d_6$

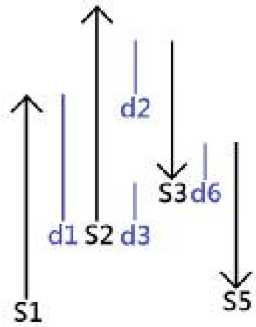
圖十七則是要滿足：$2d_2 < 2d_6$



圖(十五)



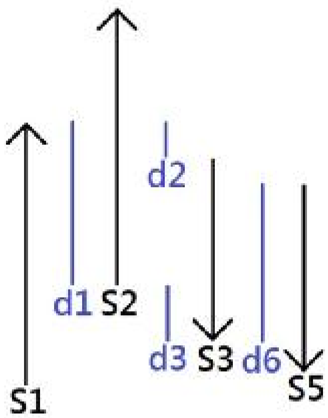
圖(十六)



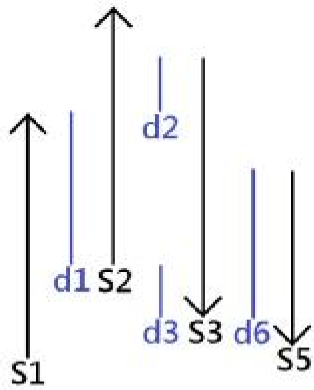
圖(十七)

圖十八是要滿足：$2d_3 < 2d_6$

圖十九是要滿足：$2(d_2 + d_3) < 2d_6$



圖(十八)



圖(十九)

這裡舉一個例子：

$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\} \rightarrow \{8,5,2,11,3,8,13,6,3,4,12,11,14,13,11\}$ (如圖二十)

這時可以找到六條線段，其中三條往上、三條往下， 分別為

$S_1(1,8), S_2(3,11), S_3(7,13), S_4(15,11), S_5(10,4), S_6(9,3)$，接著我們先算修正量：

考慮走S_1,S_2之間是否要走S_5，在這裡d_4前的符號應取正，於是其判別規則為$2d_2 < 2d_6$ (如圖十三)，並且將$d_2 = 0, d_6 = 5$帶入，可以發現這是符合的，所以我們需要在走S_1,S_5之間走S_5。再考慮走S_2,S_3之間是否要走S_4，其判別規則是$2d_2 < 2d_6$ (如圖十七)，

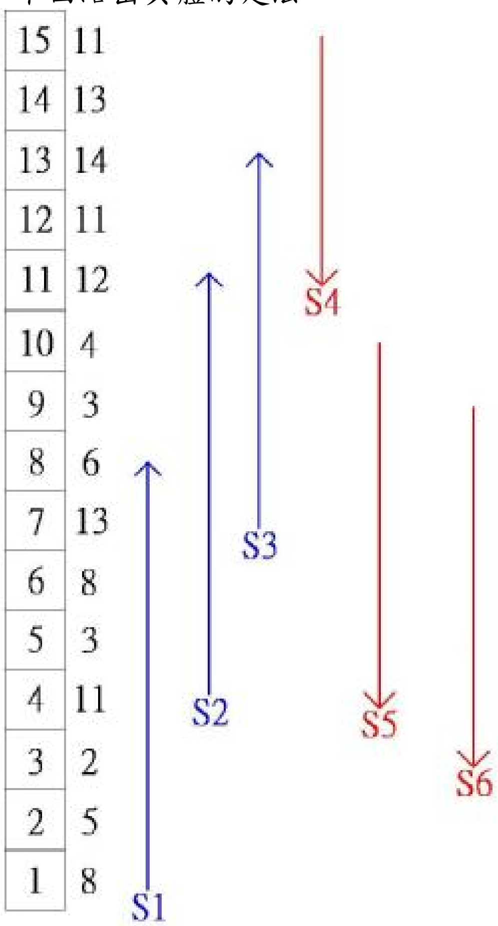
並且將$d_2 = 4, d_6 = 2$帶入，可以發現這是不會符合的，所以我們需要在走S_2,S_3之間不走S_4

綜合以上，我們知道我們要的走法為：$S_1 \rightarrow S_5 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4 \rightarrow S_6$，

而其修正量為$2+4+2+2=10$，又原本的$\sum_{i=1}^{15}|a_i - i| = 51$，

所以我們得到了全部之最短路徑為$51+10=61$，下面給出具體的走法：

1.將1樓的人送至2樓
2.將2樓的人送至5樓
3.將5樓的人送至3樓
4.將3樓的人送至2樓
5.將2樓的人送至8樓
6.將8樓的人送至6樓
7.將6樓的人送至8樓
8.電梯不載人至10樓
9.將10樓的人送至4樓
10.將4樓的人送至11樓
11.將11樓的人送至12樓
12.將12樓的人送至11樓
13.電梯不載人至7樓
14.將7樓的人送至13樓
15.將13樓的人送至14樓
16.電梯不載人至15樓
17.將15樓的人送至11樓
18.電梯不載人至9樓
19.將9樓的人送至3樓



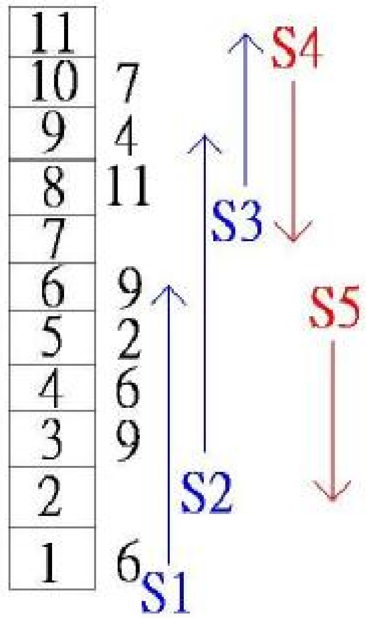
圖(二十)

問題三的研究過程與結果：

我們發現問題三可利用問題二的結論來解決，但必須要考慮空樓層在計算差值的時候應該要用 0 去算，所以只需要在把所有的空樓層都補上一個也是要去那樓的人，就能使問題二的公式在問題三也是正確的。下面舉一個例子：$f:\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}\to\{6,0,9,6,2,9,0,11,4,7,0\}$ (如圖二十一)，其中 0 表示那一樓層沒有人。

<走法>

1.將1樓的人送到 6 樓
2.將 6 樓的人送到 9 樓
3.將 9 樓的人送到 4 樓
4.將 4 樓的人送到 6 樓
5.電梯不載人到 5 樓
6.將 5 樓的人送到 2 樓
7.電梯不載人到 3 樓
8.將 3 樓的人送到 9 樓
9.電梯不載人到 8 樓
10.將 8 樓的人送到 11樓
11.電梯不載人到 10 樓
12.將 10 樓的人送到 7 樓



圖(二十一)

而原本的 $\sum_{i=1}^{11}|a_i-i|=25$ ，又修正量為 $1+1+1+1=4$ ，

所以我們得出最小之路徑長是 $25+4=29$ 。

而這個問題的修正量公式和問題二一樣，為

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{m}-1}(|\,\mathbf{min}^{k}(B)-\mathbf{min}^{k+1}(A)\,|)+\sum_{k=1}^{p-1}(|\,\mathbf{max}^{k}(\mathrm{D})-\mathbf{max}^{k+1}(\mathrm{C})\,|)+|\mathbf{max}(\mathrm{B})-\mathbf{max}(\mathrm{C})|+2L$$ ，

並且也要考慮圖十二到圖十九的情形。

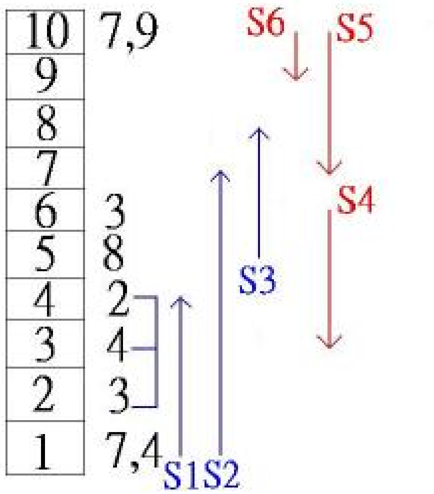
問題四的研究過程與結果：

我們發現問題四也可以用問題二的結論來解決，而在問題四中只是多了一種情況，就是有可能有兩條或兩條以上的線的起點是同樣的，下面也舉一個例子：

$f:\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\to\{\{7,4\},3,4,2,8,3,0,0,0,\{7,9\}\}$（如圖二十二），其中在若同一層樓有兩個人，他們要去 a 樓和 b 樓，則用 $\{a,b\}$ 表示。

<走法>

1.將1樓的人送到4樓
2.電梯不載人到1樓
3.將1樓的人送到7樓
4.電梯不載人到5樓
5.將5樓的人送到8樓
6.電梯不載人到10樓
7.將10樓的人送到9樓
8.電梯不載人到10樓
9.將10樓的人送到7樓
10.電梯不載人到6樓
11.將6樓的人送到3樓



圖(二十二)

而原本的 $\sum_{i=1}^{10}|a_i-i|=19$，又修正量為 $3+2+2+1+1=9$

所以我們得出電梯搭載的最短路徑長是 $19+9=28$

而這個問題的修正量公式和問題二一樣，為

$$\sum_{k=1}^{m-1}(|\min^{k}(B)-\min^{k+1}(A)|)+\sum_{k=1}^{p-1}(|\max^{k}(\mathrm{D})-\max^{k+1}(\mathrm{C})|)+|\max(\mathrm{B})-\max(\mathrm{C})|+2L\text{ ，}$$

並且也要考慮圖十二到圖十九的情形。

陸、研究結果與結論

(一).若有n個人分別在$1\sim n$層樓，而他們現在均想離開所在樓層，其中沒有任何兩個人是要到同一層樓的，假若只有一部電梯，其最大容量為1人，且一開始位於1樓，則電梯搭載所需之最短路徑長為$\sum_{i=1}^{n}|a_i-i|+2k-2$，其中$k$表示合併完所剩餘的環，$a_i$表示第$i$層樓的人想要去的樓層。

(二).若有n個人分別在$1\sim n$層樓，而他們現在均想離開所在樓層，再者，只有一部電梯，其最大容量為1人，且一開始位於1樓，令A_i表示第i層樓的人想要去的樓層，並且假設有m條向上的線(a_1,b_1)、(a_2,b_2)、…、$(a_{\mathrm{m}},b_{\mathrm{m}})$，與$p$條向下的線$(\mathrm{c}_1,\mathrm{d}_1)$、$(\mathrm{c}_2,\mathrm{d}_2)$、…、$(\mathrm{c}_p,\mathrm{d}_p)$，並令$A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$、$B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$、$\mathrm{C}=\{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,...,\mathrm{c}_p\}$、$\mathrm{D}=\{\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,...,\mathrm{d}_p\}$，且和合併後的線沒有交集的環的數量為$L$，則電梯搭載的最短路徑為：

$$\sum_{i=1}^{n}|A_i-i|+\sum_{k=1}^{\mathrm{m}-1}(|\min^k(B)-\min^{k+1}(A)|)+\sum_{k=1}^{p-1}(|\max^k(\mathrm{D})-\max^{k+1}(\mathrm{C})|)+|\max(\mathrm{B})-\max(\mathrm{C})|+2\mathrm{L}$$

但是要注意到如果出現圖十二至圖十九其一者，則上式須減掉$\Delta=$右式$-$左式，其中右式、左式分別為以下不等式左右兩邊之數值。

圖十二至圖十九之條件分別為：

圖(十二)：$0<2d_6$ 或 $0<2\mathrm{d}_4+2\mathrm{d}_6$　　圖(十三)：$2\mathrm{d}_2<2\mathrm{d}_6$ 或 $2\mathrm{d}_2<2\mathrm{d}_4+2\mathrm{d}_6$

圖(十四)：$2\mathrm{d}_3<2\mathrm{d}_6$ 或 $2\mathrm{d}_3<2\mathrm{d}_4+2\mathrm{d}_6$

圖(十五)：$2\mathrm{d}_2+2\mathrm{d}_3<2\mathrm{d}_6$ 或 $2\mathrm{d}_2+2\mathrm{d}_3<2\mathrm{d}_4+2\mathrm{d}_6$

圖(十六)：$0<2d_6$　　圖(十七)：$2d_2<2d_6$

圖(十八)：$2d_3<2d_6$　　圖(十九)：$2(d_2+d_3)<2d_6$

(三). 若有t個人在$1\sim n$(其中$t<n$)層樓，且同一層樓不會有兩個人，而他們現在均想離開所在樓層，且只有一部電梯，其最大容量為1人，且一開始位於1樓。令A_i表示第i層樓的人想要去的樓層，若k層樓沒有人，則$A_k=k$，並且假設有m條向上的線(a_1,b_1)、(a_2,b_2)、…、$(a_{\mathrm{m}},b_{\mathrm{m}})$，與$p$條向下的線$(\mathrm{c}_1,\mathrm{d}_1)$、$(\mathrm{c}_2,\mathrm{d}_2)$、…、$(\mathrm{c}_p,\mathrm{d}_p)$，並令$A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$、$B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$、$\mathrm{C}=\{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,...,\mathrm{c}_p\}$、$\mathrm{D}=\{\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,...,\mathrm{d}_p\}$，且和合併後的線沒有交集的環的數量為$L$，則電梯搭載的最短路徑為：

$$\sum_{i=1}^{n}|A_i-i|+\sum_{k=1}^{\mathrm{m}-1}(|\min^k(B)-\min^{k+1}(A)|)+\sum_{k=1}^{p-1}(|\max^k(\mathrm{D})-\max^{k+1}(\mathrm{C})|)+|\max(\mathrm{B})-\max(\mathrm{C})|+2\mathrm{L}$$

而也是要注意到如果出現圖十二至圖十九其一者，則上式須減掉$\Delta=$右式$-$左式，其中右式、左式分別為上述不等式(如(二).)左右兩邊之數值。

(四).

若有t個人分別在$1\sim n$樓，且允許有同一層樓會有兩個或兩個以上的人，而他們現在均想離開所在樓層，且只有一部電梯，其最大容量為1人，且一開始位於1樓。令A_i表示第i層樓的人想要去的樓層，若k層樓沒有人，則$A_k=k$，並且假設有m條向上的線(a_1,b_1)、(a_2,b_2)、…、$(a_{\mathrm{m}},b_{\mathrm{m}})$，與$p$條向下的線$(\mathrm{c}_1,\mathrm{d}_1)$、$(\mathrm{c}_2,\mathrm{d}_2)$、…、$(\mathrm{c}_p,\mathrm{d}_p)$，並令$A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$、

$B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$、$\mathrm{C}=\{\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,...,\mathrm{c}_p\}$、$\mathrm{D}=\{\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,...,\mathrm{d}_p\}$，且和合併後的線沒有交集的環的數量為$L$，則電梯搭載的最短路徑為：

$$\sum_{i=1}^{n}|A_i-i|+\sum_{k=1}^{\mathrm{m}-1}(|\mathbf{min}^k(B)-\mathbf{min}^{k+1}(A)|)+\sum_{k=1}^{p-1}(|\mathbf{max}^k(\mathrm{D})-\mathbf{max}^{k+1}(\mathrm{C})|)+|\mathbf{max}(\mathrm{B})-\mathbf{max}(\mathrm{C})|+2\mathrm{L}$$

而也是要注意到如果出現圖十二至圖十九其一者，則上式須減掉Δ＝右式−左式，其中右式、左式分別為上述不等式(如(二).)左右兩邊之數值。

柒、應用及未來展望

在經由老師的指導之後，我們瞭解到問題一的本質其實是「排列群」，而如果我們能利用處理排列群的方法，像是最大遞減子數列等來解決問題一，也許能夠在不需要找出環的情況下，利用一些特定的參數直接求出其最小路徑，並進而解決問題二、三和四。或者能夠將問題更一般化，像是一台電梯能夠載 1 個人以上的情形，和電梯的起始位置可以是在不是一樓的位置的情形，都是值得深入研究的問題。

捌、參考文獻

1. 張鎮華(2006) 相異代表系面面觀 數學傳播第 30 期第 3 卷
2. 聶靈沼 代數學引論 凡異出版社
3. 馬鎮華 離散數學導引 凡異出版社