

摘要

本研究由「過已知三點之正 n 邊形」作圖延伸到「過已知 n 點之正 n 邊形」時，發現已知 n 點可藉由對稱作出，故稱此 n 邊形為「對稱多邊形」，也意外的發現到對稱多邊形可將費馬點以及拿破崙定理推廣，也將視野拓展到了一個全然不同的世界，最後利用廣義費馬點和拿破崙多邊形的性質，來簡化作過 n 點之正 n 邊形的方法。本篇最大價值和突破在於：我們不只是把費馬點和拿破崙定理的作法推廣到對稱多邊形，而是將相關性質也一起推廣了。

目錄

壹、研究動機	02
貳、研究目的	02
參、研究器材	02
肆、文獻探討	02
伍、研究過程	02
一、求作「通過平面上已知三點之正 n 邊形」	04
二、過已知三點之正多邊形的面積最大值探討	05
三、探討作過已知三點之正 n 邊形時，不共線三點是否一定會有解	07
四、過已知 n 點之正 n 邊形性質探討	09
五、推廣並探討費馬點和拿破崙定理與過已知 n 點之正 n 邊形的關係及其性質	12
(一)費馬點的推廣	12
(二)拿破崙定理的推廣	14
(三)過 n 點之正 n 邊形、廣義費馬點、拿破崙多邊形之綜合性質	19
六、利用廣義費馬點和拿破崙多邊形的性質，簡化作過 n 點之正 n 邊形的方法	24
陸、研究結果	26
柒、未來展望	29
捌、參考資料	29
玖、附錄	30

壹、研究動機

以平面上不共線之三點為頂點可以畫出一個三角形，在學三角形的外心時也學到：「給定平面上不共線之三點可找到通過此三點的外接圓」。此時，我們突然想到那麼是否也可以找到通過這三個頂點正三角形呢？以此類推，正方形呢？甚至是正 n 邊形呢？這個突然浮現的問題讓我們開始了這一連串的探索。

貳、研究目的

- 一、求作「過已知三點之正 n 邊形」。
- 二、過已知三點之正 n 邊形的面積和周長的最大值探討。
- 三、探討作過已知三點之正 n 邊形時，不共線之三點是否一定會有解。
- 四、過已知 n 點之正 n 邊形性質探討。
- 五、推廣費馬點和拿破崙定理，並探討對稱多邊形之廣義費馬點、拿破崙多邊形與過已知 n 點之正 n 邊形的關係及其性質。
- 六、利用廣義費馬點和拿破崙多邊形的性質，簡化作過 n 點之正 n 邊形的方法。

參、研究器材

GSP、Geogebra。

肆、文獻探討

在全國科展第51屆高中數學組「你泥中有我，我泥中有你」中，有與本研究類似的研究探討。以下為兩篇作品的異同之處：

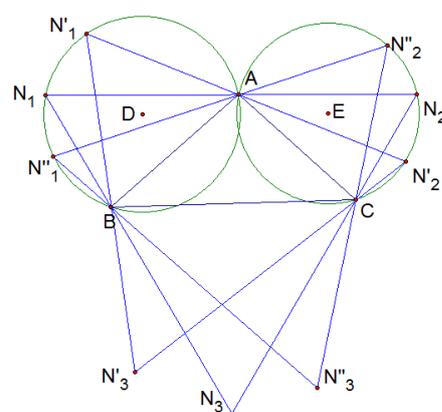
- 一、我們主要研究「通過平面上不共線的相異三點，可否存在使之每點恰有一邊經過的正 n 邊形」，然後再推廣到「對稱多邊形」；而參考文獻則以「不共線相異 n 點」開頭，所以內容上後者有部分重疊到。
- 二、參考文獻在過 n 點之正 n 邊形上探討的主要內容為「是否存在」，而我們主要為探討「若通過已知 n 個點的正 n 邊形有無限多解時，則如何作出這 n 個點(即為對稱多邊形)」以及「對稱多邊形的相關性質」。
- 三、我們將研究的內容拓展到了「費馬點」和「拿破崙定理」的推廣，並利用相關性質簡化作過平面上 n 點之正 n 邊形的方法。

伍、研究過程

一、名詞定義：

- (一)「過已知點之正多邊形」：已知 A 、 B 、 C 三點為不共線三點，若存在一正 n 邊形，使得 A 、 B 、 C 三點都在其邊上，則我們稱此正 n 邊形為「過 ΔABC 之正 n 邊形」，符號記為 $N_1N_2 \dots N_n$ 。另外，在本研究中再增加一項限制條件：已知三點需分別在正多邊形的三個相鄰邊上； n 個點以此類推。

(二) 「**固定點**」、「**移動點**」：以圖(1)為例，已知點 A 、 B 、 C 為不共線任意三點，兩圓 D 、 E 相交的頂點 A 定義為「**移動點**」，而 B 、 C 兩點定義為「**固定點**」（於p.8解釋）。雖然 A 、 B 、 C 三點位置是相對的，但若無特別說明，都以此假設。



▲圖(1)

(三) **過已知點之正多邊形的「旋轉」**：仍以圖(1)為例，若過 $\triangle ABC$ 之正三角形的頂點 N_1 以 D 點為旋轉中心，順（逆）時針旋轉至 N'_1 (N''_1)，則另外二個頂點也會分別旋轉至 N_2 、 N_3 (N'_2 、 N''_2)，此為正 $\triangle N_1 N_2 N_3$ 的旋轉。

(四) **過已知點之最大正多邊形**：將正多邊形 $N_1 N_2 \dots N_n$ 旋轉，當其面積與周長為最大值時，稱此正多邊形為最大正多邊形。

(五) **對稱多邊形**：從外拿破崙多邊形 (定理5-2-1) 的證明中可得定理4-1所得到的已知 n 點(符號記為 A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_n)可由 P 點關於正 n 邊形 $O_1 O_2 \dots O_n$ 之各邊對稱作出，故我們稱多邊形 $A_1 A_2 \dots A_n$ 為對稱多邊形。

(六) **廣義費馬點**：我們將費馬點推廣到多邊形的情況，但其只存在於對稱多邊形中，我們稱此點為廣義費馬點 (定理5-1)，符號記為 P 。

(七) **拿破崙多邊形**：我們將拿破崙定理推廣到正多邊形的情況，但其只存在於對稱多邊形中，我們稱此正多邊形為拿破崙多邊形 (定理5-2)，外拿破崙多邊形符號記為 $O_1 O_2 \dots O_n$ ；內拿破崙多邊形符號記為 $I_1 I_2 \dots I_n$ 。

另外，拿破崙多邊形的頂點在此簡稱為拿破崙頂點；拿破崙多邊形的外接圓簡稱為拿破崙外接圓，以此類推。

二、預備定理：

(一) **維維安妮定理**：正多邊形內任一點到各邊距離和為定值。

(二) **費馬點**：若 P 點為平面上之一點，使得 P 點到 $\triangle ABC$ 的三個頂點之距離和最小，則 P 點稱為 $\triangle ABC$ 的費馬點；另外，存在唯一的費馬點與三個頂點的連線形成三個 $\frac{2\pi}{3}$ 的夾角。

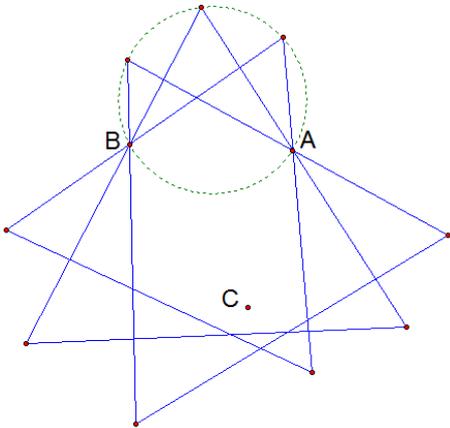
(三) **拿破崙定理**：以三角形各邊分別向外(內)側作正三角形，則這三個正三角形的外心會構成一個正三角形，並稱為外(內)拿破崙三角形；且內、外拿破崙三角形有共同的外心。

三、問題分析與討論

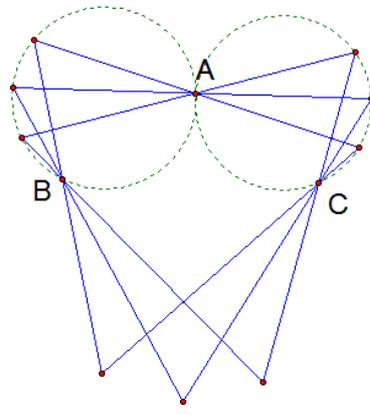
研究一：求作「過已知三點之正 n 邊形」

(一) 探討：

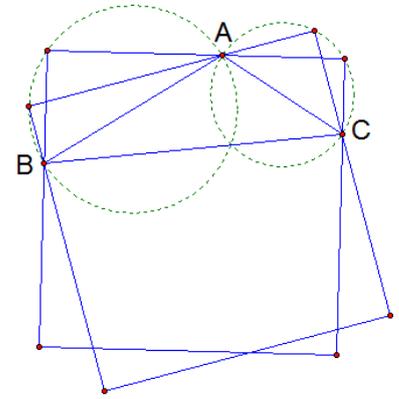
為了縮小研究範圍，我們將本研究限制在三點 A 、 B 、 C 須在正 n 邊形的相鄰邊上，意即兩點所夾的正 n 邊形的內角必為 $\frac{(n-2)\pi}{n}$ ，如圖(2)，於是也就產生出了使用圓周角概念的想法；而如在點 A 、 C 上也採取相同作法即可得到過 ΔABC 之正 n 邊形，如圖(3)，故可推出過已知三點之正 n 邊形的作法。



▲圖(2)



▲圖(3a)

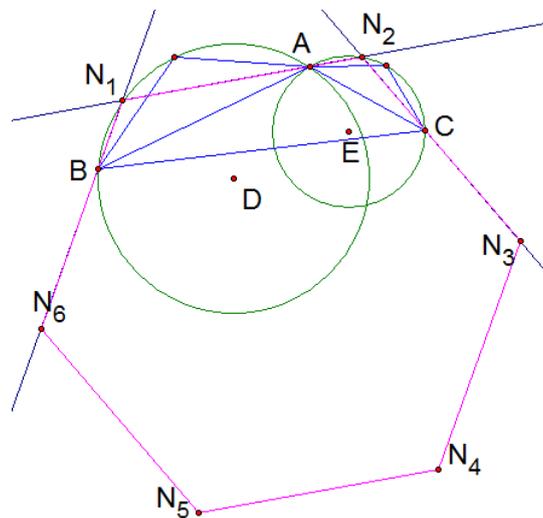


▲圖(3b)

(二) 結論：

定理1：若欲作過 ΔABC 三點之正 n 邊形，則作法如下。

1. 分別 \overline{AB} 、 \overline{AC} 為底，作出頂角為 $\frac{(n-2)\pi}{n}$ 的等腰三角形，再作出兩等腰三角形的外接圓 D 及圓 E 。
 2. 在圓 D 上取一點 N_1 連 $\overline{N_1A}$ 、 $\overline{N_1C}$ ，且 $\overline{N_1C}$ 交圓 E 於 N_2 ，再連 $\overline{N_2B}$ 。
 3. 如圖(4)，以 $\overline{N_1N_2}$ 為邊長， $\angle AN_1B$ 為內角作通過 A 、 B 、 C 三點的正 n 邊形 $N_1N_2\dots N_n$ ，則正 n 邊形 $N_1N_2\dots N_n$ 即為所求。
- ※ 並非任意三點都可作出通過此三點的正 n 邊形，在研究三將會有更詳細的討論。



▲圖(4)

研究二：過已知三點之正多邊形的面積最大值探討

(一) 將過 $\triangle ABC$ 之正多邊形旋轉時，其面積和周長會有最大值。如圖(5a)，若 $N_1N_2\dots N_n$ 為過 $\triangle ABC$ 之最大正 n 邊形，則 $\overline{N_1N_2} \perp \overline{PA}$ 。可知欲證明 $N_1N_2\dots N_n$ 為過 $\triangle ABC$ 之最大正 n 邊形，證明「若 $\overline{N_1N_2} \perp \overline{PB}$ ，則 $\overline{N_1N_2} \geq \overline{N'_1N'_2}$ 」即可，如圖(5b)。

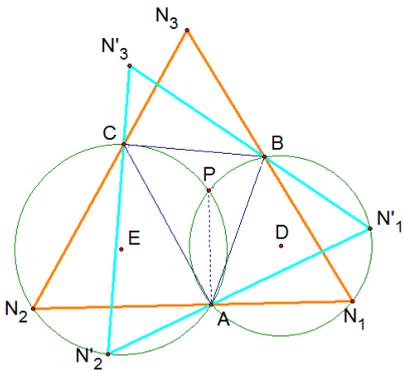
證明：如圖(6)，已知圓 D 、 E 兩交點分別為 A 、 P ，先將 $\overline{N_1AN_2}$ 水平平移至 \overline{GPH} ，再將 $\overline{N'_1N'_2}$ 水平平移至 \overline{GI} 。

$$\because \angle GIH = \angle AN'_2H = \angle AN_2H = \frac{\pi}{2}$$

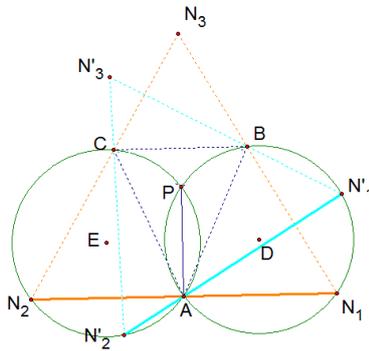
$\therefore \triangle GHI$ 為直角三角形

$$\Rightarrow \overline{GH} > \overline{GI}$$

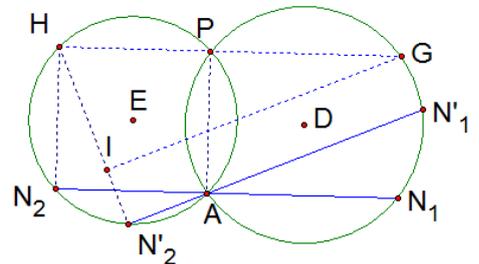
$$\Rightarrow \overline{N_1N_2} > \overline{N'_1N'_2} \text{，得證。}$$



▲圖(5a)



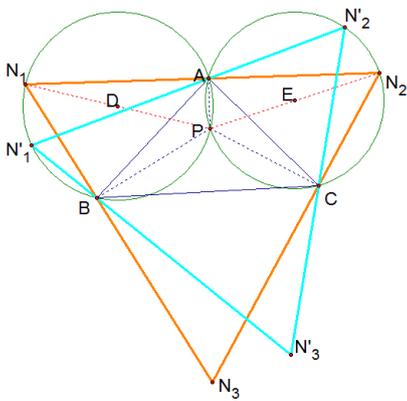
▲圖(5b)



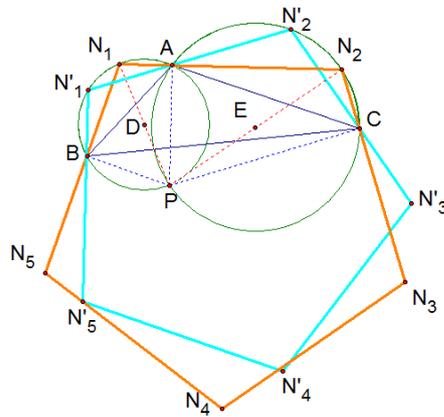
▲圖(6)

故可得結論：

定理2：若 $\overline{N_1N_2} \perp \overline{PA}$ ，則多邊形面積 $N_1N_2\dots N_n \geq N'_1N'_2\dots N'_n$ ，若且唯若 $\overline{N_1N_2} \perp \overline{PA}$ 時等號成立。



▲圖(7a)



▲圖(7b)

還發現以下性質：

1. **性質2-1**： P 、 D 、 N_1 三點共線，且 P 、 E 、 N_2 三點共線。

證明：

$$\because \angle N_1AP = \frac{\pi}{2} \therefore \overline{N_1P} \text{ 為直徑}$$

$\Rightarrow P$ 、 D 、 N_1 三點共線(同理， P 、 E 、 N_2 三點共線)，得證。

2. **性質2-2**：最大正 n 邊形不只符合 $\overline{PA} \perp \overline{N_1N_2}$ ，也符合 $\overline{PB} \perp \overline{N_nN_1}$ 、 $\overline{PC} \perp \overline{N_2N_3}$ 。

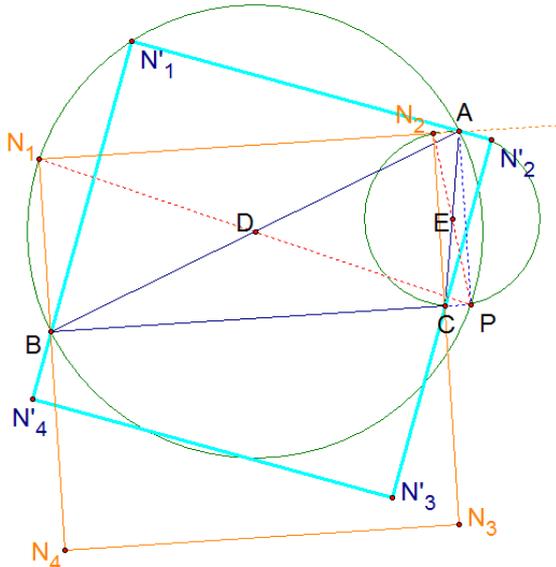
證明：

$\because N_1APB$ 為圓內接四邊形

$$\therefore \angle N_1BP = \pi - \angle N_1AP = \frac{\pi}{2}$$

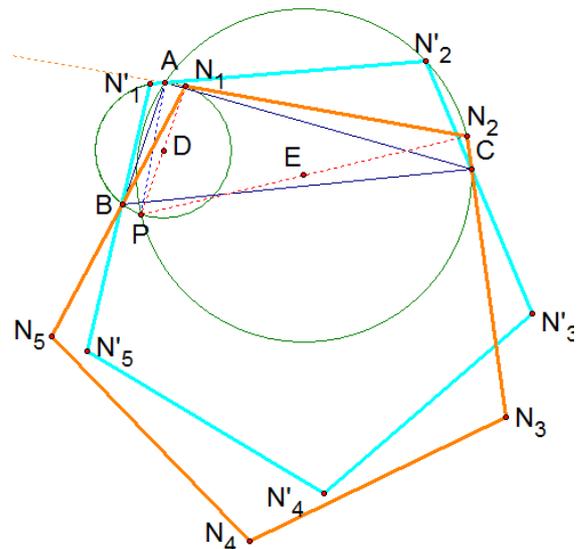
同理， $\angle N_1CP = \frac{\pi}{2}$ ，得證。

(二)事實上，並非所有情況的過 ΔABC 之最大正 n 邊形都是如此，此作法也可能會使 A 點在 $\overline{N_1N_2}$ 外，其原因留待**性質5-3-5**說明，而此時過 ΔABC 之最大正 n 邊形為 $N'_1N'_2 \dots N'_n$ 在旋轉至 $N_1N_2 \dots N_n$ 前，先與 A 點重合的那頂點 N'_1 或 N'_2 所作出的正 n 邊形，如圖(8)。



▲圖(8a)

(旋轉 $N'_1N'_2 \dots N'_n$ 時， N'_2 會先與 A 重合)



▲圖(8b)

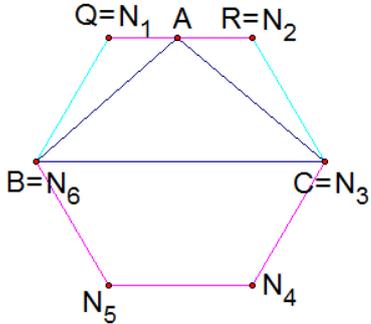
(旋轉 $N'_1N'_2 \dots N'_n$ 時， N'_1 會先與 A 重合)

(三)上文所謂的最大正多邊形皆指**以 A 為移動點時的相對極大值**，而真正的最大正多邊形還是得分別將點 A 、 B 、 C 作為移動點，各作出其對應之最大值再進行一次比較，才能找到**絕對的極大值**。如圖(8a)，若將 C 作移動點，還是可直接作出通過 ΔABC 之最大正方形。

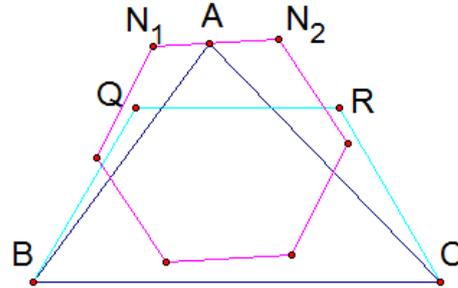
研究三：探討作過已知三點之正 n 邊形時，不共線之三點是否一定會有解

(一) **A點向上限制區域的探討。**

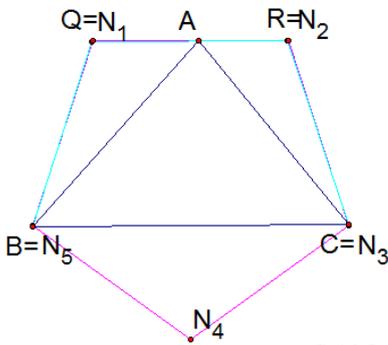
若將 \overline{BC} 固定，將A點以垂直 \overline{BC} 的方向往上移，可發現當 $n \geq 4$ 時，A與 \overline{BC} 的距離會有限制值（但正三角形卻沒有，在引理3-1解釋），當此距離剛好等於限制值時，正 n 邊形就會有**至少一頂點無法移動**，意即**只有一解**；若超過限制值就會**無解**；進而找出這距離的限制值就是**以 \overline{BC} 為底邊的正 n 邊形相鄰之四頂點梯形的高**，如圖(9)、(10)之四邊形 **$BQRC$** （文後若無說明，皆令A點與 \overline{BC} 的距離限制值為 \overline{QR} 與 \overline{BC} 的距離）：



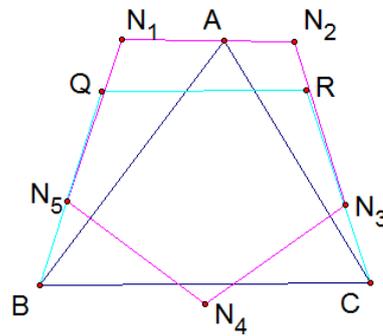
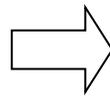
▲圖(9a)



▲圖(9b)



▲圖(10a)



▲圖(10b)

(Q 、 A 、 R 共線，只有一解)

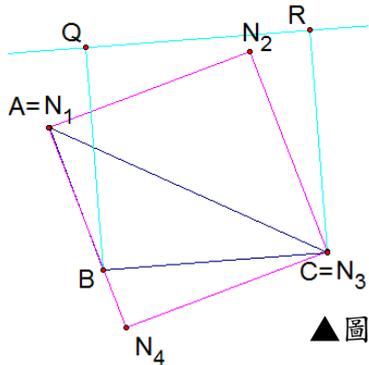
(A 超過範圍，無解，如圖所示)

* 結論是要作「以 \overline{BC} 為底邊的正 n 邊形相鄰之四頂點梯形的高」，但正三角形只有三個頂點，故得引理3-1：**在作過 $\triangle ABC$ 的正三角形時，找不到A點向上移動之限制值。**

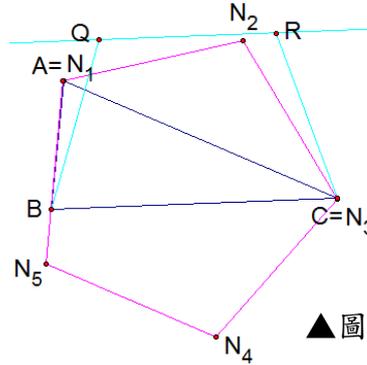
(二) 依照上述方式，因為是將 B 、 C 兩點固定，故我們將 B 點、 C 點命名為「固定點」，而將 A 點命名為「移動點」。上述所謂之無解指的是「當移動點為 A 點時，無法作出過 A 、 B 、 C 之正多邊形」，若將移動點改為 B 或 C 時，還是可能有解，但文後若無特別說明，無解的討論皆以假設移動點為 A 點來討論。

(三) **A點兩側限制區域的探討。**

在高度不超過 \overline{QR} 的條件下，將A點往左右兩個方向移動，可發現兩側亦有限制邊界，但是卻不是在 \overline{QB} 和 \overline{RC} 上（但**正三角形仍無限制**，其說明詳見**性質3-1**），而將A點移動至兩側的限制邊界時， $\angle BAC = \angle N_n N_1 N_3$ ，故可知此邊界是個**弧**，且**點Q、R在此弧上**。

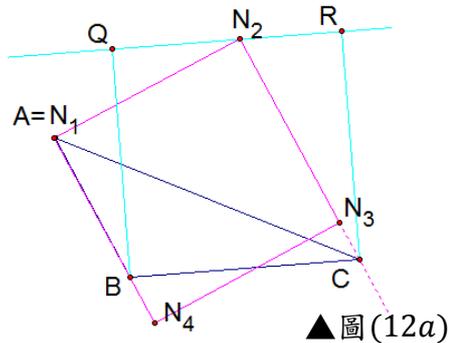


▲圖(11a)

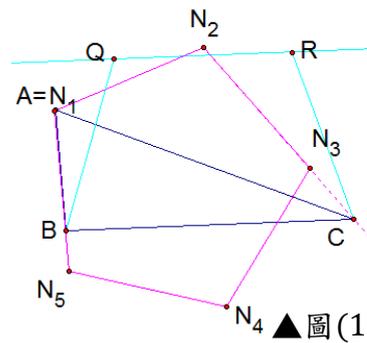


▲圖(11b)

而如果再將A點向兩側移動，則會發生無解的情況：



▲圖(12a)



▲圖(12b)

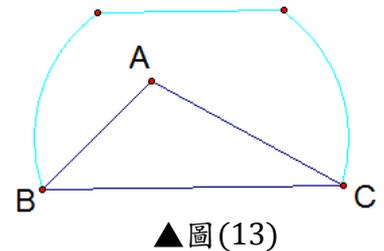
討論：

可知兩側的限制區域是梯形BQRC外接圓的部分集合，但由**引理3-1**已知 $n = 3$ 時沒有 \overline{QR} 限制的存在，自然也就無法作出A點可移動之兩側限制。在找不到任何限制的情況下，故得**性質3-1**：**任何三角形都必有無限多個通過其之正三角形。**

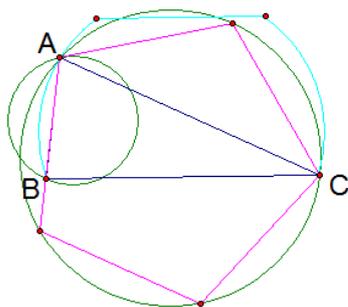
(四) 綜合以上得到**研究三**之結論，如圖(13)：

定理3：**過已知三點之正多邊形有解或無解的界限。**

如圖(14)，若移動點落在判斷有無解的區域內，則過此三角形的正 n 邊形有無限多組解；若移動點落在邊界上，則只有一解；落在區域外，則無解。（證明需要對稱多邊形的概念，故置於附錄中）

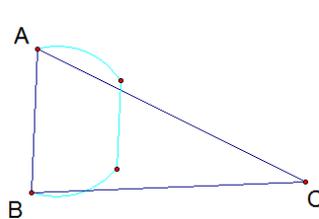


▲圖(13)



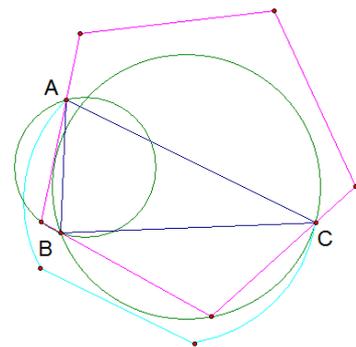
▲圖(14a)

(A點為移動點，只有一解)



▲圖(14b)

(C點為移動點，無解)



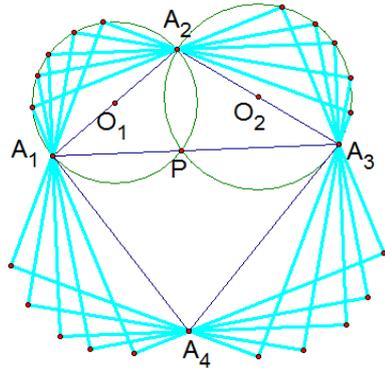
▲圖(14c)

(B點為移動點，無限多解)

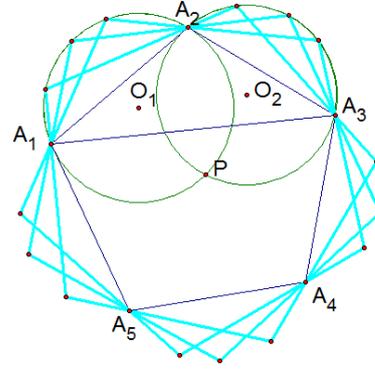
研究四：過已知n點之正n邊形性質探討

(一) 在研究過程中，我們推測由「過已知三點之正三角形」推廣至「過已知n點之正n邊形」時，已知n點的位置可能存在限制。最後發現：

定理4-1：過已知三點之正n邊形若有無限多組解（**定理3**），這些正n邊形除了會通過點 A_1 、 A_2 、 A_3 外，也都會交於點 A_4 、 A_5 、...、 A_n 這 $(n-3)$ 個點。如圖(15)，而將 A_1 、 A_2 、...、 A_n 連成一個n邊形後，在之後我又發現了此n邊形也可由對稱作出，故將其命名為「對稱多邊形」，詳見p.16。



▲圖(15a)



▲圖(15b)

證明：

作過 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 的最大正n邊形 $N_1 N_2 \dots N_n$ 和正n邊形 $N'_1 N'_2 \dots N'_n$ 與 $N_1 N_2 \dots N_n$ 不重合。

如圖(16a)，再將 $\overline{N_1 N_2}$ 平移至 \overline{GH} ，將 $\overline{N'_1 N'_2}$ 平移至 \overline{GI} ，令 $\angle N_1 A_2 N'_1 = \angle N_2 A_2 N'_2 = \theta$

故得 $\angle HGI = \angle N_2 A_2 N'_2 = \theta$

$$\Rightarrow \overline{GI} = \overline{GH} \cos \theta \Rightarrow \overline{N'_1 N'_2} = \overline{N_1 N_2} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \overline{N'_2 N'_3} = \overline{N_2 N_3} \cos \theta \dots \textcircled{1}$$

如圖(16b)，連 $\overline{PN'_2}$ 、 $\overline{PO_2 N_2}$ 、 $\overline{N_1 N'_2}$

在圓 O_2 中， $\because \angle N_2 P N'_2 = \angle N_2 A_2 N'_2 = \theta$ ，

$$\therefore \angle P N'_2 N_2 = \frac{1}{2} \angle P O_2 N_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \text{在} \Delta P N'_2 N_2 \text{中，} \overline{P N'_2} = \overline{P N_2} \cos \theta \dots \textcircled{2}$$

$$\text{由} \textcircled{1} \textcircled{2} \text{可得，} \overline{N'_2 N'_3} : \overline{P N'_2} = \overline{N_2 N_3} : \overline{P N_2} \dots \textcircled{3}$$

$$\text{又在圓} O_2 \text{中，} \angle P N_2 A_3 = \angle P N'_2 A_3 \dots \textcircled{4}$$

由 $\textcircled{3} \textcircled{4}$ ，可得 $\Delta N_2 P N_3 \sim \Delta N'_2 P N'_3$ (SAS相似)

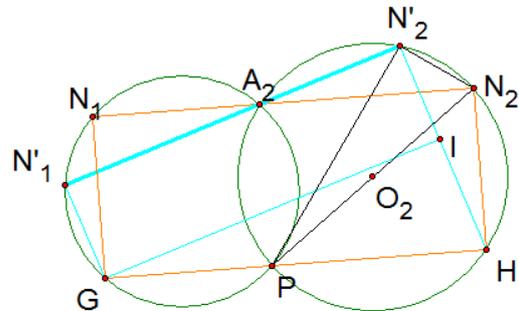
故 $\angle P N_3 A_3 = \angle P N'_3 A_3$

$\Rightarrow P$ 、 N_3 、 N'_3 、 A_3 四點共圓(稱此圓為 O_3)

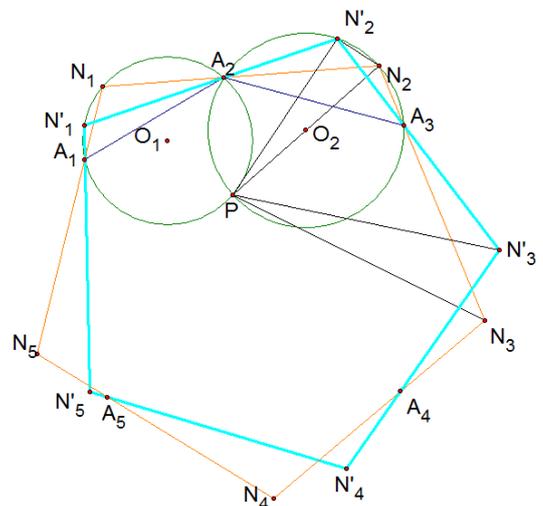
$$\therefore \angle A_3 N_3 N_4 = \angle A_3 N'_3 N'_4 = \frac{\pi(n-2)}{n}$$

$\therefore \overline{N_3 N_4}$ 和 $\overline{N'_3 N'_4}$ 交圓 O_3 於同一點 A_4

以此類推，可得 $\overline{N_i N_{i+1}}$ 和 $\overline{N'_i N'_{i+1}}$ 交圓 O_i 於 A_{i+1} ，故得證。



▲圖(16a)

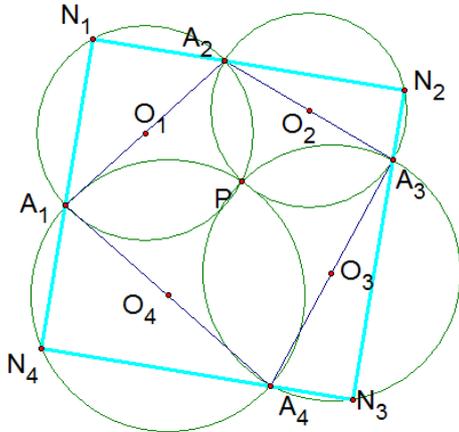


▲圖(16b)

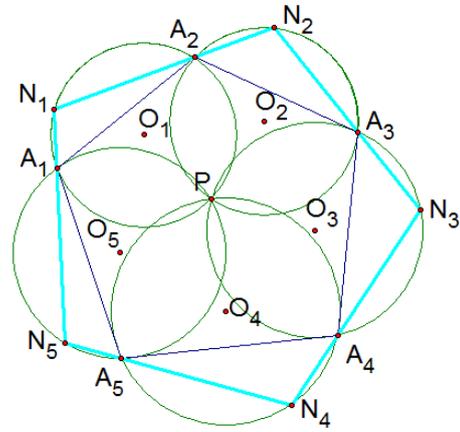
※ 在文獻「你泥中有我，我泥中有你」中將可作出無限多組過 n 點之正 n 邊形的 n 邊形視為特例，而我們發現這種 n 邊形其實只要由三個相鄰頂點就可作出，如定理4-1，有了 A_1 、 A_2 、 A_3 就可作出 A_4 、 A_5 、...、 A_n ，故我們以定理4-1為基礎，繼續後續之研究。

(二) 過 n 點之正 n 邊形的性質：

1. 根據定理1在 $\overline{A_i A_{i+1}}$ 上作出圓 O_i 後，若在圓 O_1 取一點 N_1 ，作 $\overline{N_1 A_1}$ 交圓 O_2 於 A_2 ，再作 $\overline{N_2 A_2}$ 交圓 O_3 於 A_3 以此類推，最後連 $\overline{N_n A_1 N_1}$ 作出 $N_1 N_2 \dots N_n$ 後，則 $N_1 N_2 \dots N_n$ 為正 n 邊形 (定理4-2)，且圓 O_1 、 O_2 、...、 O_n 皆交於一點 P (性質4-1)。



▲圖(17a)



▲圖(17b)

證明：

- (1) 定理4-2：若在圓 O_1 取一點 N_1 ，作 $\overline{N_1 A_1}$ 交圓 O_2 於 A_2 ，再作 $\overline{N_2 A_2}$ 交圓 O_3 於 A_3 以此類推，最後連 $\overline{N_n A_1 N_1}$ 作出 $N_1 N_2 \dots N_n$ 後，則 $N_1 N_2 \dots N_n$ 為正 n 邊形。

- a. 連 $\overline{N_n A_1}$ 、 $\overline{A_1 N_1}$ ，得 $N_1 N_2 \dots N_n A_1$ 為 $(n+1)$ 邊形。

$$\text{可知 } \angle N_1 + \angle N_2 + \dots + \angle N_n + \angle N_1 A_1 N_n = \pi(n-1)$$

$$\text{由 } \underline{\text{定理1}} \text{ 可得 } \angle N_i = \frac{\pi(n-2)}{n}$$

$$\Rightarrow \angle N_1 + \angle N_2 + \dots + \angle N_n = \pi(n-2)$$

$$\Rightarrow \angle N_1 A_1 N_n = \pi$$

$$\Rightarrow N_n, A_1, N_1 \text{ 共線。}$$

- b. $\overline{N_1 N_2} = \overline{N_2 N_3} = \dots = \overline{N_n N_1}$ 。

在定理4-1的證明中，可知過 $A_1 A_2 \dots A_n$ 的最大正 n 邊形 $N'_1 N'_2 \dots N'_n$ 必為一解，故由

$\overline{N'_i N'_{i+1}}$ 、 $\overline{N_i N_{i+1}}$ 以 P 為位似中心即可得證。

(2) **性質4-1**：圓 O_1 、 O_2 、...、 O_n 皆交於一點 P 。

以 $n = 5$ 為例，已知 $\angle A_2N_2A_3 = \angle A_3N_3A_4 = \frac{(n-2)\pi}{n}$ ， $\angle A_1PA_2 = \angle A_2PA_3 = \frac{2\pi}{n}$

作 ΔPA_3N_3 之外接圓 O_3 ，並在圓 O_3 上取一點 A_4 使得

$\angle A_3N_3A_4 = \frac{3\pi}{5}$ ，同理，作 ΔPA_4N_4 之外接圓 O_4 ，再

取 A_5 等；最後連接 $\overline{N_nN_1}$ 。

$$\therefore \angle N_1 = \angle N_2 = \dots = \angle N_{n-1} = \frac{(n-2)\pi}{n}$$

$$\therefore \angle N_5 = (n-2)\pi - (n-1) \times \frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{(n-2)\pi}{n}$$

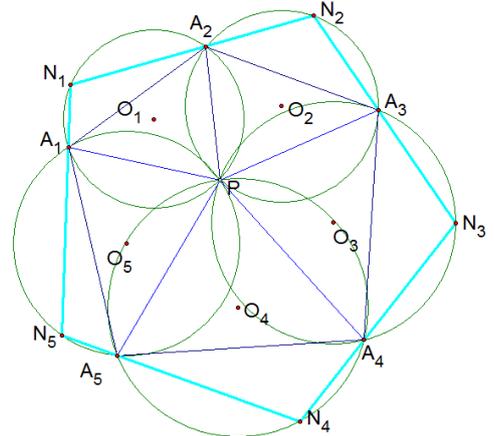
$$\text{又} \because \angle A_1PA_2 = \angle A_2PA_3 = \dots = \angle A_4PA_5 = \frac{2\pi}{n}$$

$$\therefore \angle A_5PA_1 = 2\pi - (n-1) \times \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

$$\text{又} \because \angle N_5 + \angle A_5PA_1 = \frac{(n-2)\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} = \pi$$

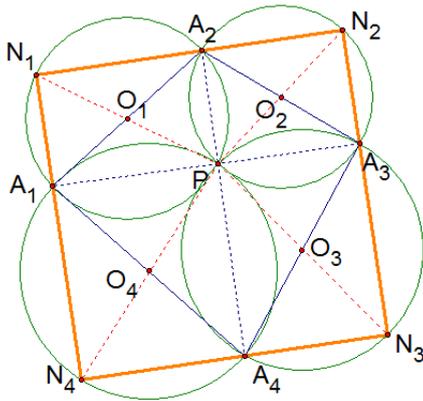
$\therefore P$ 、 A_5 、 N_5 、 A_1 共圓

$\Rightarrow P$ 為圓 O_1 、 O_2 、...、 O_5 之共同交點，得證。

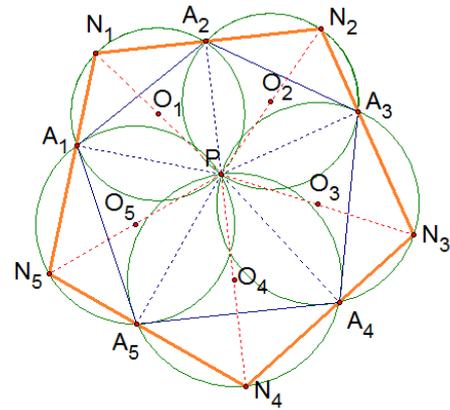


▲圖(18)

2. **性質2-1**、**性質2-2**之延伸：過 $A_1A_2 \dots A_n$ 的最大正 n 邊形也會符合 **P 、 O_i 、 N_i 共線** (**性質4-2**) 以及 **$\overline{PA_i} \perp \overline{N_iN_{i-1}}$** (**性質4-3**)，證法同原性質。



▲圖(19a)



▲圖(19b)

研究五：推廣費馬點和拿破崙定理，並探討對稱多邊形之廣義費馬點、拿破崙多邊形與過已知 n 點之正 n 邊形的關係及其性質

(一) 費馬點的推廣

1. 探討：

在研究二中， $n = 3$ 時圓 D 、 E 的交點 P 實為 ΔABC 的費馬點，最大值和費馬點之間的關係讓我感到相當的驚訝，也因此有了「費馬點說不定可由此推廣」的想法，在發現對稱多邊形後又發現圓 O_1 、 O_2 、...、 O_n 仍交於同一點 P ，於是我們就將費馬點推廣到了對稱多邊形上，更把費馬點在三角形中的性質也一併推廣了。

2. **定理5-1**：若在對稱多邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 各邊上作出圓 O_1 、 O_2 、...、 O_n ，則其共同交點 P 為 $A_1A_2 \dots A_n$ 之費馬點。

如圖(20)，設已存在 $A_1A_2 \dots A_n$ 及圓 O_1 、 O_2 之交點 P ，由

性質4-3可知如分別作過 A_1 、 A_2 、...、 A_n 之

$\overline{PA_1}$ 、 $\overline{PA_2}$ 、...、 $\overline{PA_n}$ 的垂線會形成一正 n 邊形。

在 $N_1N_2 \dots N_n$ 中取任意一點 K 不與 P 重合，設 K 到各邊之距離依次為 h_1 、 h_2 、...、 h_n ，並連接 $\overline{KA_1}$ 、 $\overline{KA_2}$ 、...、 $\overline{KA_n}$ 。

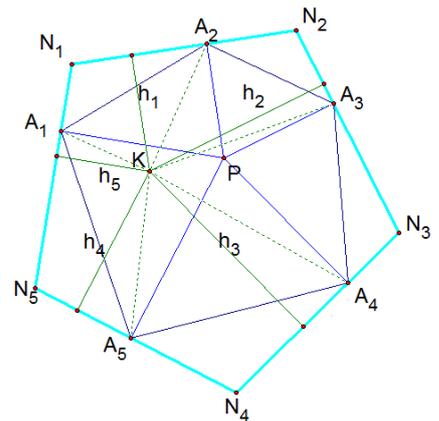
利用勾股定理可知： $\overline{KA_i} > h_i$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \overline{KA_k} > \sum_{k=1}^n h_k \dots \textcircled{1}$$

而由**維維安尼定理**可知 $\sum_{k=1}^n h_k = \sum_{k=1}^n \overline{PA_k} \dots \textcircled{2}$

綜合 $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ 可得 $\sum_{k=1}^n \overline{PA_k} < \sum_{k=1}^n \overline{KA_k}$

得證。



▲圖(20)

3. 費馬點其他的性質之推廣：

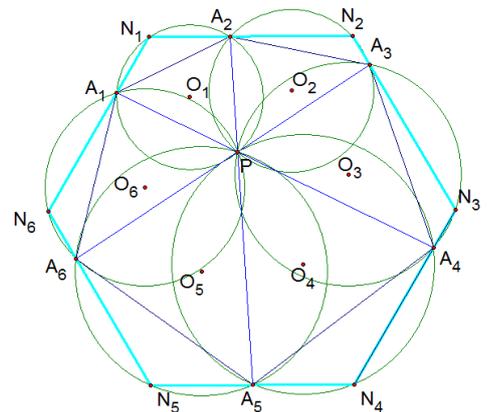
(1) **性質5-1-1**： $\angle A_i P A_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$

證明：

已知 $A_i N_i A_{i+1} P$ 為圓內接四邊形

$$\Rightarrow \angle A_i N_i A_{i+1} + \angle A_{i+1} P A_i = \pi$$

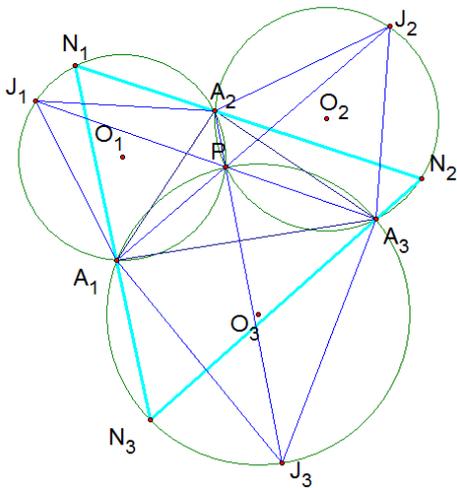
$$\text{得} \angle A_i P A_{i+1} = \pi - \angle A_i N_i A_{i+1} = \frac{2\pi}{n}, \text{得證。}$$



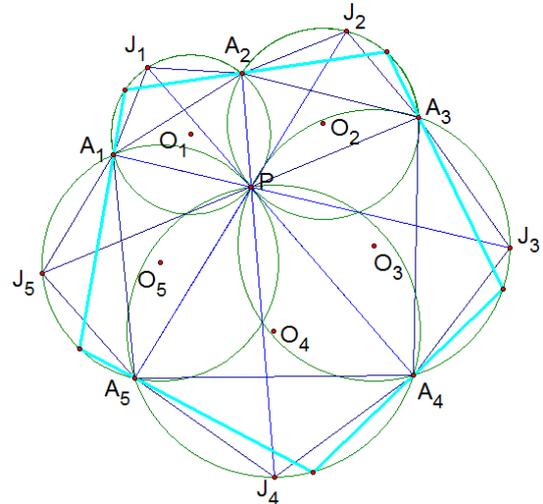
▲圖(21)

(2) **性質5-1-2**：若已知對稱多邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 及其費馬點 P ，則

- a. 假如 $n = 2k + 1$ ，作 $\overline{A_i P}$ 交圓 O_{i+k} 於 J_{i+k} ，則 $\overline{A_1 J_{1+k}} = \overline{A_2 J_{2+k}} = \dots = \overline{A_i J_{i+k}}$ ， $\Delta A_i J_i A_{i+1}$ 為等腰三角形（ $n = 3$ 時， $\Delta A_i J_i A_{i+1}$ 為正三角形）。

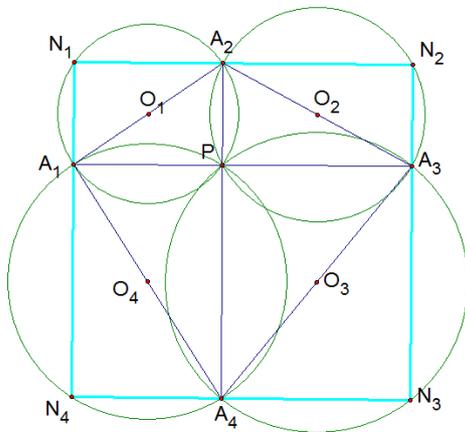


▲圖(22a)

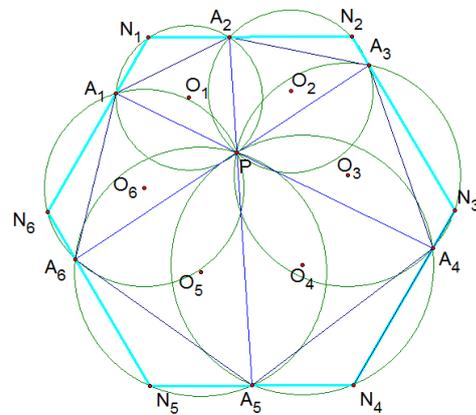


▲圖(22b)

- b. 假如 $n = 2k$ ，則 $\overline{A_1 A_{1+k}} = \overline{A_2 A_{2+k}} = \dots = \overline{A_i A_{i+k}}$ 。



▲圖(23a)



▲圖(23b)

證明：

(a) $n = 2k + 1$

- i. $\angle A_i J_i A_{i+1} = \frac{\pi(n-2)}{n}$ ，且 $\overline{A_i J_i} = \overline{J_i A_{i+1}}$ 。

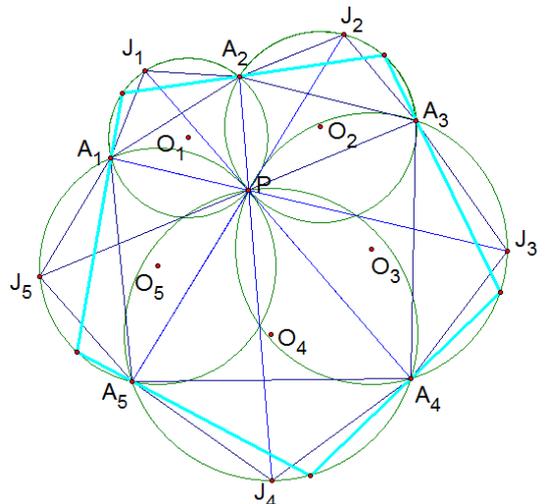
由**性質5-1-1**知 $\angle A_i P A_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$

$$\Rightarrow \angle A_{i+k} P J_{i+k} = \pi - \frac{2\pi}{n} \times k = \pi - \frac{2\pi k}{2k+1} = \frac{\pi}{2k+1} = \frac{\pi}{n}$$

同理， $\angle J_{i+k} P J_{i+k+1} = \frac{\pi}{n} = \angle A_{i+k} P J_{i+k}$

$$\Rightarrow \widehat{A_{i+k} J_{i+k}} = \widehat{A_{i+k+1} J_{i+k}} \Rightarrow \widehat{A_i J_i} = \widehat{A_{i+1} J_i}$$

$\therefore \overline{A_i J_i} = \overline{A_{i+1} J_i}$ ，得證。



▲圖(24)

ii. $\overline{A_1J_{1+k}} = \overline{A_2J_{2+k}} = \dots = \overline{A_iJ_{i+k}}$ 。

此處需要先用對稱多邊形的概念：設已存在一正 n 邊形 $O_1O_2\dots O_n$ ，並有一點 P 在 $O_1O_2\dots O_n$ 內，則 $A_1A_2\dots A_n$ 為 P 點關於 $O_1O_2\dots O_n$ 各邊作對稱所得的圖形。

以 $n = 5$ 為例，令 $\overline{J_1P}$ 中點為 M_1 ， $\overline{O_3O_4}$ 垂直平分 $\overline{PA_4}$ 於 K_1 ， $\overline{O_1H_1} \perp \overline{O_3O_4}$ 於 H_1 。

可得知 $\overline{M_1K_1} = \frac{1}{2}\overline{J_1P}$...①

$\because \overline{J_1P}$ 為圓 O_1 之弦

$\therefore \overline{O_1M_1} \perp \overline{J_1P}$

又 $\because \overline{O_1M_1} \perp \overline{J_1P}$ ， $\overline{PK_1} \perp \overline{O_3O_4}$ ， $\overline{O_1H_1} \perp \overline{O_3O_4}$

$\therefore O_1M_1K_1H_1$ 為長方形

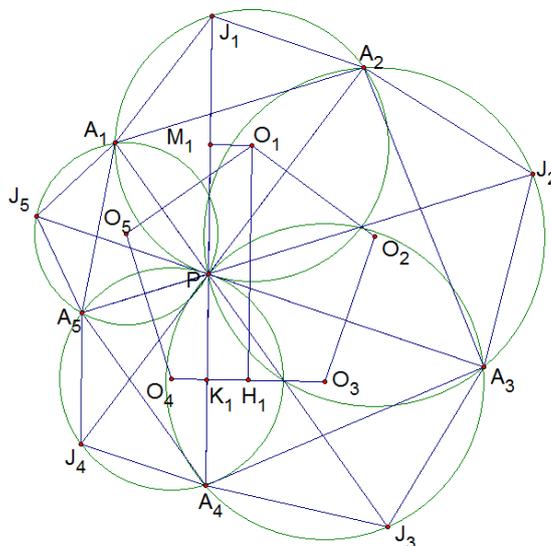
$\Rightarrow \overline{M_1K_1} = \overline{O_1H_1}$...②

由①②，得 $\overline{A_4J_1} = 2\overline{O_1H_1}$

以此類推， $\overline{A_iJ_{i+k}} = 2\overline{O_{i+k}H_{i+k}}$...③

又 $\because \overline{O_1H_1} = \overline{O_2H_2} = \dots = \overline{O_iH_i}$...④

由③④，得 $\overline{A_1J_{1+k}} = \overline{A_2J_{2+k}} = \dots = \overline{A_iJ_{i+k}}$ 。



▲圖(25)

(b) $n = 2k$

i. 作過 $A_1A_2\dots A_n$ 之最大正 n 邊形 $N_1N_2\dots N_n$ ，證明與奇數邊類似，但因為 $\overline{A_iA_{i+k}}$ 垂直 $\overline{N_{i-1}N_i}$ 和 $\overline{N_{i+k-1}N_{i+k}}$ ，且正 n 邊形 $N_1N_2\dots N_n$ 的各對邊距離皆相等，故得證。

(3) 由性質5-1-2可知廣義費馬點的另一種作法：

定理5-1擴充：

a. 假如 $n = 2k + 1$ ，費馬點為 $A_1A_2\dots A_n$ 各邊向外部作頂角為 $\frac{\pi(n-2)}{n}$ 的等腰三角形

$\Delta A_iJ_iA_{i+1}$ 後連 $\overline{A_1J_{1+k}}$ 、 $\overline{A_2J_{2+k}}$ 、...、 $\overline{A_iJ_{i+k}}$ 的交點。

b. 假如 $n = 2k$ ，則為 $\overline{A_1A_{1+k}}$ 、 $\overline{A_2A_{2+k}}$ 、...、 $\overline{A_iA_{i+k}}$ 的交點。

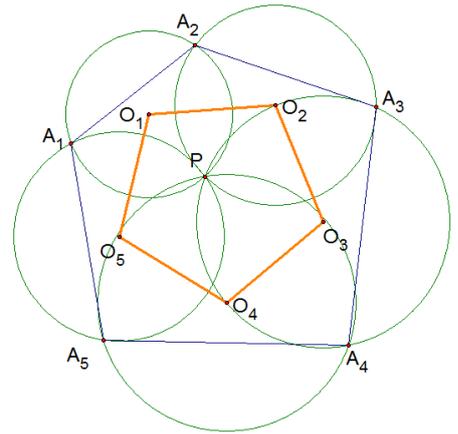
(4) 我們試著將這結論帶入到任意 n 邊形看是否會成立，卻發現圓 O_1 、 O_2 、...、 O_n 不會交於同一點，利用程式也觀察出其費馬點以不在圓的任何交點上，故我們所推出的廣義費馬點只存在於對稱多邊形 $A_1A_2\dots A_n$ 中。

(二) 拿破崙定理之推廣

1. 外拿破崙多邊形

(1) 探討：

由拿破崙定理可知，在作過 $\Delta A_1A_2A_3$ 之正三角形時， $\Delta O_1O_2O_3$ 恰為 $\Delta A_1A_2A_3$ 之外拿破崙三角形，而在發現 $A_1A_2 \dots A_n$ 後，再將 O_1, O_2, \dots, O_n 連成一 n 邊形，如圖(26)，我們發現 $O_1O_2 \dots O_n$ 也是正 n 邊形。意即我們將外拿破崙三角形推廣到了「外拿破崙多邊形」，但作法卻不是原本的「向多邊形外部作正多邊形再作外心」，而是向外部作「頂角為 $\frac{\pi(n-2)}{n}$ 的等腰三角形」的外心。



▲圖(26)

(2) 定理5-2-1：若在 $A_1A_2 \dots A_n$ 各邊向外作頂角為 $\frac{(n-2)\pi}{n}$ 的等腰三角形的外心 O_1, O_2, \dots, O_n ，則 $O_1O_2 \dots O_n$ 為正 n 邊形。

證明：

作過 $A_1A_2 \dots A_n$ 最大正 n 邊形 $N_1N_2 \dots N_n$ ，

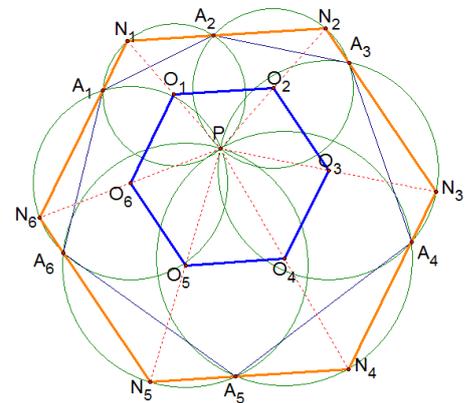
連 $\overline{O_iO_{i+1}}$ ，再由性質4-2連 $\overline{PO_iN_i}$

$$\therefore \overline{PO_i} = \overline{O_iN_i}$$

$$\Rightarrow \overline{O_iO_{i+1}} = \frac{1}{2} \overline{N_iN_{i+1}}, \text{ 且 } \overline{O_iO_{i+1}} // \overline{N_iN_{i+1}}$$

$$\Rightarrow N_1N_2 \dots N_n \sim O_1O_2 \dots O_n$$

$\therefore O_1O_2 \dots O_n$ 為正 n 邊形，得證。



▲圖(27)

(3) 定義：

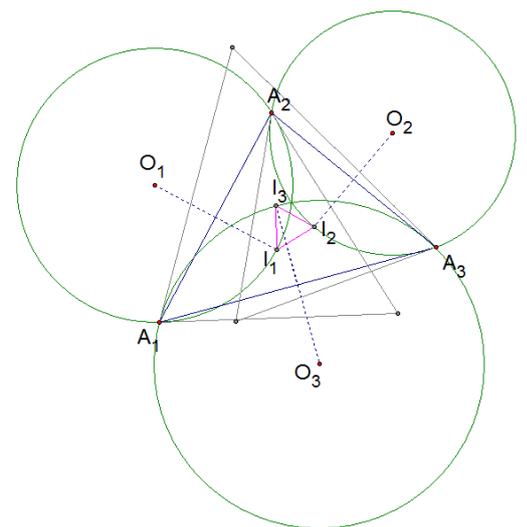
由上述證明和性質4-3中，可得 $\overline{O_{n-1}O_n}$ 為 $\overline{PA_n}$ 之垂直平分線，故可稱 $A_1A_2 \dots A_n$ 為P點關於正 n 邊形 $O_1O_2 \dots O_n$ 之各邊對稱後連線的多邊形，並將其命名為對稱多邊形，且之後均由對稱考慮 $A_1A_2 \dots A_n$ 。

(4) 在發現此定理後，我們試著尋找是否任意 n 邊形都存在外拿破崙 n 邊形，卻仍然發現此篇所推出的外拿破崙多邊形只存在於對稱多邊形中。

2. 內拿破崙多邊形

(1) 探討：

既然已經證明外拿破崙多邊形，我們也就開始尋找內拿破崙多邊形的存在性。我們發現：內拿破崙多邊形的各頂點 I_i 為向 $A_1A_2 \dots A_n$ 的各邊內側作正 n 邊形之外心，而其外心也恰分別為各邊 A_iA_{i+1} 向內側作中垂線與圓 O_i 的交點，如圖(28)。故可得知：內外拿破崙多邊形只有在 $n = 3$ 時才具有共通性，都是在邊上作正三角形，但在本質上作法完全不同。



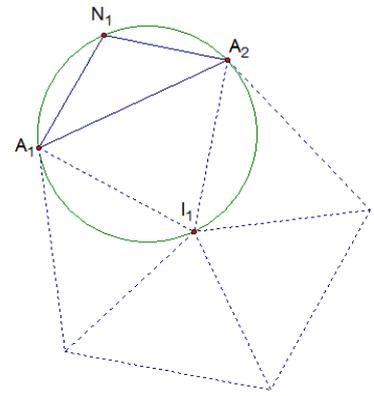
▲圖(28)

證明： I_i 在圓 O_i 上

如圖(29)，已知 $\angle A_1 N_1 A_2 = \frac{\pi(n-2)}{n}$ ，且 $\angle A_1 I_1 A_2 = \frac{2\pi}{n}$

$$\therefore \angle A_1 N_1 A_2 + \angle A_1 I_1 A_2 = \frac{2\pi + (n-2)\pi}{n} = 2\pi$$

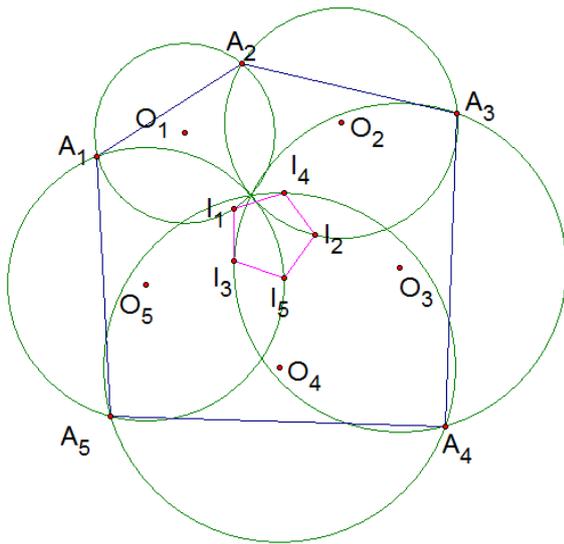
$\therefore A_1, N_1, A_2, I_1$ 共圓，得證。



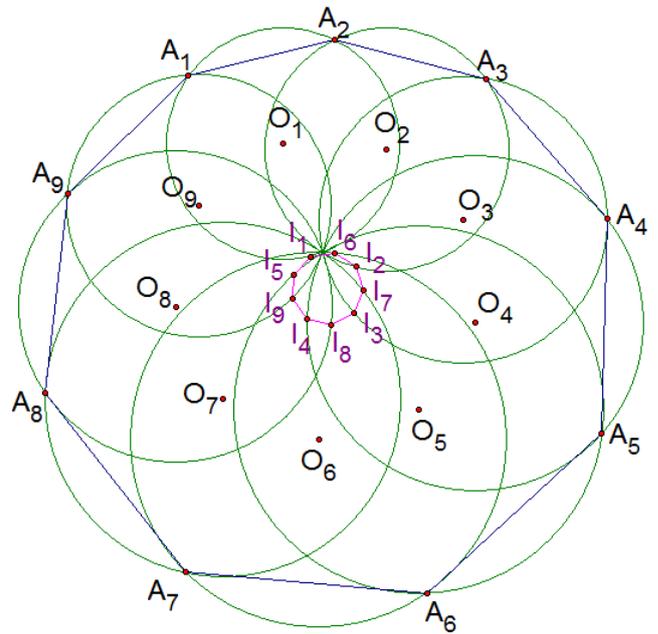
▲圖(29)

(2) **定理5-2-2**：若 I_i 為 $\overline{A_i A_{i+1}}$ 向內側作正 n 邊形之外心，則

a. 假如 $n = 2k + 1$ ，則如圖(30)， $I_1 I_2 \dots I_n$ 為正 n 邊形。

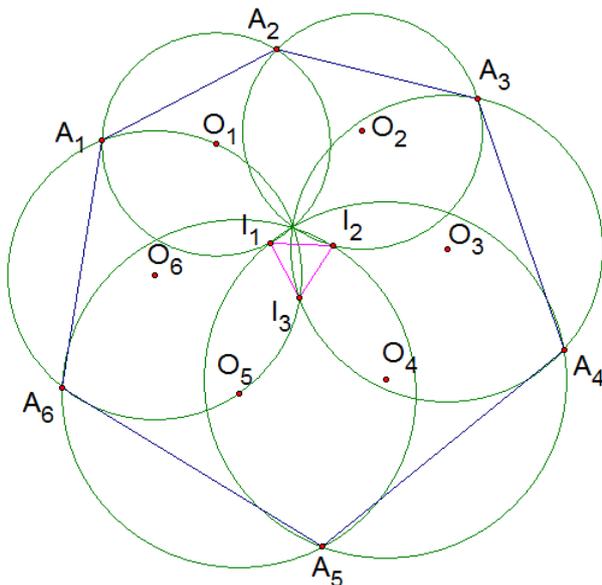


▲圖(30a)

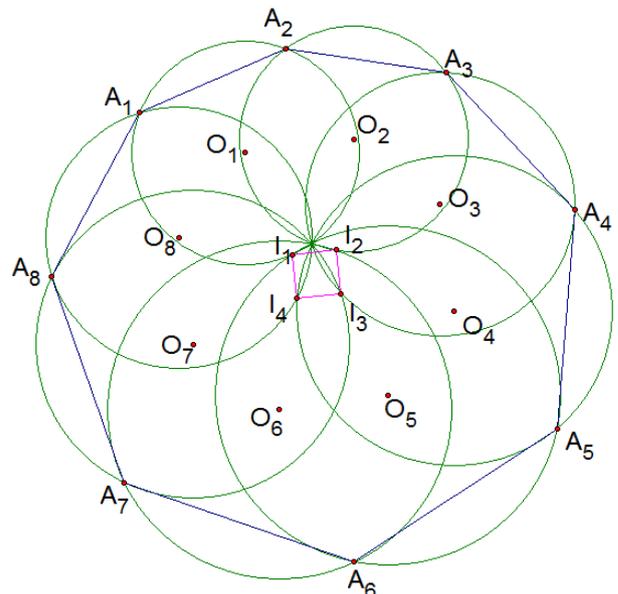


▲圖(30b)

b. 假如 $n = 2k$ ，則如圖(31)，因為 $I_1 = I_{1+k}, I_2 = I_{2+k}, \dots, I_k = I_n$ ，故 $I_1 I_2 \dots I_k$ 為正 k 邊形(其中， $n = 4$ 時，則只存在 $I_1 I_2$ ，無法形成正多邊形)。



▲圖(31a)



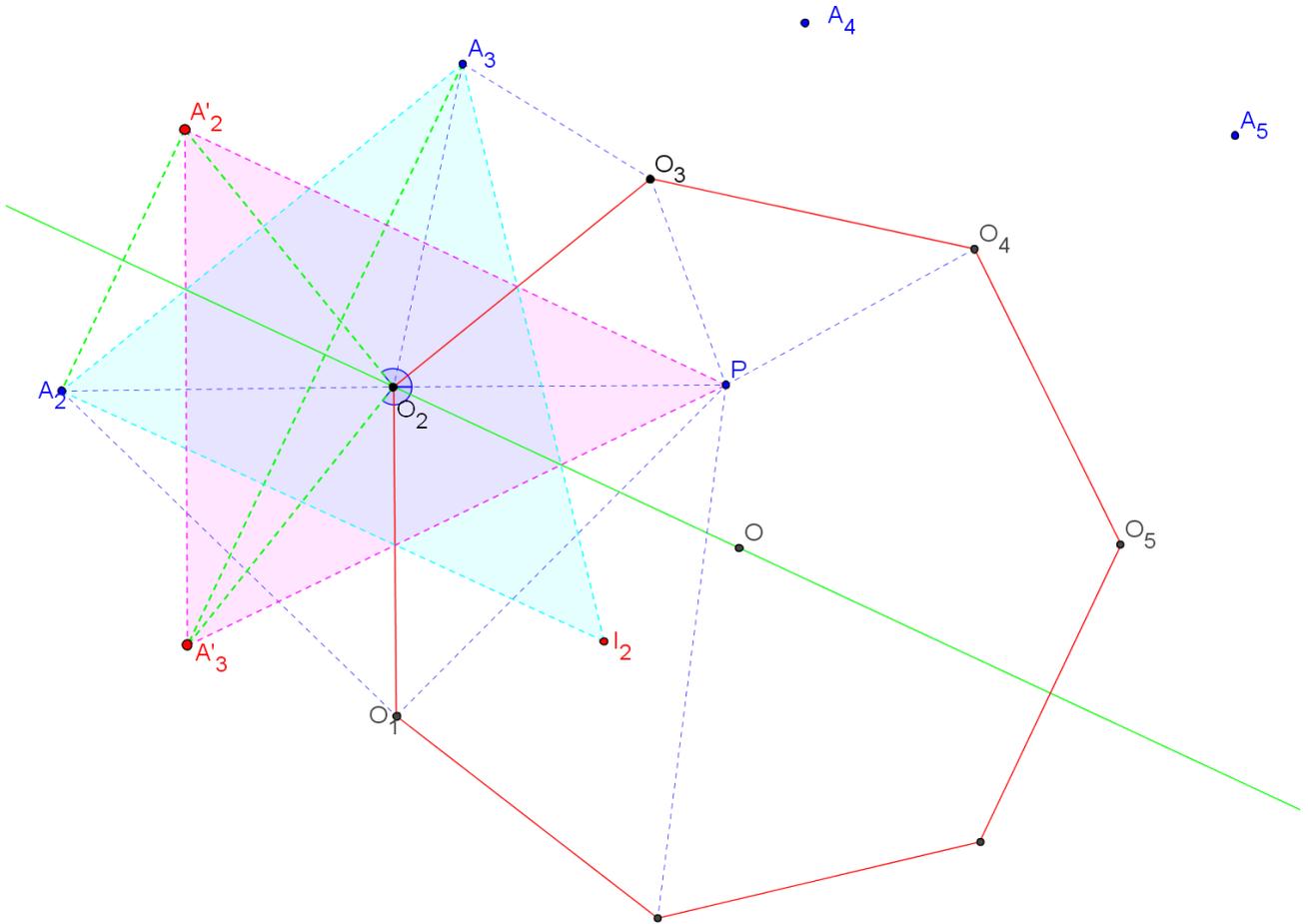
▲圖(31b)

證明：

在證明 $I_1、I_2、\dots、I_n$ 形成正 n 邊形前，首先先證明下面這個性質：

性質 5-2-1：設 O 為外拿破崙 n 邊形的中心，將 A_i 視為 P 關於 $\overline{O_{i-1}O_i}$ 的對稱點(其中 $O_n = O_0$)，

I_2 為 $\overline{A_2A_3}$ 向內作正 n 邊形的中心，則 I_i 和 P 關於直線 $\overline{OO_i}$ 對稱。



▲圖(32)

設 $A_2、A_3$ 關於 $\overline{OO_2}$ 的對稱點分別為 $A'_2、A'_3$ ，則只需證 P 為 $\overline{A'_2A'_3}$ 向內作正 n 邊形的中心，首

先由 $\overline{O_2P} = \overline{O_2A_2} = \overline{O_2A_3} = \overline{O_2A'_2} = \overline{O_2A'_3}$ 可知 O_2 為 $\Delta PA'_2A'_3$ 的外心，又

$$\begin{aligned} \angle PO_2A'_3 &= 2\pi - \angle A'_3O_2A_3 - \angle A_3O_2P = 2\pi - 2(\pi - \angle OO_2A_3) - 2\angle A_3O_2O_3 \\ &= 2(\angle OO_2A_3 - \angle A_3O_2O_3) = 2\angle OO_2O_3 = \pi - \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

同理可證得 $\angle PO_2A'_2 = \pi - \frac{2\pi}{n}$ ，故 $\angle A'_3PA'_2 = \frac{2\pi}{n}$ 且 $\overline{PA'_2} = \overline{PA'_3}$ ，於是得證 I_2 和 P 關於直線

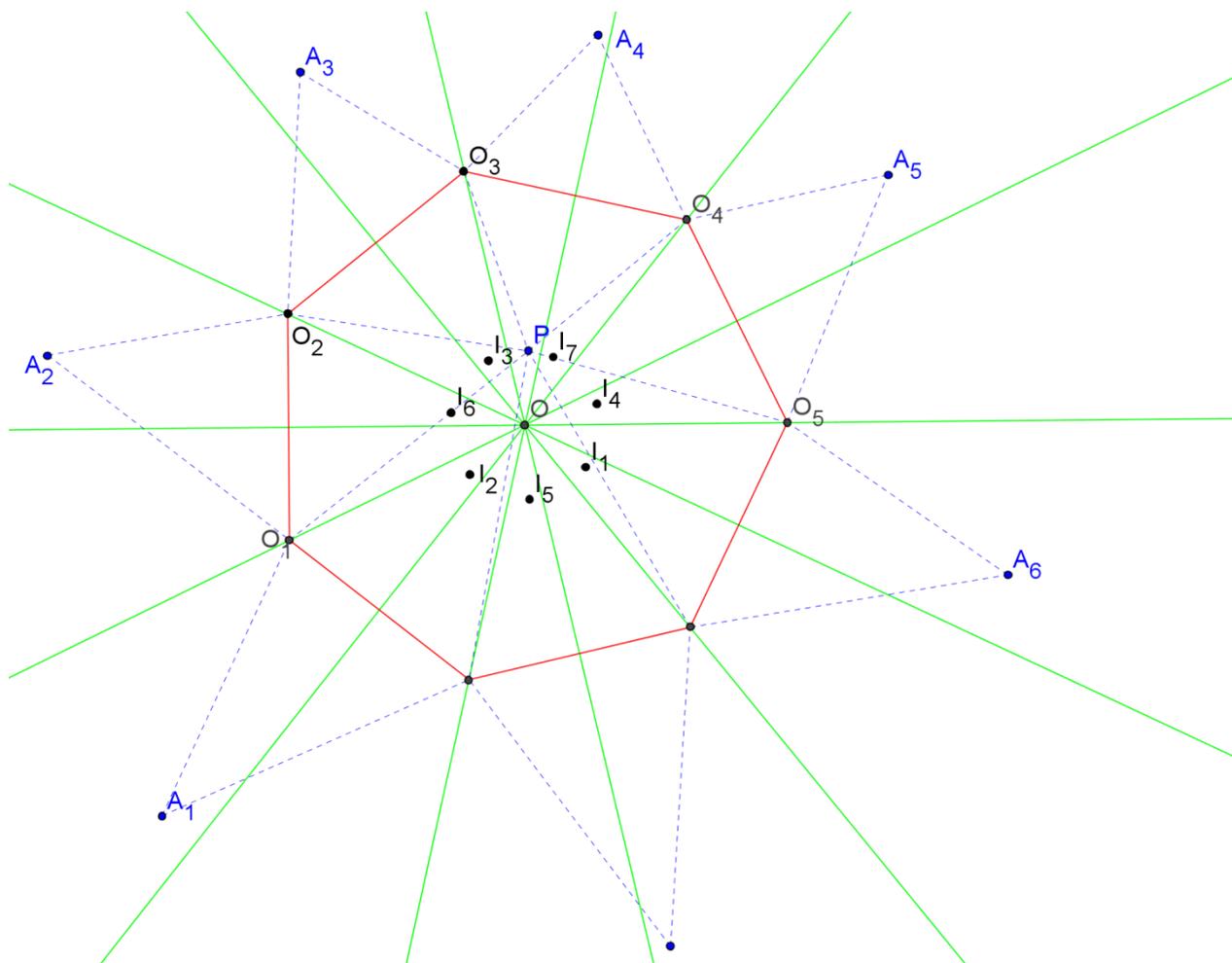
$\overline{OO_2}$ 對稱，以此類推。

現在回到原題，由上性質可推得 $\overline{OP} = \overline{OI_1} = \overline{OI_2} = \dots = \overline{OI_n}$ ，且

$$\angle I_1 O I_2 = \angle I_1 O P - \angle I_2 O P = 2\angle P O O_1 - 2\angle P O O_2 = 2\angle O_1 O O_2 = \frac{4\pi}{n}$$
，同理可得

$$\angle I_2 O I_3 = \angle I_3 O I_4 = \dots = \angle I_n O I_1 = \frac{4\pi}{n}$$
，所以多邊形 $I_1 I_2 \dots I_n$ 形成正 n 邊形得證。

(註：當 n 為偶數時，由 $\overrightarrow{OO_i} = \overrightarrow{O_i O_{i+\frac{n}{2}}}$ 可知 I_i 和 $I_{i+\frac{n}{2}}$ 重合，故此時期此圖形為正 $\frac{n}{2}$ 邊形。)



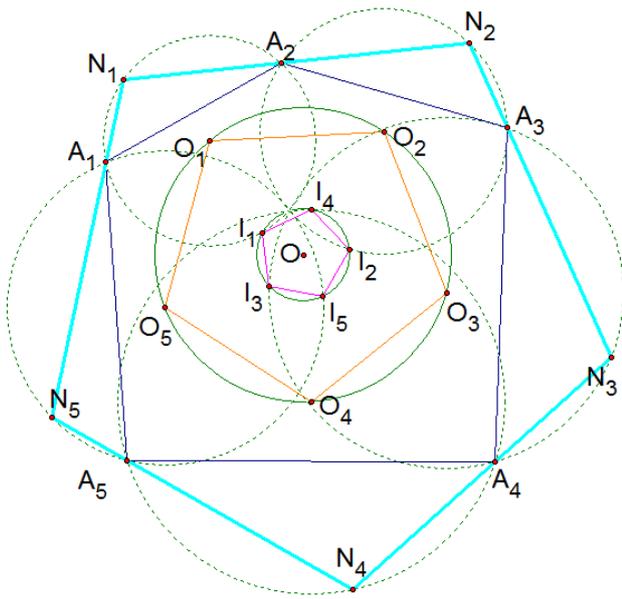
▲圖(32)

(3) 討論：

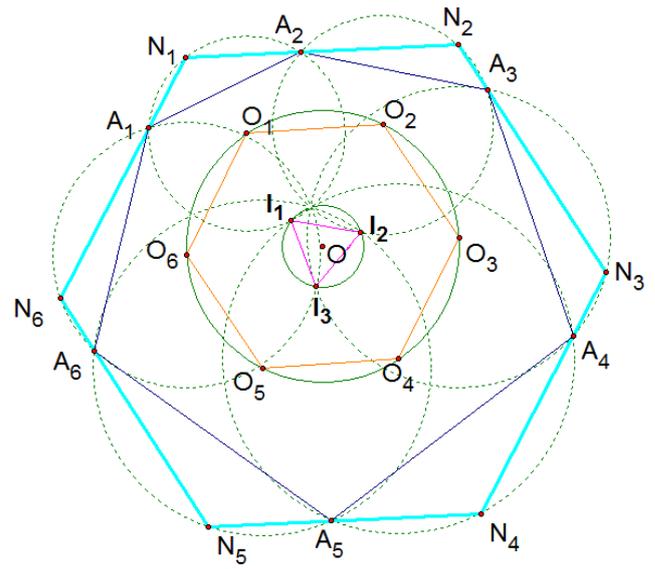
為了方便分辨(譬如只講內拿破崙三角形會不知道原本 $A_1 A_2 \dots A_n$ 之邊數到底是3還是6)，故我們再將內拿破崙多邊形細分為**奇內拿破崙多邊形**和**偶內拿破崙多邊形**(舉前例，如果 $n = 3$ ，則稱之為奇內拿破崙三角形；反之，如果 $n = 6$ ，則稱之為偶內拿破崙三角形)。

(4) 而在找到以上這些性質後，我們試著尋找是否任意 n 邊形都存在內拿破崙多邊形，然後發現此篇所推出的內拿破崙多邊形只存在於對稱多邊形 $A_1 A_2 \dots A_n$ 中。

3. 性質5-2-2： $A_1A_2 \dots A_n$ 之內、外拿破崙多邊形有共同外心 O 。



▲圖(33a)



▲圖(33b)

證明：

由內拿破崙多邊形的證明中可知 $\overline{OI_1} = \overline{OI_2} = \dots = \overline{OI_n}$ ，
即得 O 為 $I_1I_2 \dots I_n$ 之中心。

(三) 過 n 點之正 n 邊形、廣義費馬點、拿破崙多邊形之綜合性質

1. 性質5-3-1：對稱多邊形與其拿破崙多邊形有共同重心。

證明：

利用複數解析，以 $O_1O_2\dots O_n$ 的中心 O 為原點， O_1 的座標為 1，記 $\omega = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ ，

則可知 $O_k = \omega^{k-1}$ ， $k = 1, 2, \dots, n$ 。我們先導出 P 關於任意兩點 A, B 的對稱點的座標公式。

設 P, A, B 的複數座標分別為 p, a, b ，設 P 到 \overline{AB} 的垂足座標為 z ，則 z 滿足：

$$\begin{cases} \frac{z-a}{a-b} \in \mathbb{R} \\ \operatorname{Re}\left(\frac{p-z}{a-b}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{z-a}{a-b} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{a}-\bar{b}} \\ \frac{p-z}{a-b} = \frac{-\bar{p}+\bar{z}}{\bar{a}-\bar{b}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\bar{b}-\bar{a})z + a(\bar{a}-\bar{b}) = (b-a)\bar{z} + \bar{a}(a-b) \\ (\bar{b}-\bar{a})z + p(\bar{a}-\bar{b}) = (a-b)\bar{z} - \bar{p}(a-b) \end{cases}$$

將兩式相加，得 $2(\bar{b}-\bar{a})z = \bar{p}(b-a) + p(\bar{b}-\bar{a}) + (a\bar{b}-\bar{a}b)$

$$\Rightarrow z = \frac{b-a}{2(\bar{b}-\bar{a})} \bar{p} + \frac{1}{2} p + \frac{a\bar{b}-\bar{a}b}{2(\bar{b}-\bar{a})}$$

，所以對稱點的座標為

$$2z - p = \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} \bar{p} + \frac{a\bar{b}-\bar{a}b}{\bar{b}-\bar{a}}$$

回到原題，所以可知 P 關於 $\overline{O_kO_{k+1}}$ 的對稱點為 $\frac{\omega^k - \omega^{k-1}}{\omega^k - \omega^{k-1}} p + \frac{\omega^{k-1}\bar{\omega}^k - \bar{\omega}^{k-1}\omega^k}{\omega^k - \omega^{k-1}}$

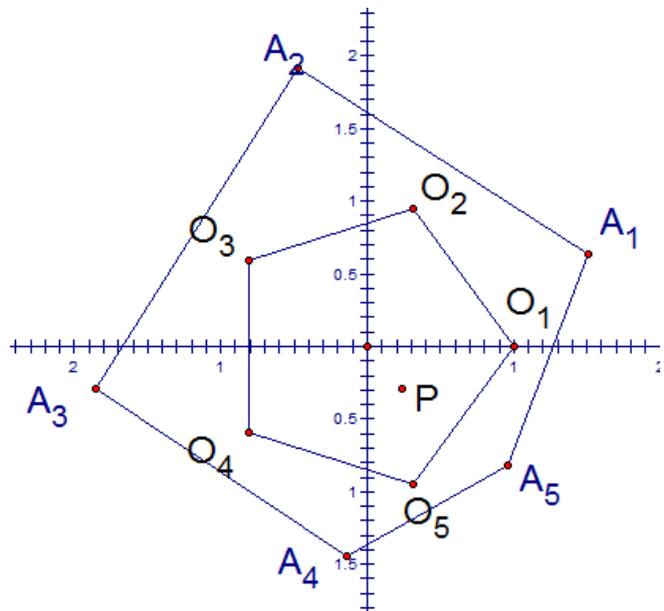
$$= \frac{\omega^k - \omega^{k-1}}{\omega^{1-k} - \omega^{2-k}} p + \frac{\omega^{k-1}\omega^{1-k} - \omega^{2-k}\omega^k}{\omega^{1-k} - \omega^{2-k}} = \omega^{2k-1} p + \frac{1-\omega^2}{\omega^{1-k} - \omega^{2-k}} = \omega^{2k-1} p + \frac{\omega^{k-1} - \omega^{k+1}}{1-\omega}$$

所以 n 個對稱點的重心座標為

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\omega^{2k-1} p + \frac{\omega^{k-1} - \omega^{k+1}}{1-\omega} \right) = \frac{1}{n} \left(p \sum_{k=1}^n \omega^{2k-1} + \frac{1}{1-\omega} \left(\sum_{k=1}^n \omega^{k-1} - \sum_{k=1}^n \omega^{k+1} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(p \frac{\omega(1-\omega^n)}{1-\omega^2} + \frac{1}{1-\omega} (0-0) \right) = 0$$

得證。

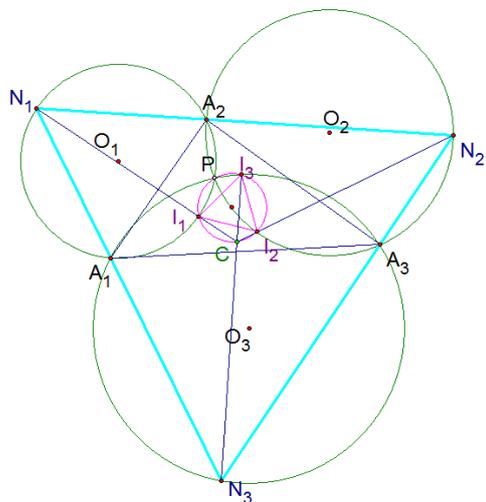


▲圖(34)

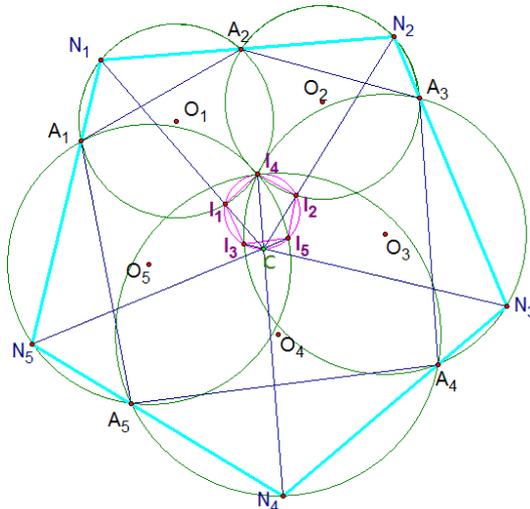
2. 過 $A_1A_2 \dots A_n$ 之正 n 邊形在旋轉時，其外心軌跡為一弧，而其弧恰為 $A_1A_2 \dots A_n$ 之內拿破崙多邊形的外接圓之部分集合，故可得下面這個性質。

性質5-3-2：若已知過 $A_1A_2 \dots A_n$ 之正 n 邊形的各頂點 N_i 、外心 C ，和 $A_1A_2 \dots A_n$ 之內拿破崙多邊形 $I_1I_2 \dots I_n$ ，則下列敘述成立：

(1) 假如 $n = 2k + 1$ ，則 N_i 、 C 、 I_i 共線，且 C 在 $I_1I_2 \dots I_n$ 之外接圓上。

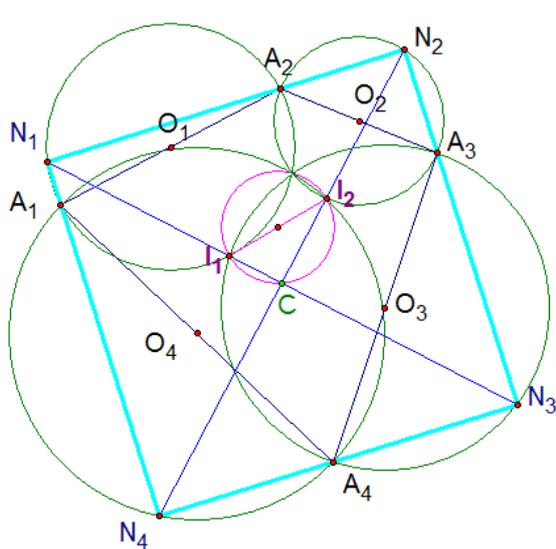


▲圖(35a)

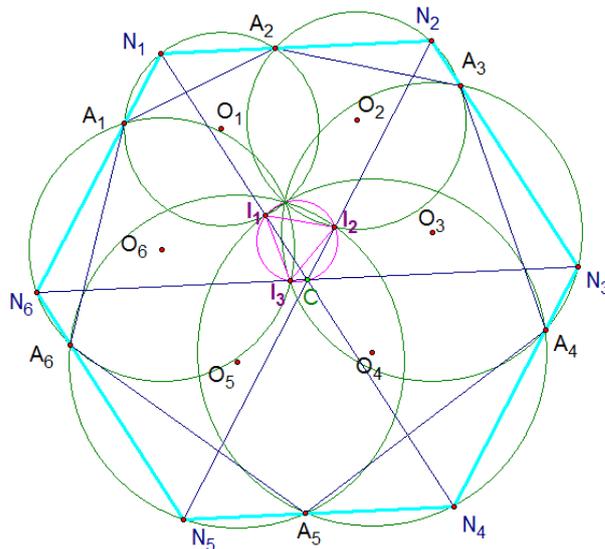


▲圖(35b)

(2) 假如 $n = 2k$ ，則 N_i 、 C 、 I_i 、 N_{i+k} 共線，且 C 在 $I_1I_2 \dots I_k$ 之外接圓上。



▲圖(36a)



▲圖(36b)

證明：

(1). N_i 、 C 、 I_i 共線。

$$\because \widehat{A_i I_i} = \widehat{I_i A_{i+1}}$$

$$\therefore \angle A_i N_i I_i = \angle A_{i+1} N_i I_i \Rightarrow \overline{N_i I_i} \text{ 為 } \angle A_i N_i A_{i+1} \text{ 之角平分線}$$

$\Rightarrow C$ 在 $\overline{N_i I_i}$ 上，得證。

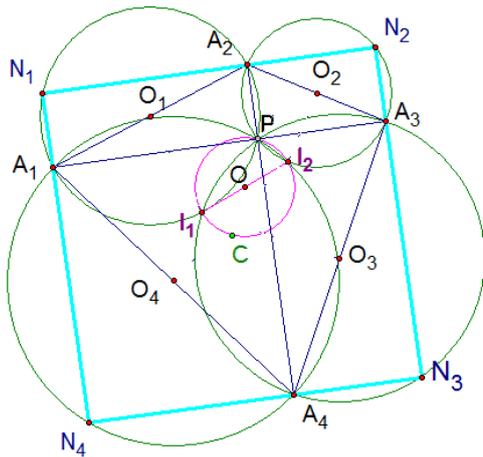
(2). C 在 $I_1 I_2 \dots I_{n(k)}$ 之外接圓上。

$$\text{已知 } \angle N_1 C N_2 = \frac{2\pi}{n}, \text{ 且 } C \text{ 在 } \overline{N_i I_i} \text{ 上 } \Rightarrow \angle I_1 C I_2 = \angle N_1 C N_2 = \frac{2\pi}{n}$$

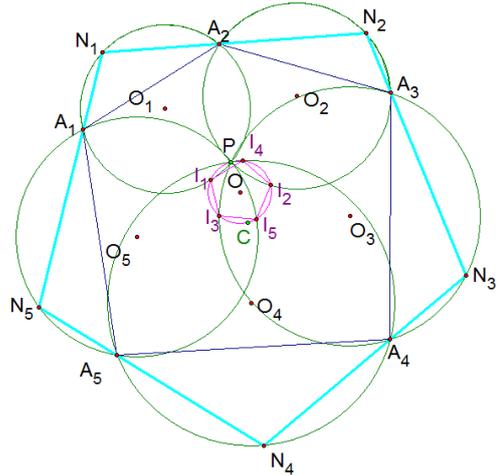
$$\text{又 } \because \widehat{I_1 I_2} = \frac{4\pi}{n} = 2\angle I_1 C I_2$$

$\therefore C$ 在 $I_1 I_2 \dots I_{n(k)}$ 的外接圓上，得證。

3. **性質5-3-3**：過 $A_1A_2 \dots A_n$ 正 n 邊形之外心 C 、費馬點 P 、內拿破崙多邊形落在同一圓 O 上
($n = 4$ 時， $\overline{I_1I_2}$ 為直徑)。



▲圖(37a)



▲圖(37b)

證明：

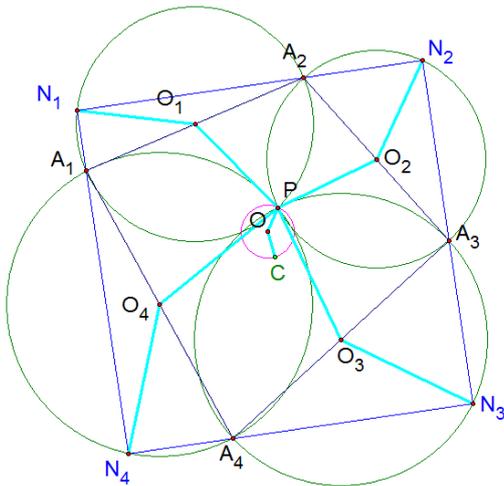
- (1) 費馬點 P 在圓 O 上：

由內拿破崙多邊形的證明可得 $\overline{OP} = \overline{OI_1} = \overline{OI_2} = \dots = \overline{OI_n}$ ，得證。

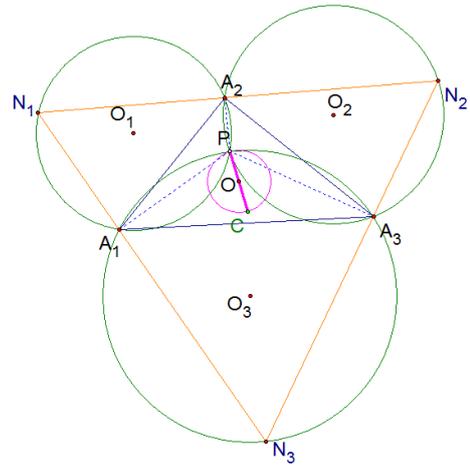
- (2) $N_1N_2 \dots N_n$ 之外心 C 在圓 O 上：

性質5-3-2中已證明。

4. **性質5-3-4**： $\angle POC = \angle PO_iN_i$ ；其中，若連 $A_1A_2 \dots A_n$ 之最大正 n 邊形之外心 C 與其費馬點 P 得 \overline{CP} ，則 \overline{CP} 恰為圓 O 之直徑。



▲圖(38a)



▲圖(38b)

證明：

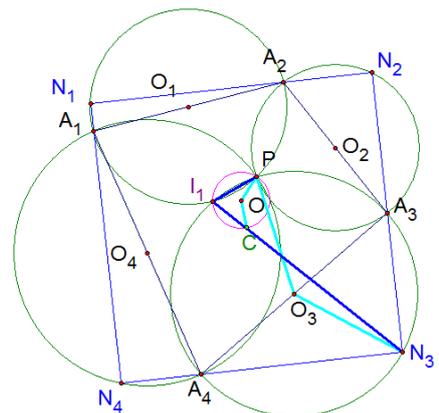
如圖(39)，以正方形， $\angle PO_3N_3$ 為例，連 $\overline{PI_1}$ 、 $\overline{I_1CN_3}$

在圓 O 中， $\angle POC = 2\angle PI_1C$

在圓 O_1 中， $\angle PO_3N_3 = 2\angle PI_1N_3$

故得 $\angle POC = \angle PO_3N_3$

以此類推，得證。



▲圖(39)

5. **性質5-3-5**：過 $A_1A_2 \dots A_n$ 之正 n 邊形 $N_1N_2 \dots N_n$ 的外心 C 在內拿破崙多邊形之外接圓 O 上（**性質5-3-3**）移動時有限制；而其外心 C 可移動的這段弧命名為「有效區」。

討論：

在**研究二**所說的就是看過 $A_1A_2 \dots A_n$ 之最大正 n 邊形之外心 C （**性質5-3-4**）是否落在有效區上，如圖(40)。

作法：

- (1) 如圖(41)，比較 $\angle A_1O_1P$ 、 $\angle A_2O_2P$ 、 \dots 、 $\angle A_nO_nP$ 的大小。
- (2) 角度最大者連 $\overrightarrow{A_iI_i}$ 取其與圓 O 的交點。
- (3) 角度最小者連 $\overrightarrow{A_{i+1}I_i}$ 取其與圓 O 的交點即可得所求之端點範圍（圖中紅色）。

證明：

- (1) 由**性質5-3-4**可知 $\angle POC = \angle PO_1N_1 = \angle PO_2N_2 = \dots = \angle PO_nN_n$ 。

如圖(41)， $\because \angle A_2O_2P$ 為最大。

$$\therefore \angle N_2O_2A_2 = \angle PO_2N_2 - \angle A_2O_2P$$

$$\Rightarrow \angle N_2O_2A_2 \text{ 為最小。}$$

$\Rightarrow N_i$ 往 A_i 旋轉時 N_2 會最先與 A_2 重合。

\Rightarrow 此時外心移動時的其中一端點即為

$\overrightarrow{N_2I_2} = \overrightarrow{A_2I_2}$ 與圓 O 的交點。

$$\because \angle A_iO_iA_{i+1} = \pi - \frac{1}{2}\angle A_iN_iA_{i+1} = \text{定值。}$$

$$\therefore 2\pi - \angle A_iO_iA_{i+1} = \text{定值。}$$

又 $\because \angle A_4O_4P$ 為最小。

$$\therefore \angle A_5O_4P = (2\pi - \angle A_4O_4A_5) - \angle A_4O_4P$$

$$\Rightarrow \angle A_5O_4P \text{ 為最大。}$$

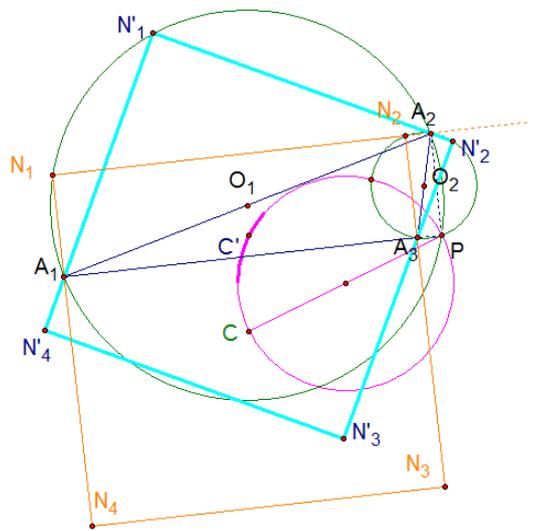
$$\therefore \angle N_4O_4A_5 = \angle PO_4N_4 - \angle A_5O_4P$$

$$\Rightarrow \angle N_4O_4A_5 \text{ 為最小。}$$

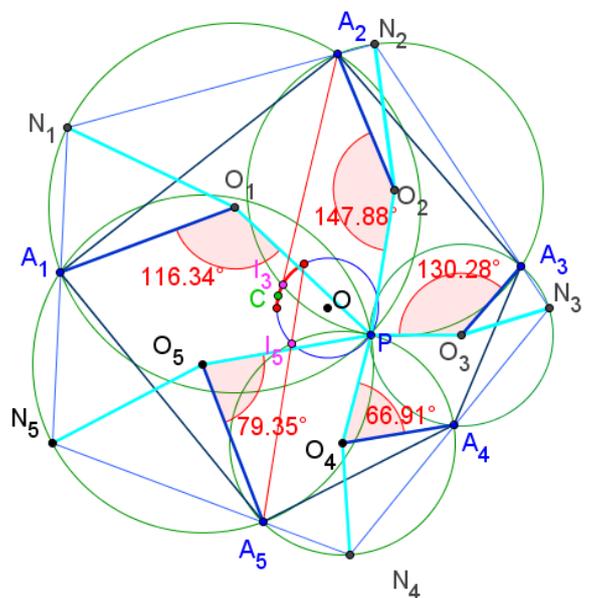
$\Rightarrow N_i$ 往 A_{i+1} 旋轉時 N_4 會最先與 A_5 重合。

\Rightarrow 此時外心移動時的另一端點即為 $\overrightarrow{N_4I_4} = \overrightarrow{A_5I_4}$ 與圓 O 的交點。

故得證。



▲圖(40)



▲圖(41)

研究六：利用廣義費馬點和拿破崙多邊形的性質，簡化作過 n 點之正 n 邊形的方法

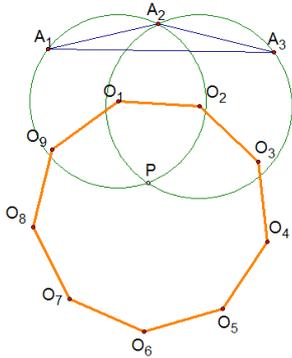
已知 $\Delta A_1A_2A_3$ 、圓 O_1 、圓 O_2 ，求作 $A_1A_2 \dots A_n$ 及過 $A_1A_2 \dots A_n$ 之正 n 邊形、費馬點、內外拿破崙多邊形時，若將 $A_1A_2 \dots A_n$ 及過其之正 n 邊形、費馬點、內、外拿破崙多邊形依序作出，步驟將相當繁雜，因此，我們將**研究三、四、五**的成果作了小應用，得到以下較簡潔的作法。

1. 如圖(42a)，以 $\overline{O_1O_2}$ 為邊，作出正 n 邊形 $O_1O_2 \dots O_n$ 。(定理5-2-1)
2. 以 $\overline{O_iP}$ 為半徑， O_i 為圓心作圓，則圓 O_i 與圓 O_{i+1} 交於 A_{i+1} ，可得 $A_1A_2 \dots A_n$ 。(性質4-1)
3. 作 $O_1O_2 \dots O_n$ 之外心 O ，並以 O 為圓心， \overline{OP} 為半徑作圓交圓 O_i 於 I_i 。(性質5-2-2、性質5-4-3)
4. 將 $I_1、I_2、\dots、I_n$ 連接後即得 $A_1A_2 \dots A_n$ 之內拿破崙多邊形。(定理5-2-2)
5. 在圓 O 上找出有效區後，在有效區內任取一點 C ，連 $\overline{CI_i}$ 交圓 O_i 於 N_i ，連 $\overline{N_iN_{i+1}}$ 即得過 $A_1A_2 \dots A_n$ 正 n 邊形 $N_1N_2 \dots N_n$ 。(性質5-4-5、性質5-4-2)

※ 由上述可知作圖的順序是： $\Delta A_1A_2A_3 \rightarrow A_1A_2 \dots A_n$ 之費馬點 \rightarrow 外拿破崙多邊形 $\rightarrow A_1A_2 \dots A_n$ 之內拿破崙多邊形 \rightarrow 過 $A_1A_2 \dots A_n$ 之正 n 邊形；與原先應有的順序大不相同，其原因就是我們將某些性質取「逆命題」的形式，才能先作出，而某些步驟可視需要性省略。

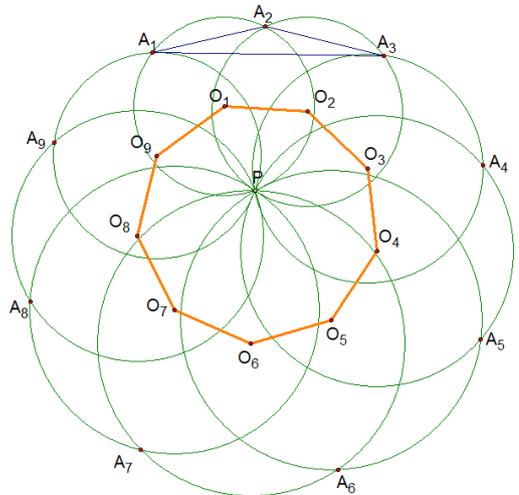
(1) $n = 2k + 1$ ：

1.



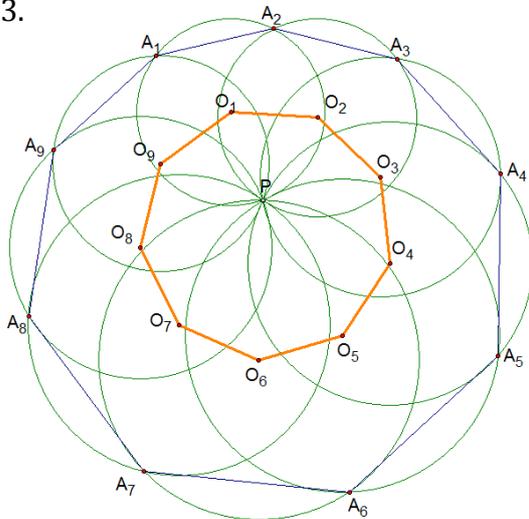
▲圖(42a)

2.



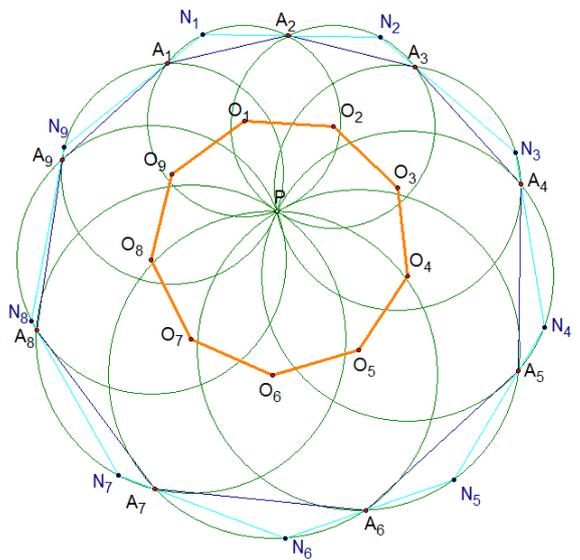
▲圖(42b)

3.

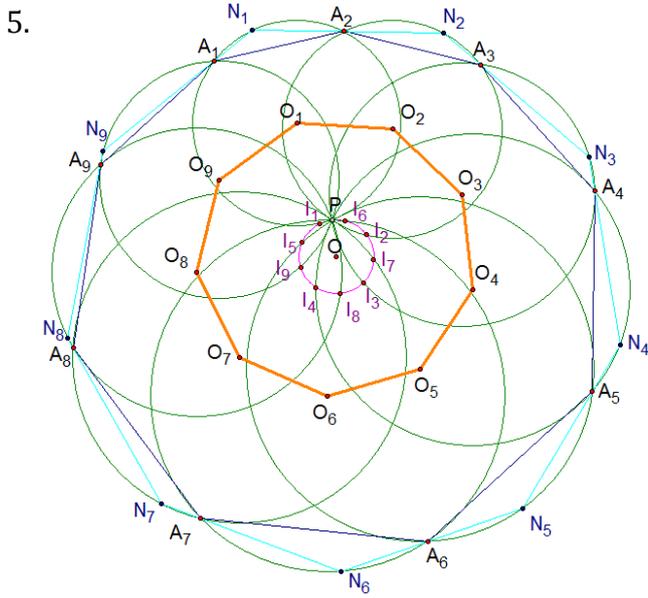


▲圖(42c)

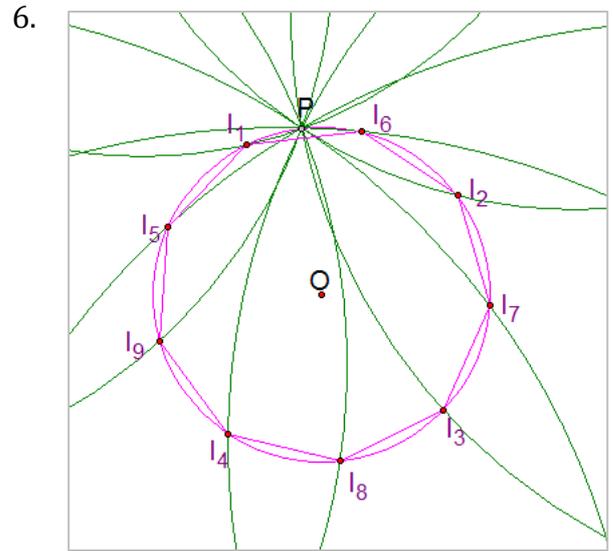
4.



▲圖(42d)

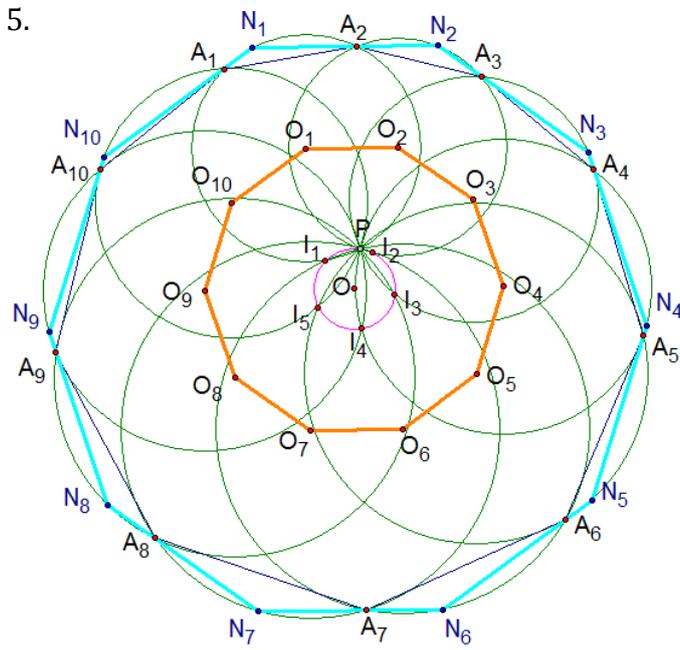


▲圖(42e)

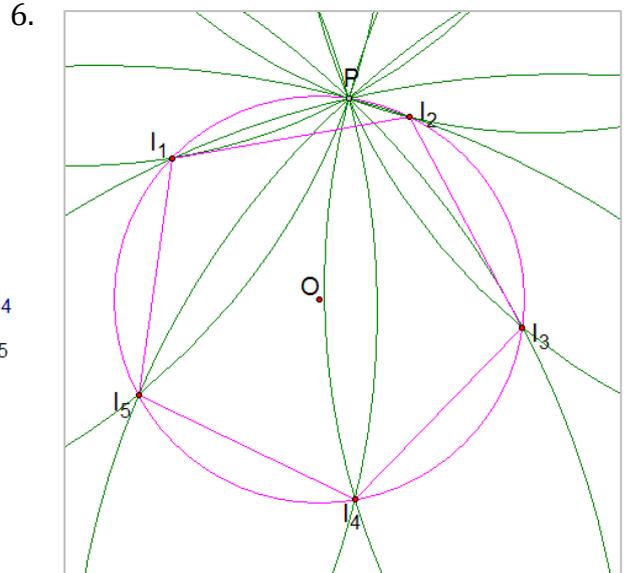


▲圖(42f)

(2) $n = 2k$ (因為只有第5、6步驟不同，故省略前面步驟之圖)：



▲圖(42g)

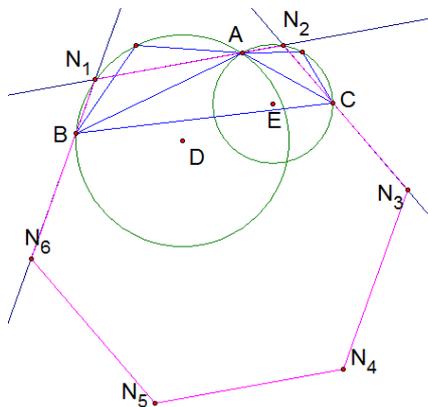


▲圖(42h)

陸、研究結果

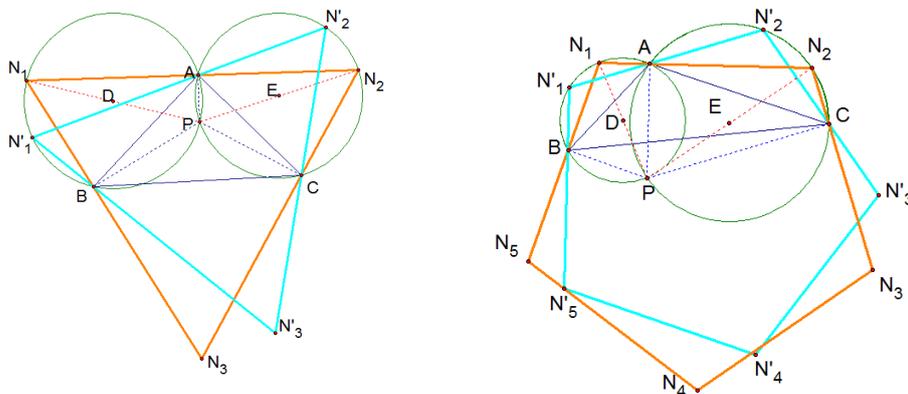
研究一：求作「過已知三點之正 n 邊形」

- 〔定理1〕若移動點落在有解的區域內(定理3)，則可利用圓周角作出過此三點之正 n 邊形。



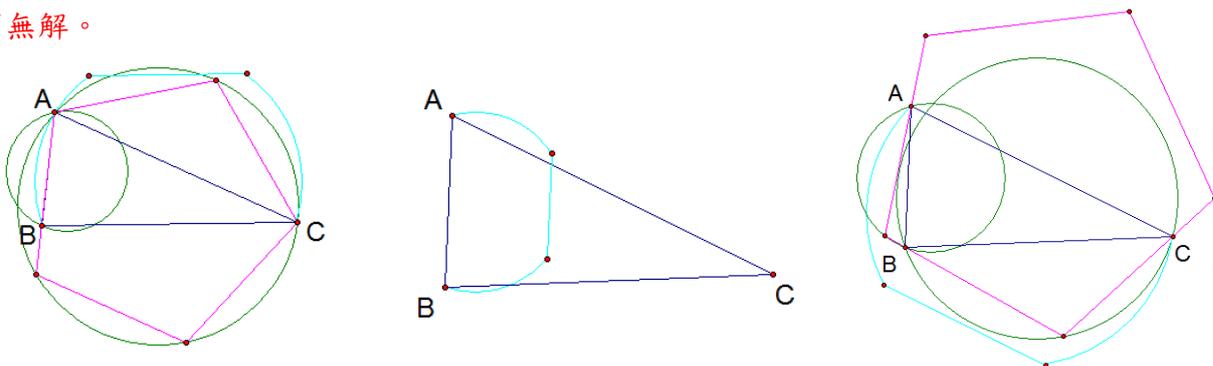
研究二：過已知三點之正多邊形的面積最大值探討

- 〔定理2〕若 $\overline{N_1N_2} \perp \overline{PA}$ ，則 $N_1N_2 \dots N_n \geq N'_1N'_2 \dots N'_n$ ，當 $\overline{N'_1N'_2} \perp \overline{PA}$ 時等號成立。
- 〔性質2-1〕 P, D, N_1 共線， P, E, N_2 共線。
- 〔性質2-2〕 $\overline{PA} \perp \overline{N_1N_2}$ 、 $\overline{PB} \perp \overline{N_nN_1}$ 、 $\overline{PC} \perp \overline{N_2N_3}$ 。



研究三：探討作過已知三點之正 n 邊形時，不共線三點是否一定會有解

- 〔定理3〕過 $\triangle ABC$ 之正多邊形有解或無解的界限：若移動點落在判斷有無解的區域內，則過此三角形的正 n 邊形有無限多組解；若移動點落在邊界上，則只有一解；落在區域外，則無解。

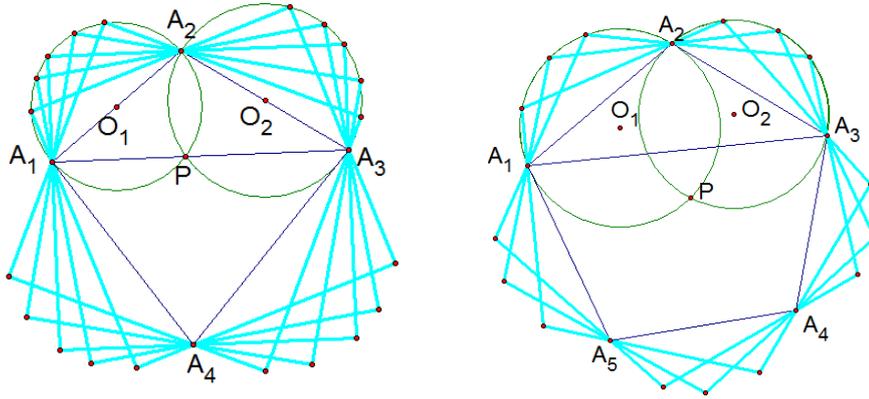


(A點為移動點，只有一解) (C點為移動點，無解) (B點為移動點，無限多解)

- 〔性質3-1〕任何三角形都必有無限多個通過其之正三角形。

研究四：過已知 n 點之正 n 邊形性質探討

1. [定理4-1] 過已知三點之正 n 邊形若有無限多組解(定理3)，這些正 n 邊形除了會通過點 A_1 、 A_2 、 A_3 外，也都會交於點 A_4 、 A_5 、...、 A_n 這 $(n-3)$ 個點。

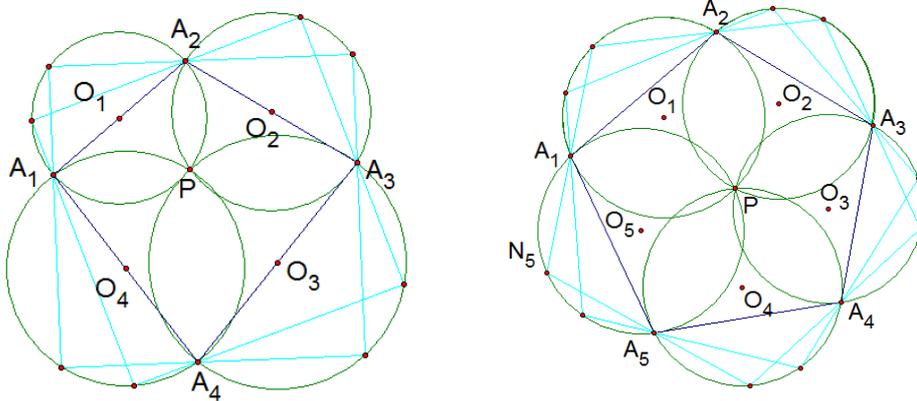


2. [定理4-2] 若在圓 O_1 、 O_2 ...、 O_n 上依序作出 N_1 、 N_2 、...、 N_n ，則 N_1N_2 ... N_n 為正 n 邊形。
 3. [性質4-1] 圓 O_1 、 O_2 ...、 O_n 皆交於一點 P 。
 4. [性質4-2] N_1N_2 ... N_n 面積為最大時， P 、 O_i 、 N_i 共線。
 5. [性質4-3] N_1N_2 ... N_n 面積為最大時， $\overline{PA_i} \perp \overline{N_iN_{i-1}}$ 。

研究五：推廣費馬點和拿破崙定理，並探討對稱多邊形之廣義費馬點、拿破崙多邊形與過已知 n 點之正 n 邊形的關係及其性質

(一) 費馬點的推廣

1. [定理5-1] 對稱多邊形之費馬點可由下列方法作出：
 (1) 若在對稱多邊形各邊上作出圓 O_1 、 O_2 、...、 O_n ，則其共同交點 P 即為其費馬點。

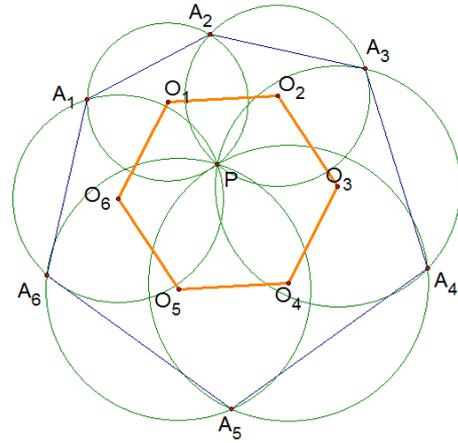
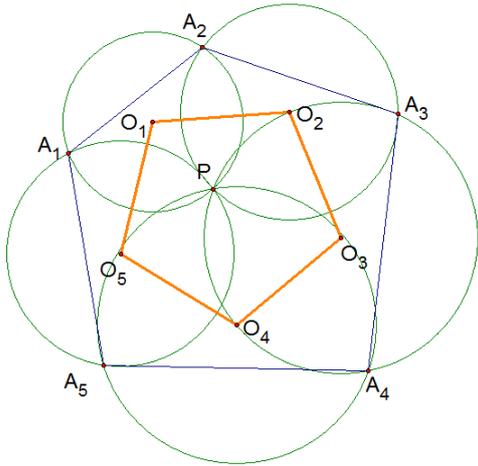


- (2) 假如 $n = 2k + 1$ ，費馬點為 A_1A_2 ... A_n 各邊向外部作頂角為 $\frac{\pi(n-2)}{n}$ 的等腰三角形 $\Delta A_iJ_iA_{i+1}$ 後連 $\overline{A_1J_{1+k}}$ 、 $\overline{A_2J_{2+k}}$ 、...、 $\overline{A_iJ_{i+k}}$ 的交點。
 (3) 假如 $n = 2k$ ，則為 $\overline{A_1A_{1+k}}$ 、 $\overline{A_2A_{2+k}}$ 、...、 $\overline{A_iA_{i+k}}$ 的交點。

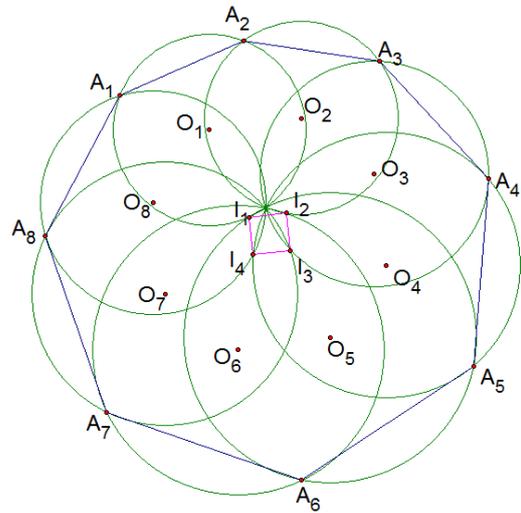
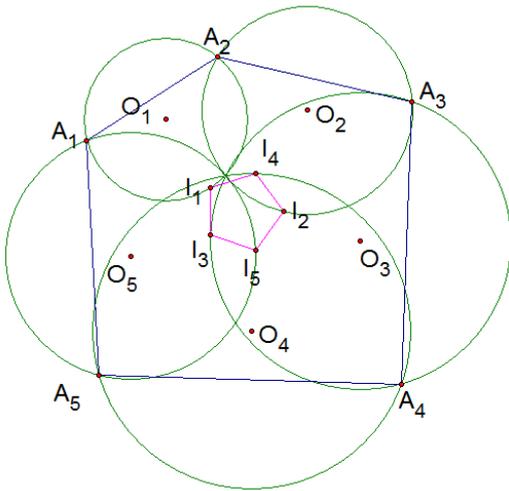
2. [性質5-1-1] $\angle A_iPA_{i+1} = \frac{2\pi}{n}$ 。
 3. [性質5-1-2] 假如 $n = 2k + 1$ ，則 $\overline{A_1J_{1+k}} = \overline{A_2J_{2+k}} = \dots = \overline{A_iJ_{i+k}}$ ；假如 $n = 2k$ ，則 $\overline{A_1A_{1+k}} = \overline{A_2A_{2+k}} = \dots = \overline{A_iA_{i+k}}$ 。

(二) 拿破崙定理的推廣

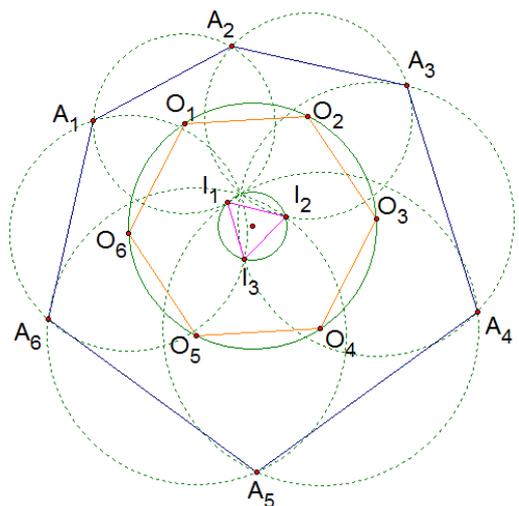
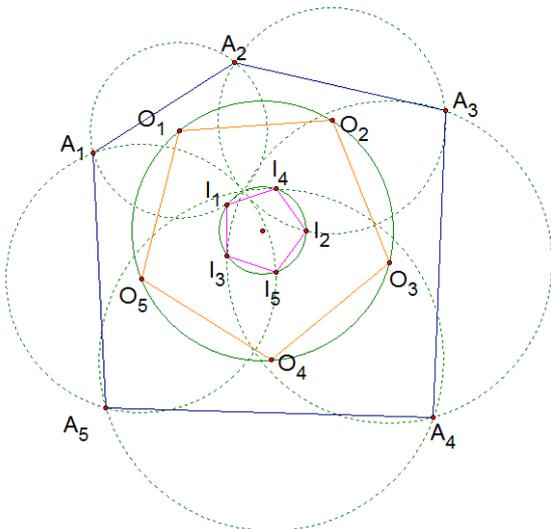
1. [定理5-2-1] 外拿破崙多邊形：若 $A_1A_2 \dots A_n$ 各邊向外作頂角為 $\frac{\pi(n-2)}{n}$ 的等腰三角形的外心 O_1, O_2, \dots, O_n ，則 $O_1O_2 \dots O_n$ 是正 n 邊形。



2. [定理5-2-2] 內拿破崙多邊形：若 I_i 為 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 向內側作正 n 邊形之外心，則
 (1) 假如 $n = 2k + 1$ ，則 $I_1I_2 \dots I_n$ 為正 n 邊形。
 (2) 假如 $n = 2k$ ，則因為 $I_i = I_{i+k}$ ，故 $I_1I_2 \dots I_k$ 為正 k 邊形(其中， $n = 4$ 時，則只存在 $\overline{I_1I_2}$ ，無法形成正多邊形)。



3. [性質5-2-1] I_i 和 P 關於直線 $\overline{OO_i}$ 對稱。
 4. [性質5-2-2] $A_1A_2 \dots A_n$ 之內、外拿破崙多邊形有共同外心 O 。



(三) 過 n 點之正 n 邊形、廣義費馬點、拿破崙多邊形之綜合性質

1. [性質5-3-1] 對稱多邊形與其拿破崙多邊形有共同重心。
2. [性質5-3-2] N_i 、 C 、 I_i 共線，且 C 在 $I_1I_2 \dots I_n$ 之外接圓上。
3. [性質5-3-3] 過 $A_1A_2 \dots A_n$ 正 n 邊形之外心 C 、廣義費馬點 P 、內拿破崙多邊形落在同一圓 O 上 ($n=4$ 時， $\overline{I_1I_2}$ 為直徑)。
4. [性質5-3-4] $\angle POC = \angle PO_iN_i$ ；其中，若連 $A_1A_2 \dots A_n$ 之最大正 n 邊形之外心 C 與其費馬點 P 得 \overline{CP} ，則 \overline{CP} 恰為圓 O 之直徑。
5. [性質5-3-5] 已知過 $A_1A_2 \dots A_n$ 之正 n 邊形 $N_1N_2 \dots N_n$ 的外心 C 在內拿破崙多邊形之外接圓 O 上移動時有限制，則存在作法找出有效區。

研究六：利用廣義費馬點和拿破崙多邊形的性質，簡化作過 n 點之正 n 邊形的方法

我們利用研究三、四、五的結果，得到了較簡潔的作法。

柒、未來展望

- 一、探討過已知 n 點之正多邊形之面積與其外心在對稱多邊形的內拿破崙外接圓的各個位置上的關係。
- 二、將研究內容往三維空間發展：「任意不共面四點，是否存在一正 n 面體使之每點皆在正 n 面體的一面上」，或「將費馬點、拿破崙定理推廣到三維空間」等。

捌、參考資料

- 一、全國科展第51屆高中數學組「你泥中有我，我泥中有你」。
- 二、黃家禮(95)，幾何明珠，九章出版社。
- 三、H.S.M.考克瑟特、S.L.格雷策，幾何學的新探索，凡異出版社。

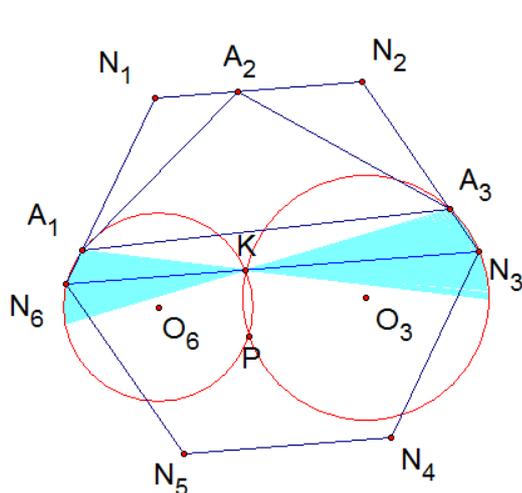
玖、附錄

定理3證明

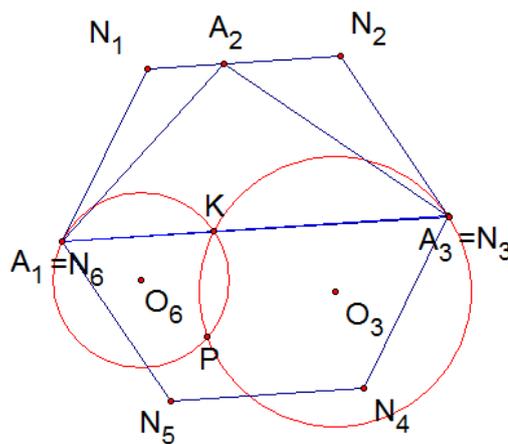
一、上方邊界 \overrightarrow{QR} ：

若過 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 之正多邊形有無限多解，可知正 n 邊形 $N_1 N_2 \dots N_n$ 在旋轉時， P 點為 $\overline{N_1 N_2}$ 的位似中心。又因為四邊形 $N_n N_1 N_2 N_3$ 保持相似，所以 P 點也為 $\overline{N_n N_3}$ 的位似中心。

\Rightarrow 若將 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 以對稱多邊形取相鄰三點考慮，可知 $\overline{N_n N_3}$ 過圓 O_3 、 O_n 之交點 K （非 P ）。而由圖(69a)我們可推知當點 A_1 、 A_3 固定，將點 A_2 往上移動使 $\overline{N_n N_3}$ 與 $\overline{A_1 A_3}$ 重合時，如圖(69b)，意即 K 點落在 $\overline{A_1 A_3}$ 上，過 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 之正多邊形就會無法旋轉，故只有一解，而此時點 A_2 向上的限制即為 \overrightarrow{QR} ，得證。



▲圖(69a)

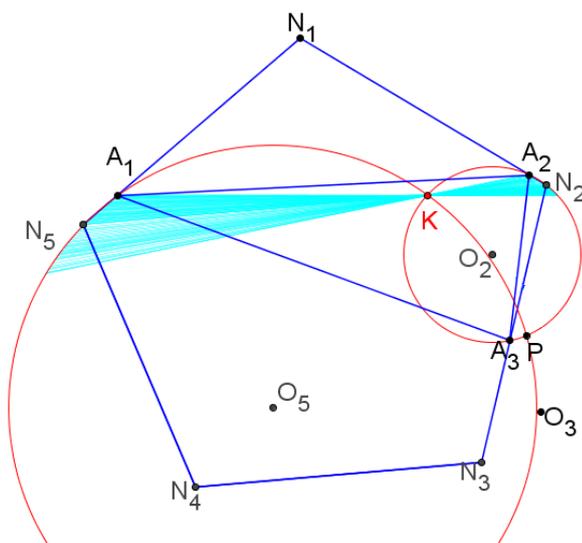


▲圖(69b)

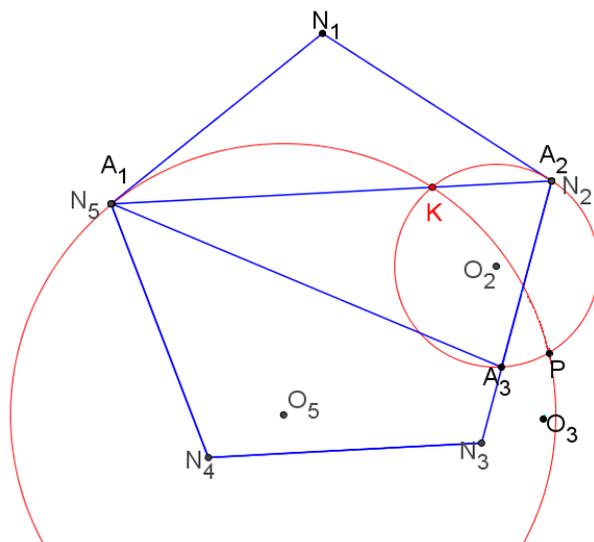
二、兩側邊界 \widehat{BQ} 、 \widehat{RC} ：

同理，可知正 n 邊形 $N_1 N_2 \dots N_n$ 在旋轉時， P 點為 $\overline{N_1 N_2}$ 的位似中心。又因為 $\Delta N_n N_1 N_2$ 保持相似，所以 P 點也為 $\overline{N_n N_2}$ 的位似中心，所以當正 n 邊形 $N_1 N_2 \dots N_n$ 在旋轉時， $\overline{N_n N_2}$ 恆通過圓 O_2 與 O_n 的異於 P 的交點 K 。而由圖(71)可知當 P 越往外移動直到 K 點落在 $\overline{A_1 A_2}$ 上時，過

$\Delta A_1 A_2 A_3$ 之正多邊形就會只有一解，此時 $\angle A_1 A_2 A_3 = \frac{n-3}{n} \pi$ ，即 A_2 落在左右邊界上。



▲圖(71a)



▲圖(71b)