摘要

在一個頂角 $90^\circ \le \theta < 180^\circ$ 的等腰三角形中，若有一球從頂角出發，該如何設定他出發的方向才可以讓他經過有限次數的碰撞後回到原出發點。起初我們先用了可以完全覆蓋的三角形作為例子，觀察其規律並整理出可行的發射角度。接著再尋找可延伸的方法堆廣到 $90^\circ \le \theta < 180^\circ$。在尋找解決問題的方法的過程中，我們發現必須使用矩陣、三角函數和向量才能完成，甚至需要延伸學習反三角函數才能找出欲求的角度。因此，首先我們利用三角函數簡化座標的表示，在尋求找到部分欲求點的輔助點時亦使用矩陣做座標的旋轉，依據找出的輔助點，我們再利用向量的平移找出所有欲求點。最後，再另外上網延伸學習反三角函數，用以完成最後的角度尋找。因此，我們更深刻體會矩陣可以用來旋轉座標，而在旋轉的過程中亦大量使用三角函數。再者，我們只要利用反三角函數和欲求點，就可以求得座標與原點的連線與 X 軸所夾的角度，意即符合最初條件的角度。

目錄

壹、研究動機

一直對撞球很有興趣的我們，在一次的突發奇想中，想知道如何能讓母球在經過反彈後滾回原處。除了試著想出解決方法，我們也上網搜尋類似的主題，便看到了一次科展中，探討正三角形的反彈問題。喜出望外的我們如找到同好般，決定推廣他們的研究。

貳、研究目的

一、找出所有與原點連線可形成一條成功反射路徑的點座標

二、找出所有可使球成功反射回原點的出發角，即為出發方向與 X 軸夾角。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GeoGebra 繪圖軟體。

肆、名詞與定義

一、完全覆蓋：對於所有頂角非銳角的等腰三角形中，若頂角為 2π 的因數，則稱該等腰三角形為「可完全覆蓋」的等腰三角形。

二、成功路徑：若原點與由原點對稱出的三角形點之連線通過由形成該點的所有對稱三角形所覆蓋成的面，則稱其路徑為一成功路徑。

三、欲求點：對於所有由原點對稱出的三角形點，若與原點連線可形成一條成功的路徑，則稱該點為「欲求點」。

四、輔助點：在尋找當頂角為 θ 的等腰三角形時，輔助我們去尋找欲求點的點。如圖（十八）中的綠點，我們稱作「輔助點」。

五、圖形對稱：如研究過程中的定理一。

六、基準三角形：在尋找當頂角為 θ 的等腰三角形時，以 $(1,0)$ 為旋轉點所對稱出的三角形，稱作「基準三角形」。

七、瞄準角：將原點與欲求點連線，該線段與 X 軸夾角稱作「瞄準角」。

伍、研究過程

為了方便尋找可反射回出發點的方向，我們希望能夠藉由將圖形不斷向外翻轉，使得原本在一個三角形內反射的所有路徑變成一直線。

定理一：對於所有三角形，若將三角形和反射路徑對於從出發點碰撞到的第一個邊做線對稱，則入射路徑和反射路徑成一直線。我們稱此動作為「圖形對稱」。

證明：如圖一，任意 ΔABC 對於 $\overline{BC}$ 做線對稱得 $\Delta A^{'}BC$

故 $\Delta ABC \cong \Delta A^{'}BC$

從點光源 A 出發射向 $\overline{BC}$ 邊上的 P 點，入射線長度為 u_1

過 P 做垂線 L 交 $\overline{AB}$ 、$\overline{A'B}$ 於 Q_1 、Q_2，可得入射角 $\theta = \angle APQ_1$

光源由 P 點反射至 $\overline{AB}$ 邊上的 P_1 點，反射線長度為 u_2

對於 $\overline{BC}$ 作關於反射線長度 u_2 的線對稱 u_2 得 $\angle \mathrm{BPP_1} = \angle \mathrm{BPD}$

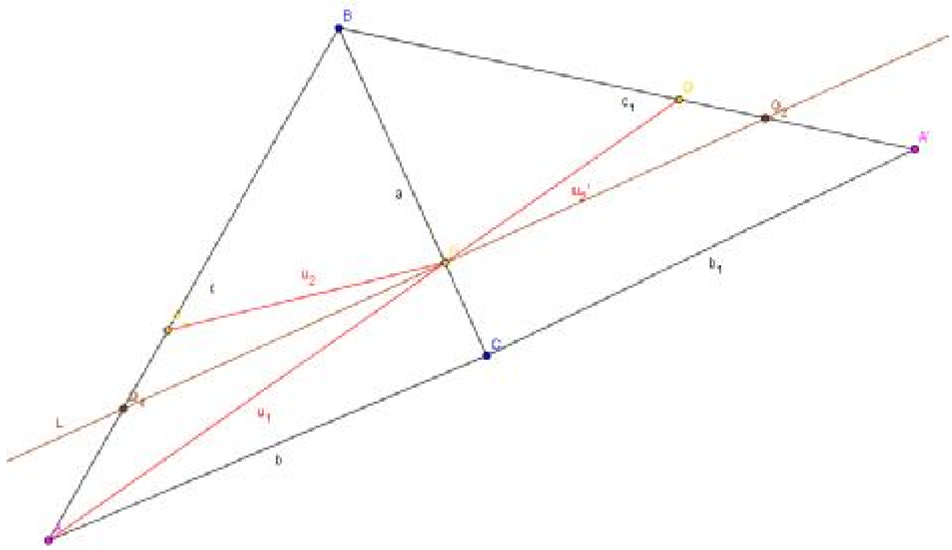
$\because$ 入射角 = 反射角 $\therefore \theta = \angle \mathrm{APQ_1} = \angle \mathrm{P_1PQ_1}$

$\because \overline{\mathrm{BC}} \perp \mathrm{L} \Rightarrow \angle \mathrm{BPQ_1} = 90^\circ \quad \therefore \angle \mathrm{BPP_1} = \angle \mathrm{BPD} = 90^\circ - \theta$

$\angle \mathrm{APD} = \angle \mathrm{APQ_1} + \angle \mathrm{Q_1PP_1} + \angle \mathrm{P_1PB} + \angle \mathrm{BPD}$

$= \theta + \theta + (90^\circ - \theta) + (90^\circ - \theta) = 180^\circ$

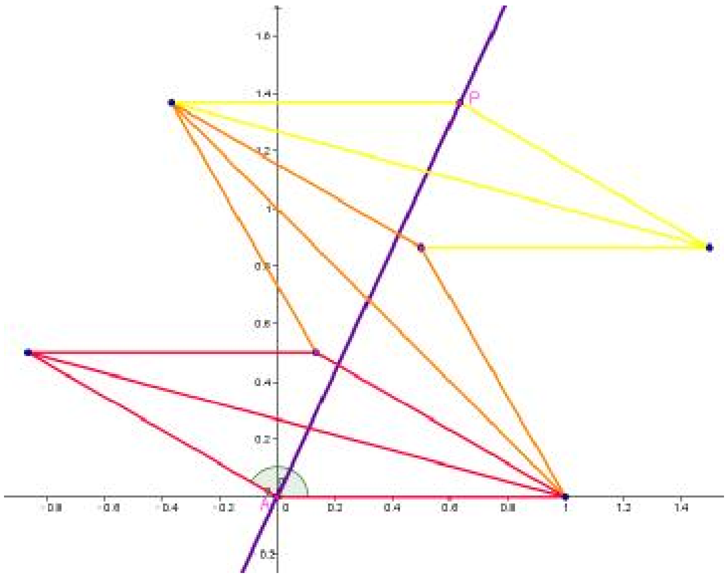
故 A—P—D 共線，即對稱後入射光和反射光成一直線，得證。



圖(一)

定理二：對於所有對稱後的三角形中，和原出發點相對應的點與原出發點連線時，有經過形成該點時所有對稱出的三角形，則該路徑即為一條反射成功的路徑。其中這條反射路徑與所有對稱後三角形的焦點個數為反射過程中的碰撞次數。

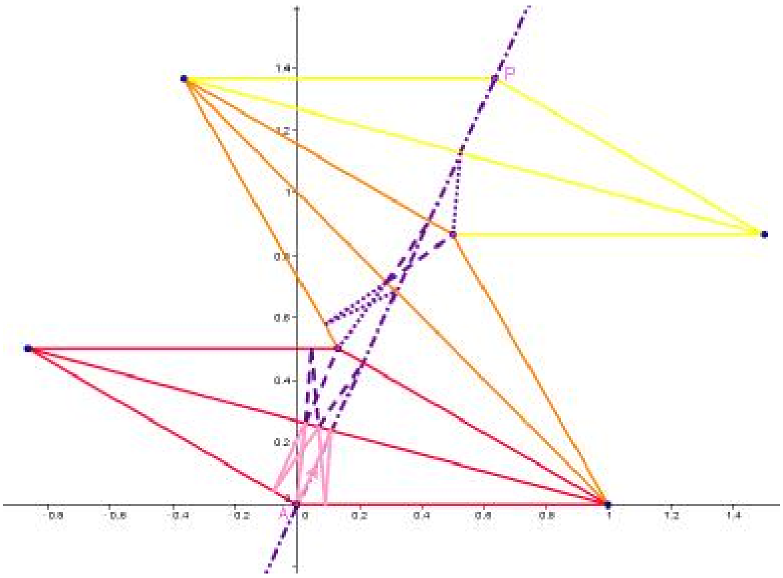
證明：



圖（二）

如圖（二），現在要證明$\overline{AP}$為一條成功的反射路徑。

將每一條紫色線段與它對應的三角形做對稱，即可得到圖（三）



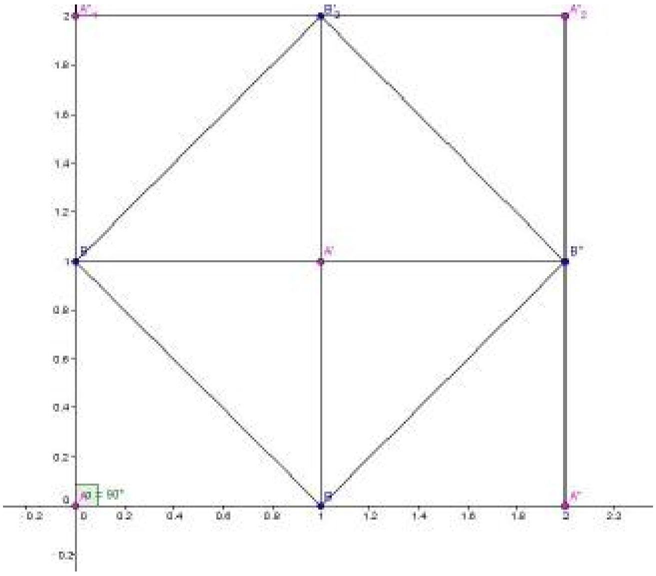
圖（三）

其中粉紅色路徑即為對稱完畢後的結果，發現此路徑即為一條可以成功反射的路徑。由定理一，因為每碰到一次反彈的點，我們就將反射路徑向外對稱一次。因此，我們每倒過來對稱一次，就可以得到一次反彈的點。故對稱出的直線路徑與所經過的三角形焦點個數即為反射次數，得證。

有了定理一和定理二，我們首先分析頂角為120°度和頂角為90°度的三角形。

一、頂角90°度的三角形

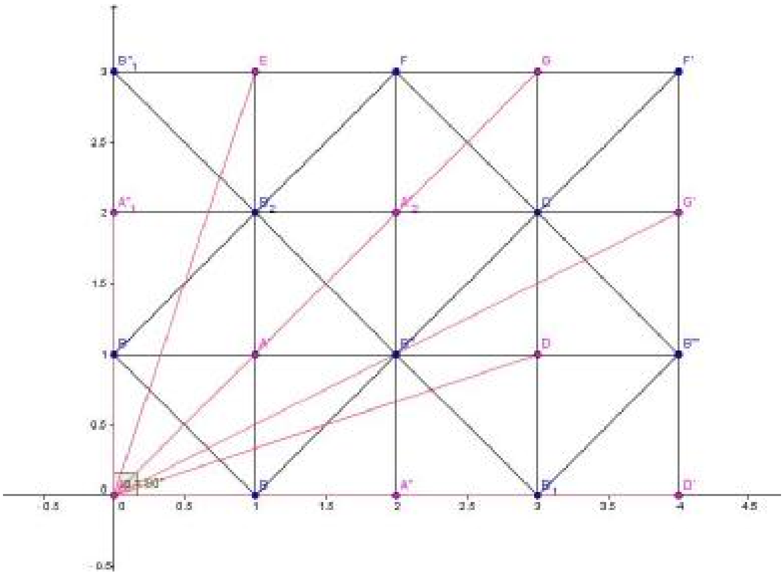
（一）我們以「圖形對稱」探討可反射成功的路徑。如圖（四）



圖（四）

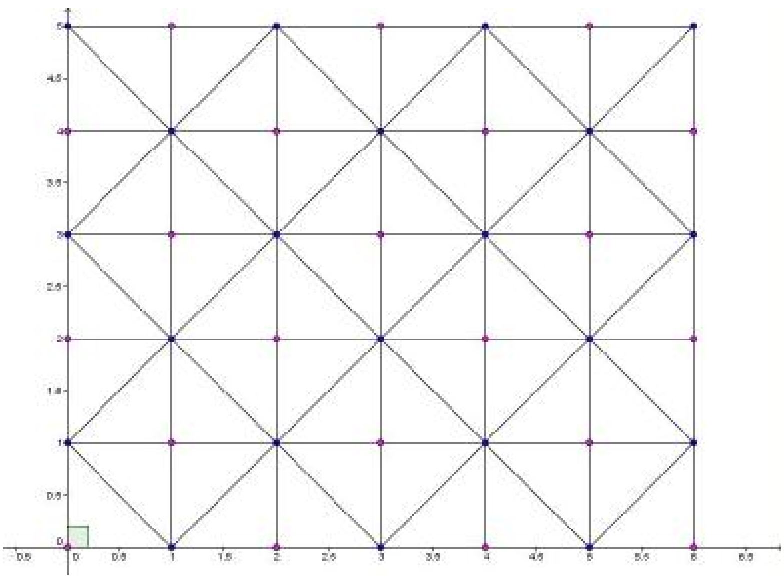
（二）透過圖形對稱，找出由原點對稱出的所有粉紅點，我們稱所有粉紅

點為「欲求點」。再將每個粉紅點與原點相連。每條連線即為一條反射路徑。如圖（五）



圖（五）

（三）由圖（四）再以圖形對稱做出數個三角形。如圖（六）



圖（六）

（四）觀察粉紅點座標的規律。如下表（一）。

	粉紅點座標				
y=0	(0,0)	(2,0)	(4,0)	(6,0)	(8,0)
y=1	(1,1)	(3,1)	(5,1)	(7,1)	(9,1)
y=2	(0,2)	(2,2)	(4,2)	(6,2)	(8,2)
y=3	(1,3)	(3,3)	(5,3)	(7,3)	(9,3)

表（一）

（五）將所有點座標一般化，得到關係式：

$$x + y = 2k\ ,\ x,y \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ ,\ k \in \mathbb{N}$$

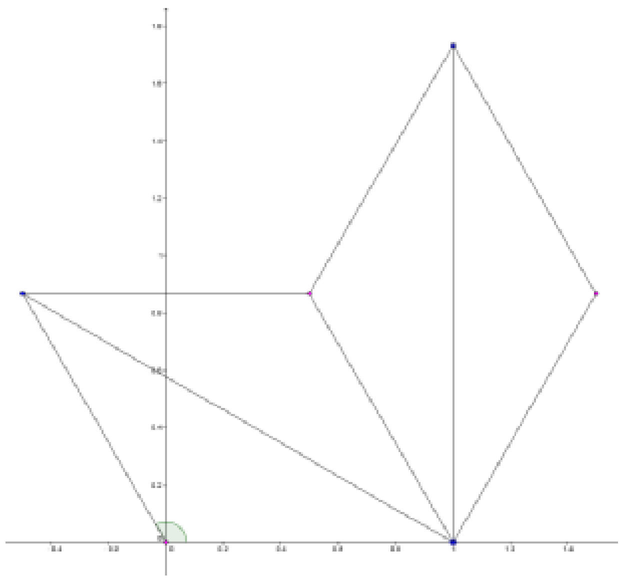
（六）將所有可反射成功的角度一般化，得到反射成功角的集合 S：

$$令\ x=x_0 \Rightarrow y=2k-x_0$$

$$S=\{\tan^{-1}(\frac{2k-x_0}{x_0}) \mid \forall x_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, x_0 \le 2k\}$$

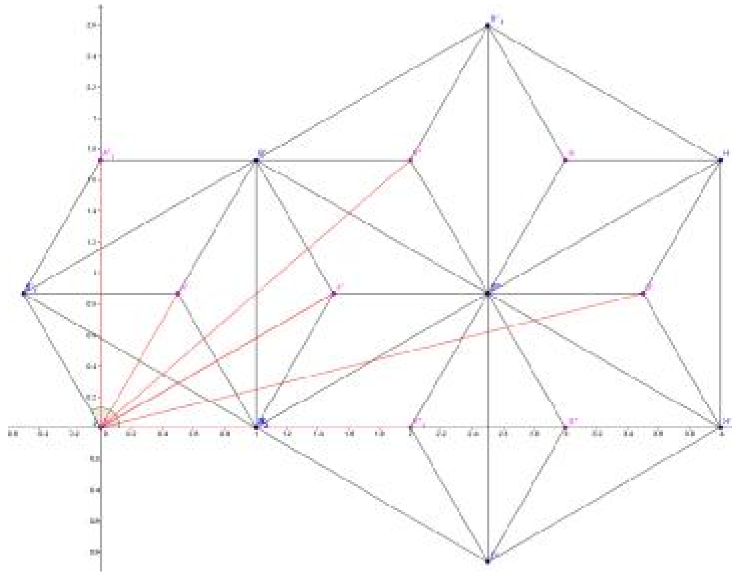
二、頂角120°度的三角形

（一）我們以「圖形對稱」探討可反射成功的路徑。如圖（七）



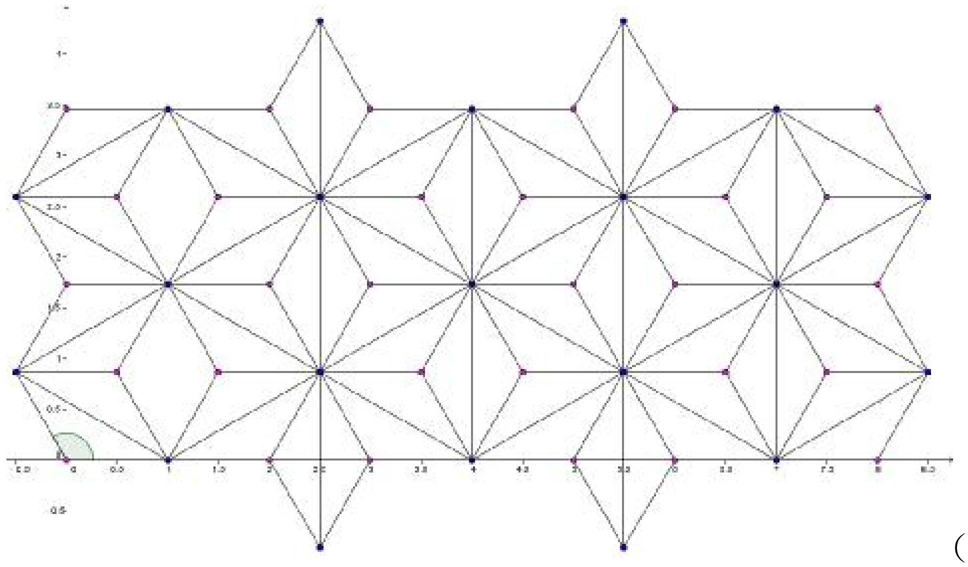
圖（七）

（二）透過圖形對稱，找出由原點對稱出的所有粉紅點。再將每個粉紅點與原點相連。每條連線即為一條反射路徑。如圖（八）



圖（八）

（三）由圖（七）再以圖形對稱做出數個三角形。如圖（九）



（圖九）

（四）觀察粉紅點座標的規律。如表（二)。

	粉紅點座標		
$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{7}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$
	$(\frac{9}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{13}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{15}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$
$y=\sqrt{3}$	$(0,\sqrt{3})$	$(2,\sqrt{3})$	$(3,\sqrt{3})$
	$(5,\sqrt{3})$	$(6,\sqrt{3})$	$(8,\sqrt{3})$
$y=\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\sqrt{3})$	$(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\sqrt{3})$	$(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\sqrt{3})$
	$(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\sqrt{3})$	$(\frac{13}{2},\frac{3}{2}\sqrt{3})$	$(\frac{15}{2},\frac{3}{2}\sqrt{3})$
$y=2\sqrt{3}$	$(0,2\sqrt{3})$	$(2,2\sqrt{3})$	$(3,2\sqrt{3})$
	$(5,2\sqrt{3})$	$(6,2\sqrt{3})$	$(8,2\sqrt{3})$

表（二）

（五）將所有點座標一般化，得到關係式：

$$(\mathrm{x},\mathrm{y})=(\frac{1+4(\mathrm{i}-1)-2[\frac{i}{2}]}{2},\sqrt{3}\,\mathrm{k}-\frac{\sqrt{3}}{2}),\ \mathrm{if}\ \ y=\sqrt{3}k-\frac{\sqrt{3}}{2},\forall i,k\in\mathbb{N}$$

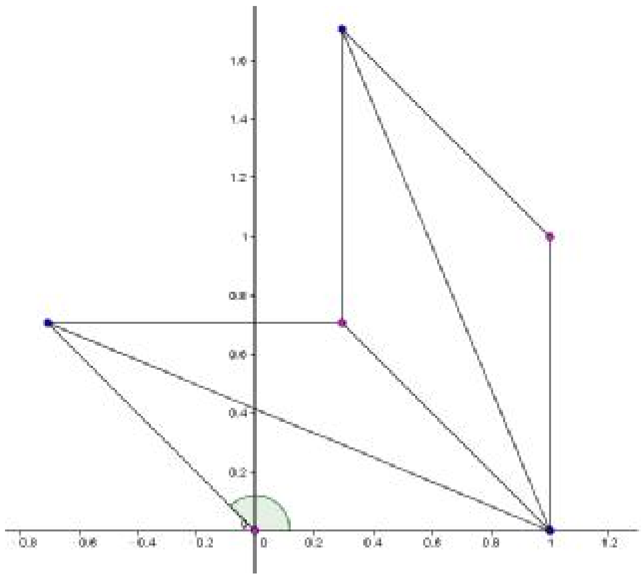
$$(\mathrm{x},\mathrm{y})=(2\,\mathrm{i}-2-[\frac{i-1}{2}],\sqrt{3}\,\mathrm{k}),\forall\,\mathrm{i},\mathrm{k}\in\mathbb{N},\ \mathrm{if}\ \ y=\sqrt{3}k,\forall i,k\in\mathbb{N}$$

（六）將所有可反射成功的角度一般化，得到反射成功角的集合：

$$\{\tan^{-1}(\frac{(2k_1-1)\sqrt{3}}{4n-3-2[\frac{n}{2}]}),\tan^{-1}(\frac{k_2\sqrt{3}}{2n-2-[\frac{n-1}{2}]})\,|\,\forall\,\mathrm{k}_i\in\mathbb{N},\mathrm{i}=1\vee 2\}$$

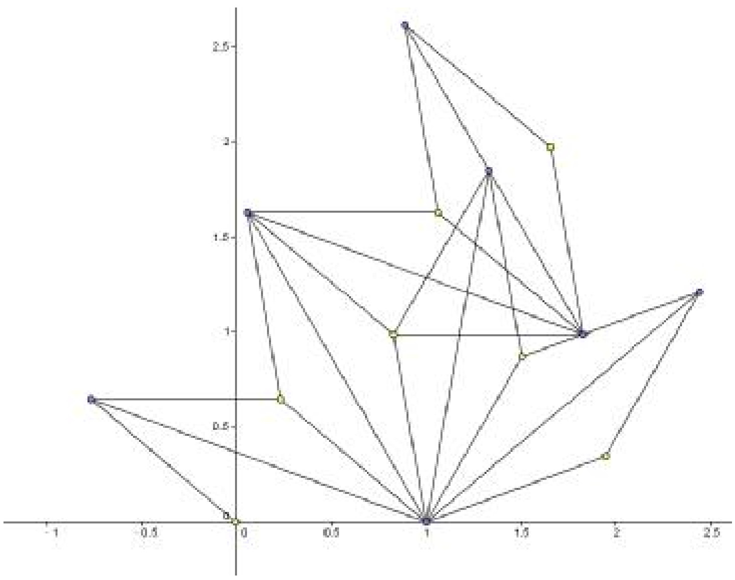
三、底角為θ的等腰三角形

（一）我們以「圖形對稱」探討可反射成功的路徑。如圖（十）



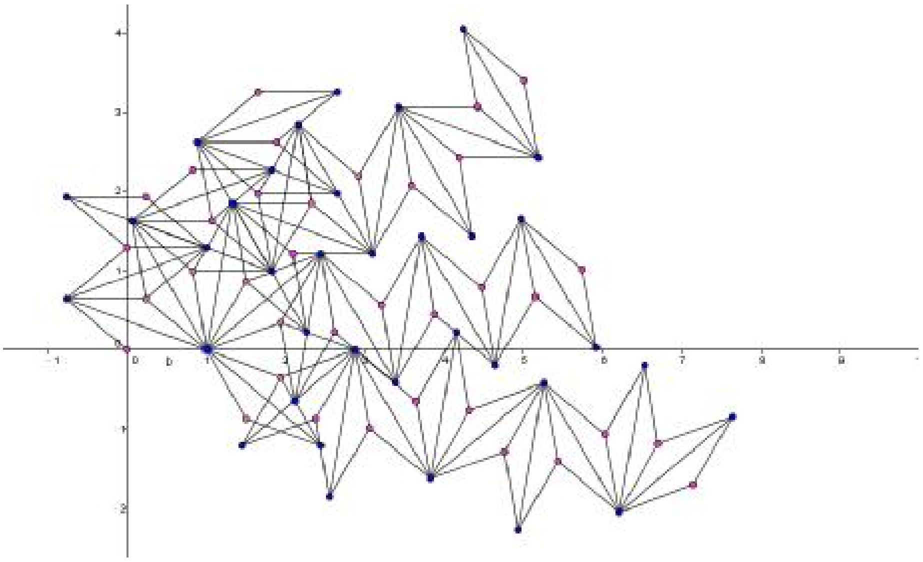
圖（十）

（二）將原三角形往單一方向翻轉，並標示出欲求點，試找出欲求點的規律。由於三角形在翻轉的過程中有兩種不同的翻轉方向，我們一次只選擇一個方向作翻轉。如圖（十一）



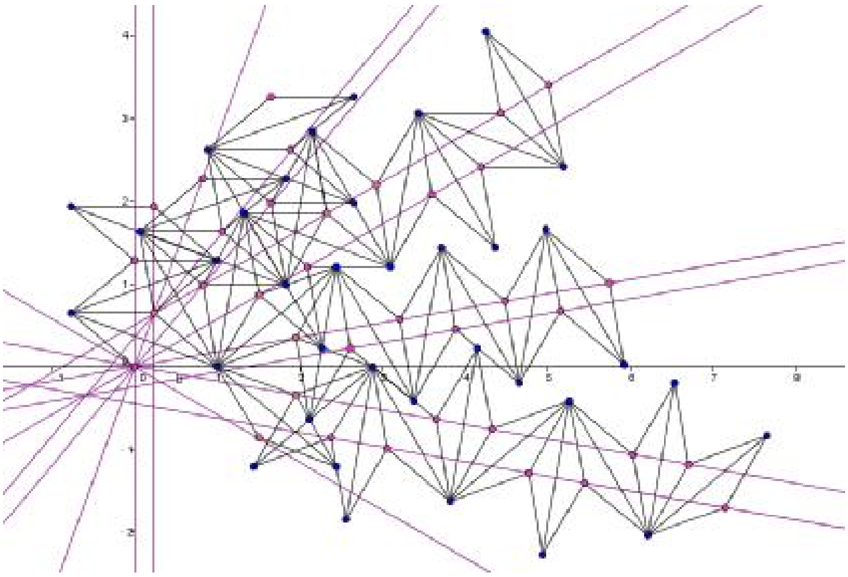
圖（十一）

（三）將圖（十）繼續延伸翻轉。如圖（十二）



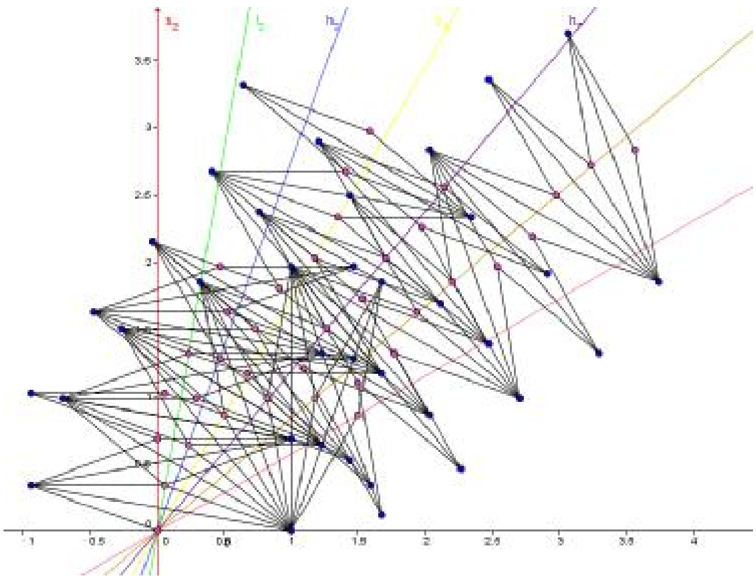
圖(十二)

(四)將原出發點與欲求點作連接。如圖(十三)



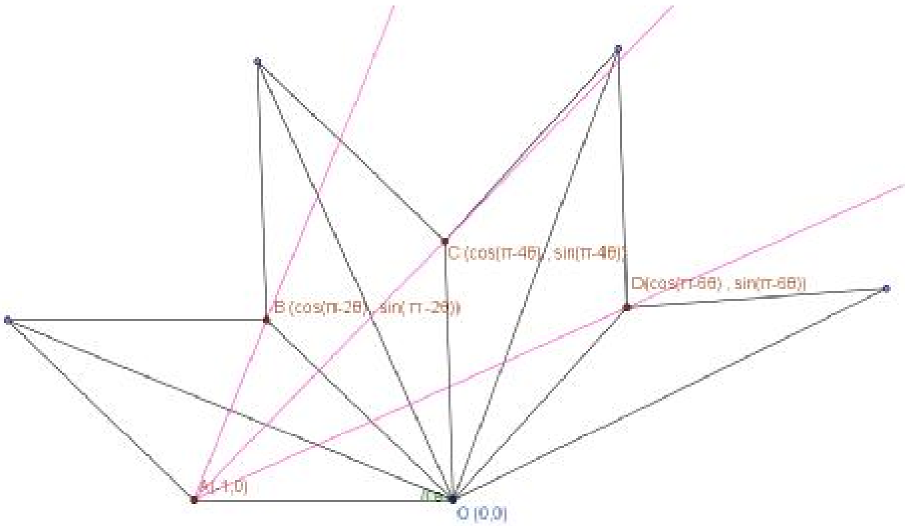
圖(十三)

(五)首先,經觀察發現,對於所有兩兩相鄰且經過原點的線所夾之角度相同。如圖(十四)



圖（十四）

因此我們繼續觀察圖中的彩色線並找出其相對關係，再將圖（十四）中的 $(1,0)$ 設定為新作標的原點 $O(0,0)$ 。如圖（十五）



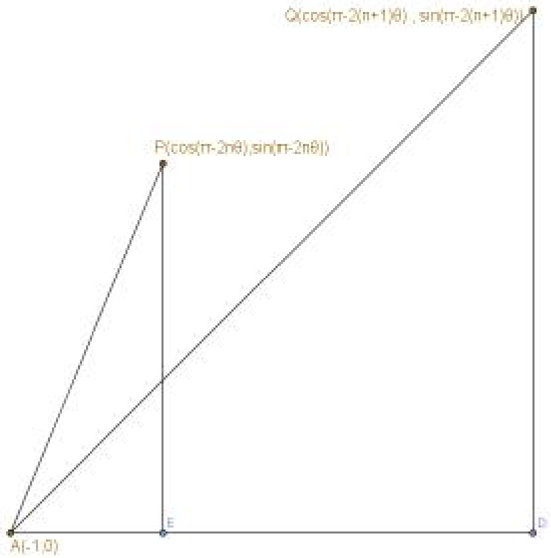
圖(十五)

由圖（十五）得原點 $O(0,0)$ ，發射點 $A(-1,0)$ 。將欲求點順時針依序設為 $B,\mathrm{C},\mathrm{D},......,\mathrm{P},\mathrm{Q},......$ ，得到座標 $B(\cos(\pi-2\theta),\sin(\pi-2\theta))$ 、$C(\cos(\pi-4\theta),\sin(\pi-4\theta))$ 、 $D(\cos(\pi-6\theta),\sin(\pi-6\theta))......$ 。

這些規律點的通式座標為：

$$(\cos(\pi-2\,\mathrm{n}\,\theta),\sin(\pi-2\,\mathrm{n}\,\theta)),\forall\,\mathrm{n}\in\mathbb{N}$$

將點座標取反正切值再相減即可得到 θ 值，如圖（十六） $\angle PAQ$ 。



圖（十六）

定理三：對於圖（十一）中所有兩兩相鄰的彩色線夾角角度為原三角形的底角。即圖（十二）和圖（十三）中 $\angle BAC = \angle PAQ = \theta$。

證明：欲證明定理三，只須證明 $\tan^{-1}\dfrac{\sin(2n\theta)}{1-\cos(2n\theta)}-\tan^{-1}\dfrac{\sin(2(n+1)\theta)}{1-\cos(2(n+1)\theta)}=\theta$

當 $n=1$ 時， $\tan^{-1}\dfrac{\sin 2\theta}{-\cos 2\theta+1}-\tan^{-1}\dfrac{\sin 4\theta}{-\cos 4\theta+1}$

$$=\tan^{-1}\frac{\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}}{\dfrac{\tan^2\theta-1}{1+\tan^2\theta}+1}-\tan^{-1}\frac{\dfrac{2\tan 2\theta}{1+\tan^2 2\theta}}{\dfrac{\tan^2 2\theta-1}{1+\tan^2 2\theta}+1}$$

$$=\tan^{-1}\frac{2\tan\theta}{2\tan^2\theta}-\tan^{-1}\frac{2\tan 2\theta}{2\tan^2 2\theta}=\frac{\pi}{2}-\theta-(\frac{\pi}{2}-2\theta)=\theta$$

設 $n=k$ 時， $\tan^{-1}\dfrac{\sin(2k\theta)}{-\cos(2k\theta)+1}-\tan^{-1}\dfrac{\sin(2(k+1)\theta)}{-\cos(2(k+1)\theta)+1}=\theta$ 成立

當 $n=k+1$ 時，如（圖十三）

$$\angle PAD=\tan^{-1}\frac{\sin(\pi-2(k+1)\theta)}{1+\cos(\pi-2(k+1)\theta)}=\tan^{-1}\frac{\sin(2(k+1)\theta)}{1-\cos(2(k+1)\theta)}$$

$$\angle QAD=\tan^{-1}\frac{\sin(\pi-2(k+2)\theta)}{1+\cos(\pi-2(k+2)\theta)}=\tan^{-1}\frac{\sin(2(k+2)\theta)}{1-\cos(2(k+2)\theta)}$$

$$\angle PAD-\angle QAD=\tan^{-1}\frac{\sin(2(k+1)\theta)}{1-\cos(2(k+1)\theta)}-\tan^{-1}\frac{\sin(2(k+2)\theta)}{1-\cos(2(k+2)\theta)}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\dfrac{2\tan(k+1)\theta}{1+\tan^2(k+1)\theta}}{\dfrac{\tan^2(k+1)\theta-1}{1+\tan^2(k+1)\theta}+1}-\tan^{-1}\frac{\dfrac{2\tan(k+2)\theta}{1+\tan^2(k+2)\theta}}{\dfrac{\tan^2(k+2)\theta-1}{1+\tan^2(k+2)\theta}+1}$$

$$=\tan^{-1}\frac{2\tan(k+1)\theta}{2\tan^{2}(k+1)\theta}-\tan^{-1}\frac{2\tan(k+2)\theta}{2\tan^{2}(k+2)\theta}$$

$$=\tan^{-1}\cot((k+1)\theta)-\tan^{-1}\cot(k+2)\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}-(k+1)\theta-(\frac{\pi}{2}-(k+2)\theta)=\theta \text{ 成立}$$

根據數學歸納法，

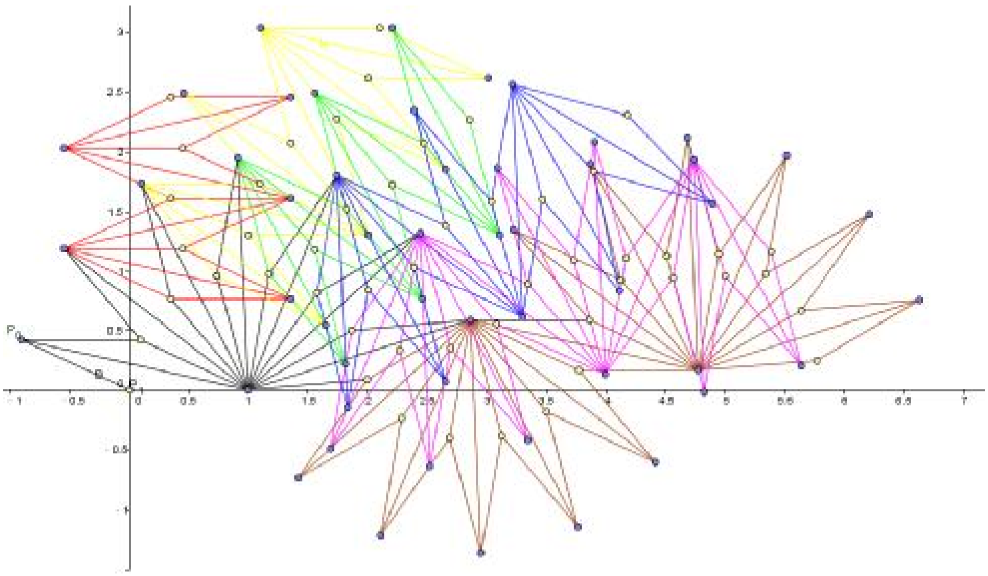
$$\tan^{-1}\frac{\sin(2n\theta)}{1-\cos(2n\theta)}-\tan^{-1}\frac{\sin(2(n+1)\theta)}{1-\cos(2(n+1)\theta)}=\theta,\forall n\in\mathbb{N} \text{ 得證}$$

想法：欲求一頂角θ的等腰三角形，以其頂角為出發點向底邊發射，經完全反彈後能反彈回出發點之瞄準角。以下以底角θ的等腰三角形（將頂角置於座標原點上）向外翻轉，圖中之黃色點為原出發點和欲求點。根據定理二得知，將原出發點和欲求點的連線，便是能夠成功反彈回原出發點的路徑。僅須求得各欲求點之點座標，再取反正切值便可得瞄準角之角度。

（六）因此以下我們觀察欲求點之規律。如圖（十七）可發現若欲得欲求點，可視為以$(1,0)$為旋轉軸，以一個平行四邊形為單位作旋轉。觀察旋轉出的每一單位便能發現在此旋轉組合中，旋轉出的第k個三角形在做下一次翻轉時，改以

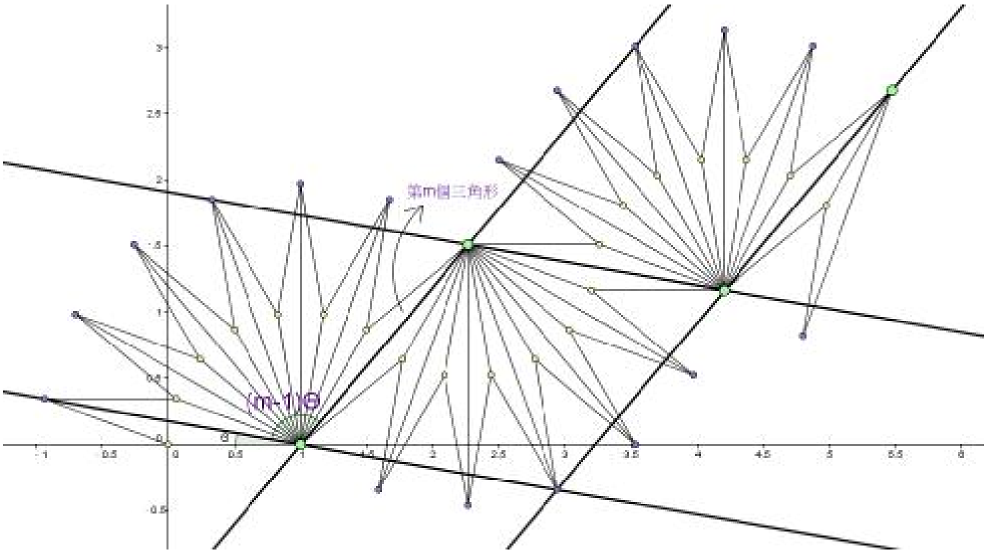
$$(\cos(\pi-(k+1)\theta),\sin(\pi-(k+1)\theta)),\forall k=2m-1,k,m\in\mathbb{N}$$

為轉軸，向外轉尋找欲求點，稱此改變轉軸作翻轉的三角形為「基準三角形」，而我們以每個基準三角形作分類和尋找規律的歸類，因此我們依此概念作進一步的觀察和探討。如圖（十七）中各顏色分別代表不同的旋轉組。



圖（十七）

觀察由每個基準三角形所形成的各欲求點之集合後發現，每一集合中的欲求點呈圓弧形分布，而形成欲求點之三角形亦可視為以圖（十八）中以輔助點為轉軸所旋轉 $(m-1)\theta$ 度而成的第 $(m-1)$ 個三角形。因此我們的目標便設為求得輔助點之座標後，再以輔助點為圓心，求得各以其旋轉而成的欲求點。



圖（十八）

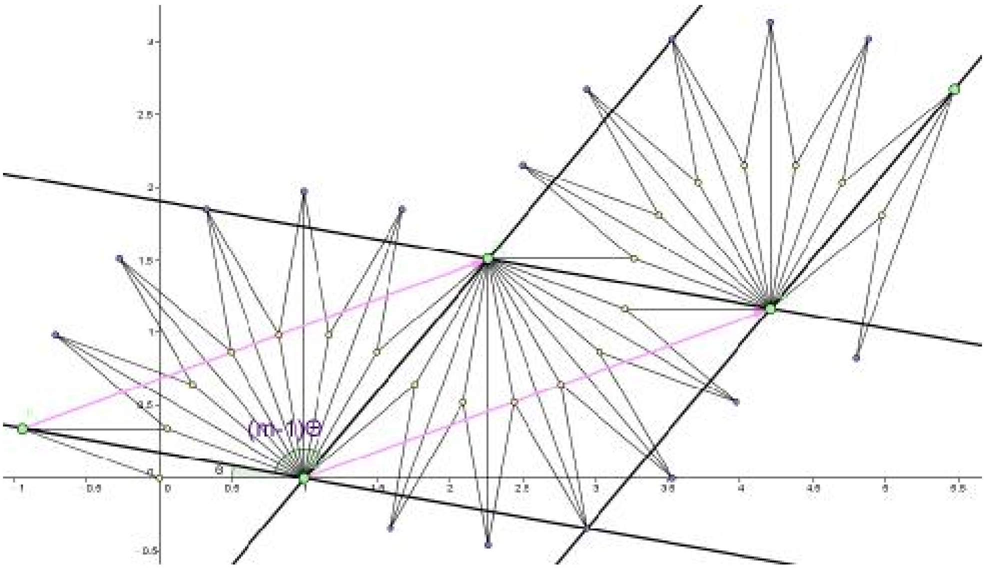
觀察由底角θ的等腰三角形翻轉而成的第 m 個三角形可知一個輔助點可構造成 $(m-1)$ 個三角形，其中包含 $\dfrac{m-1}{2}$ 個欲求點。

$(m = 2\alpha - 1, \alpha \in \mathbb{N}, m\theta < 180^\circ, 0 < m < \dfrac{180^\circ}{\theta})$

所以要求得球之瞄準角，須先求各欲求點的點座標，再取反正切值。

接下來要求圖中所有輔助點的座標，再用其座標求得圖中所有欲求點的座標。

（七）經作圖，我們可用二分法將所有輔助點歸類在兩條直線上。因此我們只需求出兩條線上各一點輔助點，再用向量平移即可求出所有輔助點的座標，如圖（十九）。



圖（十九）

將 $Q_1(1,0)$ 平移到原點 $O(0,0)$ ，再用旋轉矩陣求出 P_0 和 P_1 。

$$P_0\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & -\cos(-\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\cos\theta\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\cos^2\theta+1\\ 2\sin\theta\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$P_1\begin{bmatrix}\cos(-\mathrm{m}\theta) & -\sin(-\mathrm{m}\theta)\\ \sin(-\mathrm{m}\theta) & -\cos(-\mathrm{m}\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\cos\theta\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\cos m\theta\cos\theta+1\\ 2\sin m\theta\cos\theta\end{bmatrix}$$

令 P_0 到 P_1 的方向向量

$$\overline{V}=(2\cos\theta(\cos\theta-\cos(\mathrm{m}\theta)),2\cos\theta(\sin(\mathrm{m}\theta)-\sin\theta))$$

$\because \left|\overline{P_iP_{i+1}}\right|=\left|\overline{Q_jQ_{j+1}}\right|=\left|\overline{V}\right|,\forall i,j\in\mathbb{N}$

$\therefore$ 可以得到所有輔助點的座標 P_i

$(-2\cos^2\theta+1+\mathrm{i}(2\cos\theta(\cos\theta-\cos(\mathrm{m}\theta))),2\sin\theta\cos\theta+\mathrm{i}(2\cos\theta(\sin(\mathrm{m}\theta)-\sin\theta)))$

$Q_i(1+(\mathrm{i}-1)(2\cos\theta(\cos\theta-\cos(\mathrm{m}\theta))),(\mathrm{i}-1)(2\cos\theta(\sin(\mathrm{m}\theta)-\sin\theta))),\forall\,\mathrm{i}\in\mathbb{N}$

對於每一個輔助點，均可找到 $\dfrac{m-1}{2}$ 個欲求點。接著我們要來用輔助點的座標表示所有欲求點的座標。

以 Q_1 為圓心將 $(0,0)$ 旋轉 (-2θ) 即可得到點 Q_1 中的第一個欲求點 $(-\cos 2\theta+1,\sin 2\theta)$ ，再旋轉 (-2θ) 可再得到第二個欲求點

$(-\cos 4\theta+1, \sin 4\theta)$，旋轉 $\dfrac{m-1}{2}$ 次後，即可得到該輔助點所對應的所有欲求點。

因此 Q_1 所對應的所有欲求點座標為 $(-\cos 2n\theta+1, \sin 2n\theta)$

$\forall 1 \le n \le \dfrac{m-1}{2}, n \in \mathbb{N}$

故 Q_i 所對應的所有欲求點座標為：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Q}_{ij}(-\cos 2j\theta+1+(\mathrm{i}-1)(2\cos\theta(\cos\theta-\cos \mathrm{m}\theta)),\\ &\sin 2j\theta+(\mathrm{i}-1)(2\cos\theta(\sin(\mathrm{m}\theta)-\sin\theta)))\end{aligned}$$

$$\forall 1 \le j \le \frac{m-1}{2}, m, i, j \in \mathbb{N}$$

接著要來求 P_i 所對應的所有欲求點座標。

欲求所有欲求點座標，要先求得 P_1 所對應的欲求點座標。

P_1 座標為

$(-\cos(\mathrm{m}-1)\theta+1-2\cos^2 \mathrm{m}\theta, -\sin(\mathrm{m}-1)\theta+2\sin(\mathrm{m}\theta)\cos(\mathrm{m}\theta))$

作一水平線過 P_1，取

$P'(-\cos(\mathrm{m}-1)\theta-2\cos^2 \mathrm{m}\theta, -\sin(\mathrm{m}-1)\theta+2\sin(\mathrm{m}\theta)\cos(\mathrm{m}\theta))$

以 P_1 為圓心，將 P' 逆時針旋轉 $\pi-(\mathrm{m}-1)\theta$

$$\begin{bmatrix}\cos(\pi-(\mathrm{m}-1)\theta) & -\sin(\pi-(\mathrm{m}-1)\theta)\\ \sin(\pi-(\mathrm{m}-1)\theta) & \cos(\pi-(\mathrm{m}-1)\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\cos(\mathrm{m}-1)\theta-2\cos^2 m\theta\\ -\sin(\mathrm{m}-1)\theta+2\sin(\mathrm{m}\theta)\cos(\mathrm{m}\theta)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-2\cos(\mathrm{m}-1)\theta-2\cos^2 m\theta\\ -2\sin(\mathrm{m}-1)\theta+2\sin(\mathrm{m}\theta)\cos(\mathrm{m}\theta)\end{bmatrix}$$

即可得到 P_1 對應到的第一個欲求點座標，記作 P_{11}

$P_{11}(-2\cos(\mathrm{m}-1)\theta-2\cos^2 \mathrm{m}\theta, -2\sin(\mathrm{m}-1)\theta+2\sin(\mathrm{m}\theta)\cos(\mathrm{m}\theta))$

旋轉$\dfrac{m-1}{2}$次後，即可得到P_1所對應到的所有欲求點通式

$$P_{1j}(-2\cos(\mathrm{m+j-2})\theta-2\cos^2\mathrm{m}\theta,-2\sin(\mathrm{m+j-2})\theta+2\sin(\mathrm{m}\theta)\cos(\mathrm{m}\theta))$$

$$\forall 1\le j\le \frac{m-1}{2}, 0\le m<\pi,\quad j,m\in\mathbb{N}$$

對於所有P_{1j}座標平移$\overline{V}$，即可得到P_i所對應到的所有欲求點通式

$$P_{ij}(-2\cos(\mathrm{m+j-2})\theta-2\cos^2\mathrm{m}\theta+(\mathrm{i}-1)(2\cos\theta(\cos\theta-\cos(\mathrm{m}\theta))),$$
$$-2\sin(\mathrm{m+j-2})\theta+2\sin(\mathrm{m}\theta)\cos(\mathrm{m}\theta)+(\mathrm{i}-1)(2\cos\theta(\sin(\mathrm{m}\theta)-\sin\theta)))$$

$$\forall 1\le j\le \frac{m-1}{2}, 0\le m<\pi,\ m,i,j\in\mathbb{N}$$

陸、結論

一、頂角為90°度的三角形

（一）所有一般化點座標關係式：

$$x+y=2k\ ,\ \mathrm{x,y}\in\mathbb{N}\cup\{0\}\ ,\ \mathrm{k}\in\mathbb{N}$$

（二）反射成功角的集合S：令 $\mathrm{x=x_0}\Rightarrow \mathrm{y=2k\text{-}x_0}$

$$\mathrm{S=\{tan^{-1}(\frac{2k\text{-}x_0}{x_0})\mid \forall x_0\in\mathbb{N}\cup\{0\},x_0\le 2k\}}$$

二、頂角為120°度的三角形

（一）所有一般化點座標關係式：

$$(\mathrm{x,y})=(\frac{1+4(\mathrm{i}-1)-2[\frac{i}{2}]}{2},\sqrt{3}\,\mathrm{k}-\frac{\sqrt{3}}{2}),\ \mathrm{if}\ \ y=\sqrt{3}k-\frac{\sqrt{3}}{2},\forall i,k\in\mathbb{N}$$

$$(\mathrm{x,y})=(2\mathrm{i}-2-[\frac{i-1}{2}],\sqrt{3}\,\mathrm{k}),\forall\,\mathrm{i,k}\in\mathbb{N},\ \mathrm{if}\ \ y=\sqrt{3}k,\forall i,k\in\mathbb{N}$$

（二）反射成功角的集合S：

$$\mathrm{S}=\{\tan^{-1}(\frac{(2k_1-1)\sqrt{3}}{4n-3-2[\frac{n}{2}]}),\tan^{-1}(\frac{k_2\sqrt{3}}{2n-2-[\frac{n-1}{2}]})\mid\forall\,\mathrm{k}_i\in\mathbb{N},\mathrm{i}=1\vee 2\}$$

三、頂角為θ的等腰三角形$(\frac{\pi}{2}\le\theta<\pi)$

（一）所有規律點座標通式：

$$(\cos(\pi-2\,\mathrm{n}\,\theta),\sin(\pi-2\,\mathrm{n}\,\theta)),\forall\,\mathrm{n}\in\mathbb{N}$$

（二）所有一般化點座標關係式：

$$\begin{aligned}(\mathrm{x,y})=(&-2\cos(\mathrm{m}+\mathrm{j}-2)\theta-2\cos^2\mathrm{m}\,\theta+(\mathrm{i}-1)(2\cos\theta(\cos\theta-\cos(\mathrm{m}\,\theta))),\\&-2\sin(\mathrm{m}+\mathrm{j}-2)\theta+2\sin(\mathrm{m}\,\theta)\cos(\mathrm{m}\,\theta)+(\mathrm{i}-1)(2\cos\theta(\sin(\mathrm{m}\,\theta)-\sin\theta)))\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}(\mathrm{x,y})=(&-\cos 2j\theta+1+(\mathrm{i}-1)(2\cos\theta(\cos\theta-\cos\mathrm{m}\,\theta)),\\&\sin 2j\theta+(\mathrm{i}-1)(2\cos\theta(\sin(\mathrm{m}\,\theta)-\sin\theta)))\end{aligned}$$

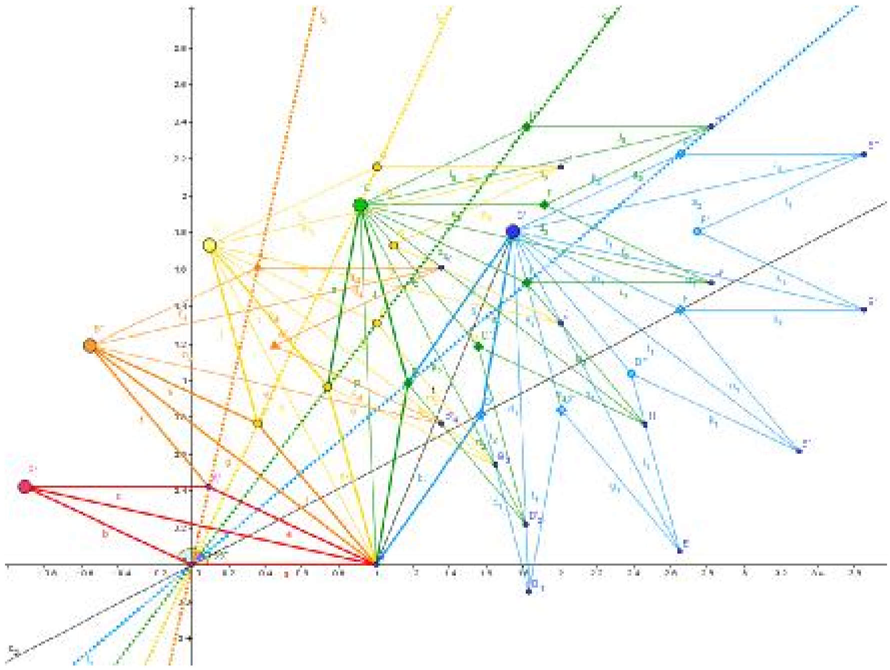
$$\forall 1\le j\le\frac{m-1}{2},0\le m<\pi,\ \ m,i,j\in\mathbb{N}$$

四、其他結論

除了上述結論之外，我們亦發現由基準三角形上的所有欲求點與原點的連線中，對於所有兩兩相鄰的連線所夾的角度，即為原三角形之底角角度。

柒、未來展望

在推論出欲求點之後發現，部分欲求點所形成的路徑不為成功路徑。如圖（二十）中的綠點，欲讓所有綠點與原點連線形成成功路徑，其落點範圍即第一象限中綠線和藍線所夾的範圍。然而，我們發現有一綠點位於此範圍之外，意即由該點形成的路徑不為成功路徑，換言之，該點為一不可行的欲求點。因此，在未來的研究中，我們期望能找出修正的方法抑或不可行的欲求點之規律。



圖（二十）

捌、參考資料

http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/52/pdf/040409.pdf