摘要

在本研究中我們討論以矩陣為係數的矩陣遞迴數列，其中嘗試使用不同方式求解，並成功將其推廣至n階遞迴，並討論矩陣遞迴數列的許多性質，最後藉由其斂散性討論矩陣遞迴式繪製在$X-Y$平面的結果與性質。過程中我們必須了解矩陣與實數之間的差異性，包括矩陣沒有交換性……等，那就得尋找不同於實數的思路，或者是利用方法加強其條件或輔助推演，以尋求我們所想要求的一般解，並藉由我們在矩陣遞迴式求得的結論進行圖形繪製，了解其斂散與跳動條件與性質。研究過程中，我們運用特徵方程式以及方塊矩陣做為工具來討論n階遞迴的一般式，再藉由 Geogebra 將其繪製成圖型並研究及解釋之。

目錄

壹、 研究動機

在一次的數學段考中，老師出了一題計算題:

若二階矩陣序列$\left\{\mathrm{A}_n\right\}_{n\geq 0}$滿足$A_0=\begin{bmatrix}5&3\\-1&-3\end{bmatrix}, A_n=PA_{n-1}+Q, (\mathrm{n}=1,2,3...)$其中

$P=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}$試求矩陣序列$A_n$的一般式為何?

因為這題只是矩陣的一階遞迴式，因此我們馬上利用把中間A_{n-1} $A_{n-2}\cdots\cdots A_2$項消去的方法解出A_n的一般式。而非常直觀的想法，我馬上想到如果這個問題變成是二階遞迴式而不是簡單的一階遞迴式時，是否可以找出它的一般式。此外，因為好奇遞迴式在圖形上的遞迴關係，我將試著將其繪製圖形並且討論及解釋其性質。

貳、 研究目的

我們想要尋找出矩陣二階遞迴式的一般式，在高中一年級所學的一般遞迴數列中，因為每個式子中的係數，彼此之間存在著交換律，因此我們只需要寫出二階遞迴的特徵方程式，便能夠求出特徵方程式的解並帶回原式，求出一般遞迴數列的一般式。不過矩陣的運算，因為少了交換律，所以不能使用特徵方程式的技巧，因此我們本研究的目的，將在矩陣的限制下，設法求出它的一般式寫法。並希望能夠推廣至n階並討論其特殊的性質。另外我們在高中課程中鮮少直接討論遞迴關係的圖形，此研究我們希望更進一步討論矩陣遞迴式繪製在圖形上的各種性質。

參、 研究設備及器材

紙、筆、電腦、MathType6、Microsoft Office Word、GeoGebra4.2

肆、 名詞與定義

(一)、矩陣基本性質:

令 A, B, C 皆為 $n\times n$ 矩陣，則有以下基本性質:

(1) $A+B=B+A$

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) $AB\neq BA$

(4) $(AB)C=A(BC)$

(5) $AA^{-1}=I$ ，其中 A^{-1} 稱 A 的反矩陣 I 為 $n\times n$ 單位矩陣

其中我們必須特別注意的是矩陣的乘法並沒有交換律，這將使特徵方程式出現致命的問題，而我們必須先熟悉矩陣基本的運算方法，並了解其和實數的不同，才能順利推演我們的研究。

(二)、特徵方程式:

我們在進行一階、二階遞迴式的推導時，會需要構造數值在等式兩邊同作加減，而此數值為某方程式之根，稱此方程式為特徵方程式，所求值為特徵值。

(三)、對角化:

在做矩陣 A 的 n 次方時考慮主對角矩陣 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$

，所以構造 $A=PDP^{-1}$ 其中 D 為一主對角矩陣，可得 $A^n=PD^nP^{-1}$ 。

特別地，若有兩矩陣 A,B 有可逆矩陣 P 使得 $A=PCP^{-1}$ ， $B=PDP^{-1}$ ，其中 C,D 皆為主對角矩陣，稱此兩矩陣同時可對角化。

(四)、同時可對角化：

若兩矩陣 A,B 可對角化且存在 S,S^{-1} 使得 $A=SC_AS^{-1}$ ， $B=SC_BS^{-1}$ ，其中 C_A,C_B 為主對角矩陣，則稱 A,B 同時可對角化。

(六)、分塊矩陣：

一個分塊矩陣就是將矩陣分割出較小的矩形矩陣。換個方式來說，就是以較

小的矩陣組合成一個矩陣。分塊矩陣的分割原則是以水平線和垂直線進行劃分。分塊矩陣中，位在同一行（列）的每一個子矩陣，都擁有相同的列數（行數）。通過將大的矩陣通過分塊的方式劃分，並將每個分塊看做另一個矩陣的元素，這樣之後再參與運算，通常可以讓計算變得清晰甚至得以大幅簡化。

伍、 研究方法與過程

定理一：若一階 $n\times m$ 矩陣遞迴數列 $A_n = PA_{n-1}+Q$，其中 P 為已知 $n\times n$ 矩陣 Q, A_1 皆為已知 $n\times m$ 矩陣，則 $A_n = P^{n-1}\left[A_1-(I_n-P)^{-1}Q\right]+(I_n-P)^{-1}Q$

證明：

令 α 為 $n\times m$ 矩陣使得 $\alpha = P\alpha + Q$，且稱此式為一階矩陣遞迴數列特徵方程式，此時原式兩邊同減 α：

$$A_n-\alpha = PA_{n-1}+Q-\alpha$$

$$Q-\alpha = -P\alpha$$

$$A_n-\alpha = P(A_{n-1}-\alpha)$$

$$A_n-\alpha = P^{n-1}\left(A_1-\alpha\right)$$

$$A_n = P^{n-1}\left(A_1-\alpha\right)+\alpha$$

$$\alpha = \left(I_n-P\right)^{-1}Q$$

$$A_n = P^{n-1}\left[A_1-\left(I_n-P\right)^{-1}Q\right]+\left(I_n-P\right)^{-1}Q$$

我們可以知道在一階矩陣遞迴式中，利用特徵方程式的解法並不會因為矩陣的性質而有問題出現，可直接利用已學會的一階遞迴特徵方程式解之。

我們以實數遞迴式特徵方程式解法進行矩陣二階遞迴數列的討論，但發現因矩陣沒有交換率而無法用相同方式求得特徵方程式。

所以我們給定條件使 P,Q 能使用特徵方程式解之：

引理：兩矩陣可對角化且有交換律$\Leftrightarrow$兩矩陣同時可對角化

證明:

$\boxed{\Rightarrow}$:先設想A可對角化為$S^{-1}AS=C$，其中C是主對角特徵值矩陣。

設C有相異特徵值$\lambda_1\cdots\cdots\lambda_m$，在不失一般性的原則下，令相重特徵值緊鄰排列，則$C$可表示成分塊矩陣直和：

$$C=\begin{bmatrix}\lambda_1 I_{\beta 1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m I_{\beta m}\end{bmatrix}=\lambda_1 I_{\beta 1}\oplus\cdots\cdots\oplus\lambda_m I_{\beta m}$$

，其中$I_{\beta j}$是β_j階單位矩陣，

β_j是特徵值λ_j的相重數。

因為$AB=BA$，將$A=SCS^{-1}$代入上式，得$SCS^{-1}B=BSCS^{-1}$。

令$D=\left[d_{ij}\right]=S^{-1}BS$，則得$CD=DC$，比較等號兩邊矩陣的$(i,j)$元，即得

$C_{ii}D_{ij}=D_{ij}C_{jj}$。

因為$\left(C_{ii}-C_{jj}\right)D_{ij}=0$，當$C_{ii}\neq C_{jj}$，必有$D_{ij}=0$，故知$D$具有下列主對角分塊形式：

$$D=\begin{pmatrix}D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_m\end{pmatrix}=D_1\oplus\cdots\cdots\oplus D_m$$

，其中$\beta_j\times\beta_j$階分塊D_j對應特徵值λ_j。

$\boxed{\Leftarrow}$:若兩矩陣同時可對角化，則有$SAS^{-1}=C$，$SBS^{-1}=D$其中C,D皆為主對角矩陣，主對角矩陣符合交換律。

$$AB=S^{-1}CSS^{-1}DS=S^{-1}CDS=S^{-1}DCS=S^{-1}DSS^{-1}CS=BA$$

定理二：若二階$n\times m$矩陣遞迴數列$A_n=PA_{n-1}+QA_{n-2}$其中P,Q為已知$n\times n$矩陣，A_1,A_2為已知$n\times m$矩陣，且P,Q有交換律且可對角化，且P^2+4Q為正定矩陣，則$A_n=(\alpha-\beta)^{-1}\left[\alpha^{n-1}(A_2-\beta A_1)-\beta^{n-1}(A_2-\alpha A_1)\right]$

其中$\alpha=\dfrac{P\pm\sqrt{P^2+4Q}}{2}$，$\beta=\dfrac{P\mp\sqrt{P^2+4Q}}{2}$

特別地：

若$P^2+4Q=0$則$A_n=\alpha^{n-1}\left(A_1-\gamma\right)+\gamma$，其中$\gamma=\alpha\gamma+\alpha^{n-2}\left(A_2-\alpha A_1\right)$

證明:

根據引理知，P,Q有交換律且可對角化$\Leftrightarrow$ P,Q同時可對角化，存在S使得$SPS^{-1}=C$，$SQS^{-1}=D$其中C,D皆為主對

角矩陣。

尋找α,β使得

$$\alpha=\frac{P\pm\sqrt{P^2+4Q}}{2}$$

$$\beta=\frac{P\mp\sqrt{P^2+4Q}}{2}$$

將P,Q值代入：

$$\alpha=\frac{S^{-1}CS\pm\sqrt{S^{-1}C^2S+4S^{-1}DS}}{2}$$

$$\alpha=\frac{S^{-1}CS\pm\sqrt{S^{-1}\left(C^2+4D\right)S}}{2}$$

$$\alpha=S^{-1}\frac{C\pm\sqrt{\left(C^2+4D\right)}}{2}S$$

$$S\alpha S^{-1}=\frac{C\pm\sqrt{\left(C^2+4D\right)}}{2}$$

其中$\dfrac{C\pm\sqrt{\left(C^2+4D\right)}}{2}$為主對角矩陣。

則我們得到P,Q, α, β同時可對角化$\Leftrightarrow$具有交換律

且此時的α, β滿足$P=\alpha+\beta,Q=-\alpha\beta=-\beta\alpha$

接著將α,β代回原式

$$A_n = (\alpha+\beta)A_{n-1} - \alpha\beta A_{n-2}$$

$$A_n - \beta A_{n-1} = \alpha(A_{n-1} - \beta A_{n-2})$$

$$A_n - \beta A_{n-1} = \alpha^{n-2}(A_2 - \beta A_1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$A_n = (\alpha+\beta)A_{n-1} - \beta\alpha A_{n-2}$$

$$A_n - \alpha A_{n-1} = \beta(A_{n-1} - \alpha A_{n-2})$$

$$A_n - \alpha A_{n-1} = \beta^{n-2}(A_2 - \alpha A_1) \cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

$(*)\times\alpha - (**)\times\beta$

$$(\alpha-\beta)A_n = \alpha^{n-1}(A_2 - \beta A_1) - \beta^{n-1}(A_2 - \alpha A_1)$$

$$A_n = (\alpha-\beta)^{-1}\left[\alpha^{n-1}(A_2 - \beta A_1) - \beta^{n-1}(A_2 - \alpha A_1)\right]$$

特別地；

若 $P^2 + 4Q = 0$

此時$\alpha = \beta = \dfrac{P}{2}$

$$A_n - \alpha A_{n-1} = \alpha^{n-2}(A_2 - \alpha A_1)$$

$$A_n = \alpha^{n-2}(A_2 - \alpha A_1) + \alpha A_{n-1}$$

我們將其視為矩陣一階遞迴數列解之

尋找γ使得$\gamma = \alpha\gamma + \alpha^{n-2}\left(A_2 - \alpha A_1\right)$，將原式兩邊同減$\gamma$：

$$A_n - \gamma = \alpha A_{n-1} + \alpha^{n-2}(A_2 - \alpha A_1) - \gamma$$

$$A_n - \gamma = \alpha\left(A_{n-1} - \gamma\right)$$

$$A_n - \gamma = \alpha^{n-1}\left(A_1 - \gamma\right)$$

$$A_n = \alpha^{n-1}\left(A_1 - \gamma\right) + \gamma$$

二階矩陣遞迴數列若以特徵方程式的想法去討論，除了定理條件中 P,Q 必須有交換率且可對角化的條件外，P^2+4Q 必須為可以進行開根號的矩陣，也就是 P^2+4Q 必須是正定矩陣。

那對於二階矩陣遞迴是否有方式能夠找到一般解？

我們從另一種解題方式去討論：

定理三：若二階 $n\times m$ 矩陣遞迴數列 $A_n=PA_{n-1}+QA_{n-2}$ 其中 P,Q 為已知 $n\times n$ 矩陣，A_1,A_2 為已知 $n\times m$ 矩陣，則 $\begin{bmatrix} A_n \\ A_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}^{n-2}\begin{bmatrix} A_2 \\ A_1 \end{bmatrix}$，其中 $\begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}$ 為以 $n\times n$ 矩陣表示的 2×2 分塊矩陣，$\begin{bmatrix} A_n \\ A_{n-1} \end{bmatrix}$ 為以 $n\times m$ 矩陣表示的 2×1 分塊矩陣。

證明：

令 $X_n=\begin{bmatrix} A_n \\ A_{n-1} \end{bmatrix}$

此時的 X_n 可視為 A_{n+1} 與 A_n 組合成的分塊矩陣，同時在運算上等價於一個 $2n\times m$ 的矩陣。

$$X_{n+1}=\begin{bmatrix} A_{n+1} \\ A_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} PA_n+QA_{n-1} \\ A_n+0A_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$X_{n+1}=\begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_n \\ A_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}X_n$$

其中 $\begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}$ 為 P, Q, I, 0 所組成的分塊矩陣，可視為一 $2n\times 2n$ 矩陣。

$$X_n=\begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}^{n-2}X_2$$

$$\begin{bmatrix} A_n \\ A_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}^{n-2}\begin{bmatrix} A_2 \\ A_1 \end{bmatrix}$$

本問題中以分塊矩陣的方式列式，而利用普通矩陣的方式運算，關於矩陣的 n 次方我們可以藉由對角化解之，若遇到矩陣不可對角化時，也可使用 Jordan Form 解矩陣的 n 次方。

使用這方法其 P, Q 將不再受到限制，且可以將其推廣至 n 階。

定理四：給定 k 階 $n\times m$ 矩陣遞迴數列 $A_i=\sum_{j=1}^{k}P_jA_{i-j}$ 其中 P_k 為已知 $n\times n$ 矩陣，A_i 為已知 $n\times m$ 矩陣，則 $\begin{bmatrix}A_i\\ \vdots\\ \vdots\\ A_{i-k+1}\\ A_{i-k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1&P_2&\cdots&\cdots&\cdots&P_k\\ I&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\ 0&I&\cdots&\cdots&\cdots&0\\ \vdots&0&\ddots&&&\vdots\\ \vdots&\vdots&&\ddots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&\cdots&I&0\end{bmatrix}^{i-k}\begin{bmatrix}A_k\\ \vdots\\ \vdots\\ A_2\\ A_1\end{bmatrix}$。

討論：

令

$$X_i=\begin{bmatrix}A_i\\ \vdots\\ \vdots\\ A_{i-k+1}\\ A_{i-k}\end{bmatrix}_{kn\times m}$$

$$X_{i+1}=\begin{bmatrix}A_{i+1}\\ \vdots\\ \vdots\\ A_{i-k+2}\\ A_{i-k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{k}P_jA_{i+1-j}\\ \vdots\\ \vdots\\ A_{i-k+2}\\ A_{i-k+1}\\ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1&P_2&\cdots&\cdots&\cdots&P_k\\ I&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\ 0&I&\cdots&\cdots&\cdots&0\\ \vdots&0&\ddots&&&\vdots\\ \vdots&\vdots&&\ddots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&\cdots&I&0\end{bmatrix}_{kn\times kn}\begin{bmatrix}A_i\\ \vdots\\ \vdots\\ A_{i-k+1}\\ A_{i-k}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A_i\\ \vdots\\ \vdots\\ A_{i-k+1}\\ A_{i-k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1&P_2&\cdots&\cdots&\cdots&P_k\\ I&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\ 0&I&\cdots&\cdots&\cdots&0\\ \vdots&0&\ddots&&&\vdots\\ \vdots&\vdots&&\ddots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&\cdots&I&0\end{bmatrix}^{i-k}\begin{bmatrix}A_k\\ \vdots\\ \vdots\\ A_2\\ A_1\end{bmatrix}$$

定理五：一階$n\times m$矩陣遞迴數列$A_n=PA_{n-1}+Q$收斂，其中P為已知$n\times n$矩陣Q, A_1為已知$n\times m$矩陣，且令P之對角化形式$SPS^{-1}=D$則D之特徵值$\lambda_k, k\in\{1,2......n\}$滿足$-1<\lambda_k<1$。

證明：

若此矩陣遞迴數列收斂

由定理一得$A_n=P^{n-1}\left[A_1-\left(I_n-P\right)^{-1}Q\right]+\left(I_n-P\right)^{-1}Q$

若$\lambda_k, k\in\{1,2......n\}$滿足$-1<\lambda_k<1$則

$SPS^{-1}=D$，$SP^kS^{-1}=D^k=0$ as $k\to\infty$

且$\lim\limits_{n\to\infty}P^{n-1}\left[A_1-\left(I_n-P\right)^{-1}Q\right]=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\left(I_n-P\right)^{-1}Q$

定理六：$A_i=\sum_{j=1}^{k}P_jA_{i-j}$ 收斂，且$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & \cdots & \cdots & P_k \\ I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}$之對角化形式

$S\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & \cdots & \cdots & P_k \\ I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}S^{-1}=D$中$D$為主對角矩陣，則$D$的特徵值

$\lambda_t, t\in\{1,2......kn\}$滿足$-1<\lambda_t<1$ $\ni \lambda_t^x\to 0$ as $x\to\infty$

證明：

在此先以矩陣二階遞迴為例：

給定一$n\times m$矩陣數列$A_n=PA_{n-1}+QA_{n-2}$, 若此矩陣遞迴數列收斂,

令$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，則$A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}(PA_{n-1}+QA_{n-2})=PA+QA$,

所以$(P+Q-I)A=0$

假若$P+Q-I$可逆，則$A=0$

接著了解收斂矩陣的性質：

由定理三得$\begin{bmatrix} A_n \\ A_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_1 \end{bmatrix}$

令$\begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}$的對角化形式為$S^{-1}DS$，其中$D$為特徵值構成的主對角矩陣

冪矩陣$\begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}^k$可表示成$\begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}^k = S^{-1}D^kS$

其中$D^k = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^k & & \\ & \ddots & \\ & & {\lambda_{2\mathrm{n}}}^k \end{bmatrix}$

若每一特徵值都滿足$-1 < \lambda_i < 1$，$\lambda_i^k \to 0$,，則可知D^k收斂。

將這性質推廣到k階矩陣遞迴數列。

給定一k階$n \times m$矩陣數列$A_i = \sum_{j=1}^{k} P_j A_{i-j}$，其中$P_k$為已知$n \times n$矩陣，

A_i為已知$n \times m$矩陣，若此矩陣數列收斂，先由定理四得：

$$\begin{bmatrix} A_i \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{i-k+1} \\ A_{i-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & \cdots & \cdots & P_k \\ I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}^{i-k} \begin{bmatrix} A_k \\ \vdots \\ \vdots \\ A_2 \\ A_1 \end{bmatrix}$$

令$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & \cdots & \cdots & P_k \\ I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & I & 0 \end{bmatrix} = S^{-1}DS, D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{kn} \end{bmatrix}$

則$\lambda_t, t \in \{1, 2......kn\}$滿足$-1 < \lambda_t < 1 \ni \lambda_t^x \to 0 \text{ as } x \to \infty$

若此矩陣遞迴數列 $\sum_{j=1}^{k} P_j - I$ 可逆，則 $\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & \cdots & \cdots & P_k \\ I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}^{i-k}$ 收斂至 0

圖形討論：給定一階 2×1 矩陣遞迴數列 $A_n = PA_{n-1} + Q$，其中 P, Q 為已知 2×2 矩陣，A_1 為 2×1 矩陣，試求 A_n 在 $X-Y$ 平面上圖形？

討論：

根據定理五，$A_n = P^{n-1}\left[A_1 - (I_n - P)^{-1} Q\right] + (I_n - P)^{-1} Q$

將 P 對角化得 $P = SDS^{-1}$

由對角矩陣 D 之特徵值可知其斂散性

(一)假若矩陣 D 之特徵值 λ_1, λ_2 滿足 $-1 < \lambda < 1$

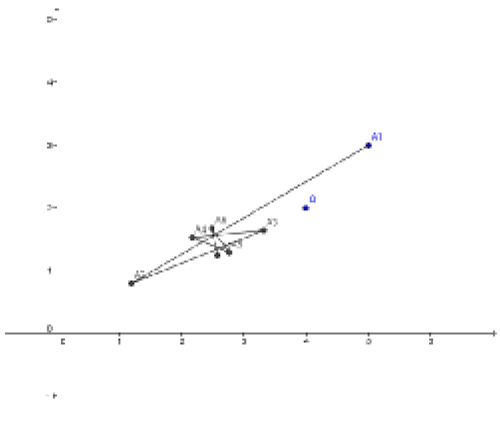
則此遞迴數列收斂

因特徵值若為負值，其 n 次方將正負跳動

我們可歸類出三種圖形如下：

情形一：$\lambda_1, \lambda_2 < 0$

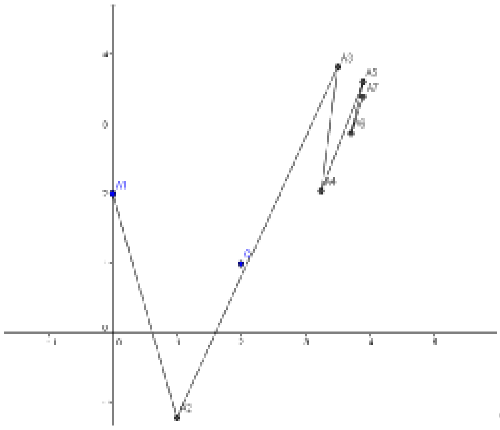
因為兩特徵值皆正負跳動使得 A_n 呈螺旋狀收斂，並向 $(I_n - P)^{-1} Q$ 收斂。



（圖 1.1）

情形二：$\lambda_1 \lambda_2 < 0$

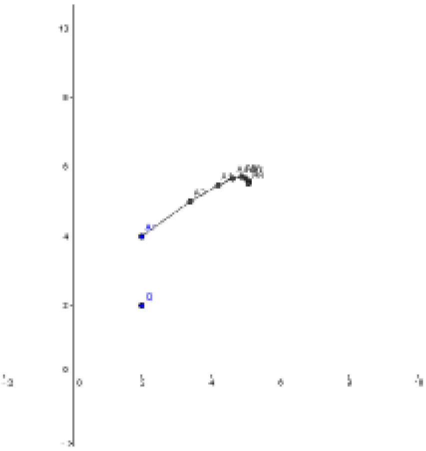
因為其中一個特徵值正負跳動使得 A_n 摺疊跳動，並向 $(I_n - P)^{-1} Q$ 收斂。



(圖 1.2)

情形三：$\lambda_1,\lambda_2>0$

A_n 直接收斂不會有跳動現象。



(圖 1.3)

(二)假若矩陣 D 之特徵值 λ_1,λ_2 滿足 $1<\lambda$ 或 $\lambda<-1$

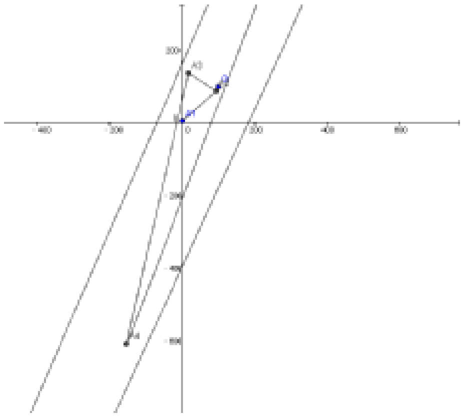
則此遞迴數列發散

因特徵值若為負值，其 n 次方將正負跳動

我們可歸類出三種圖形如下：

情形一：$\lambda_1,\lambda_2<0$

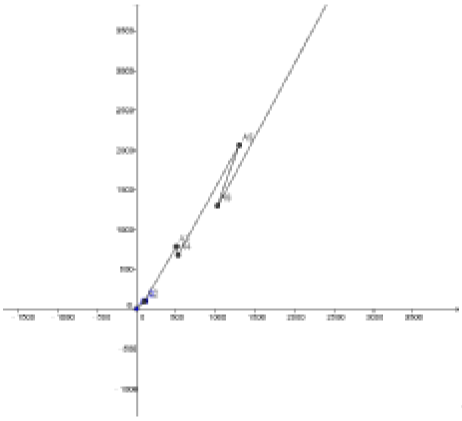
因為特徵值的正負跳動使得 A_n 呈螺旋向外發散。



(圖 2.1)

情形二：$\lambda_1\lambda_2<0$

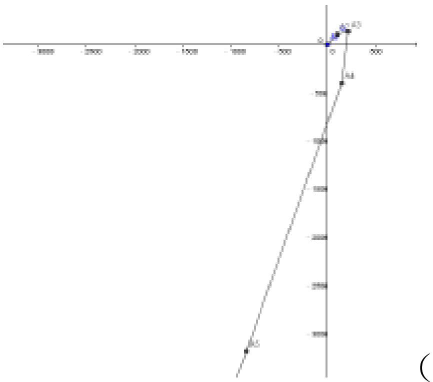
因為其中一個特徵值正負跳動使得 A_n 摺疊跳動發散。



(圖 2.2)

情形三：$\lambda_1,\lambda_2>0$

A_n 直接發散不會有跳動現象。



(圖 2.3)

例子一：給定一 2×2 矩陣二階遞迴數列 $A_n=\begin{bmatrix}-16 & 30\\ -12 & 22\end{bmatrix}A_{n-1}+\begin{bmatrix}57 & -90\\ 36 & -57\end{bmatrix}A_{n-2}$，

$A_1=\begin{bmatrix}8 & -5\\ 2 & 3\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 7 & -4\end{bmatrix}$ 求 $A_n=?$

討論：(特徵方程式)

$$\begin{bmatrix}-16 & 30\\ -12 & 22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}57 & -90\\ 36 & -57\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{bmatrix}$$

兩矩陣同時可對角化，利用特徵方程式求 α,β

$$\alpha=\frac{\begin{bmatrix}-16 & 30\\ -12 & 22\end{bmatrix}\pm\sqrt{\begin{bmatrix}-16 & 30\\ -12 & 22\end{bmatrix}^2+4\begin{bmatrix}57 & -90\\ 36 & -57\end{bmatrix}}}{2}\text{(取正)}$$

$$\beta = \frac{\begin{bmatrix} -16 & 30 \\ -12 & 22 \end{bmatrix} \mp \sqrt{\begin{bmatrix} -16 & 30 \\ -12 & 22 \end{bmatrix}^2 + 4\begin{bmatrix} 57 & -90 \\ 36 & -57 \end{bmatrix}}}{2} \text{(取負)}$$

$$\alpha = \frac{\begin{bmatrix} -16 & 30 \\ -12 & 22 \end{bmatrix} + \sqrt{\begin{bmatrix} 124 & -180 \\ 72 & -104 \end{bmatrix}}}{2}$$

$$\beta = \frac{\begin{bmatrix} -16 & 30 \\ -12 & 22 \end{bmatrix} - \sqrt{\begin{bmatrix} 124 & -180 \\ 72 & -104 \end{bmatrix}}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\begin{bmatrix} -16 & 30 \\ -12 & 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\sqrt{\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}}{2}$$

$$\beta = \frac{\begin{bmatrix} -16 & 30 \\ -12 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\sqrt{\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}}{2}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} -38 & 60 \\ -24 & 38 \end{bmatrix}$$

$$A_n = (\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -38 & 60 \\ -24 & 38 \end{bmatrix})A_{n-1} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -38 & 60 \\ -24 & 38 \end{bmatrix}A_{n-2}$$

$$A_n - \begin{bmatrix} -38 & 60 \\ -24 & 38 \end{bmatrix}A_{n-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}(A_{n-1} - \begin{bmatrix} -38 & 60 \\ -24 & 38 \end{bmatrix}A_{n-2})$$

$$A_n - \begin{bmatrix} -38 & 60 \\ -24 & 38 \end{bmatrix}A_{n-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}^{n-2}(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -38 & 60 \\ -24 & 38 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}) \quad \cdots\cdots (*)$$

$$A_n = (\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -38 & 60 \\ -24 & 38 \end{bmatrix})A_{n-1} - \begin{bmatrix} -38 & 60 \\ -24 & 38 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}A_{n-2}$$

$$A_n - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}A_{n-1} = \begin{bmatrix} -38 & 60 \\ -24 & 38 \end{bmatrix}(A_{n-1} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}A_{n-2})$$

$$A_n-\begin{bmatrix}6&0\\0&6\end{bmatrix}A_{n-1}=\begin{bmatrix}-38&60\\-24&38\end{bmatrix}^{n-2}\left(\begin{bmatrix}2&3\\7&-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&0\\0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&-5\\2&3\end{bmatrix}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

$$(*)\times\alpha-(**)\times\beta$$

$$\left(\begin{bmatrix}6&0\\0&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-38&60\\-24&38\end{bmatrix}\right)A_n=$$

$$\begin{bmatrix}6&0\\0&6\end{bmatrix}^{n-1}\left(\begin{bmatrix}2&3\\7&-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-38&60\\-24&38\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&-5\\2&3\end{bmatrix}\right)-\begin{bmatrix}-38&60\\-24&38\end{bmatrix}^{n-1}\left(\begin{bmatrix}2&3\\7&-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&0\\0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&-5\\2&3\end{bmatrix}\right)$$

$$A_n=\begin{bmatrix}-1&\frac{15}{8}\\-\frac{3}{4}&\frac{11}{8}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}6^{n-1}&0\\0&6^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}186&-367\\123&-238\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&3\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-2)^{n-1}&0\\0&2^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3\\-3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-46&33\\-5&-22\end{bmatrix}\right)$$

$$A_n=\begin{bmatrix}-1&\frac{15}{8}\\-\frac{3}{4}&\frac{11}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}31\cdot6^n-535\cdot(-2)^{n-1}+489\cdot2^{n-1}&-367\cdot6^{n-1}-660\cdot(-2)^{n-1}+627\cdot2^{n-1}\\123\cdot6^{n-1}-321\cdot(-2)^{n-1}+163\cdot2^n&-238\cdot6^{n-1}-396\cdot(-2)^{n-1}+209\cdot2^n\end{bmatrix}$$

$$A_n=\begin{bmatrix}\frac{357}{8}\cdot6^n-\frac{535}{8}\cdot(-2)^{n-1}-\frac{1467}{8}\cdot2^{n-1}&-\frac{317}{4}\cdot6^{n-1}-\frac{165}{2}\cdot(-2)^{n-1}-\frac{1881}{8}\cdot2^{n-1}\\\frac{1167}{8}\cdot6^{n-1}-\frac{321}{8}\cdot(-2)^{n-1}-\frac{1141}{8}\cdot2^n&-52\cdot6^{n-1}-\frac{99}{2}\cdot(-2)^{n-1}-\frac{1463}{8}\cdot2^n\end{bmatrix}$$

例子二：給定一2×2矩陣二階遞迴數列 $A_n=\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}A_{n-1}+\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&\frac{-9}{2}\\\frac{-9}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}A_{n-2}$，

$A_1=\begin{bmatrix}9&-7\\2&4\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}-6&3\\8&1\end{bmatrix}$ 求 $A_n=?$

討論：利用分塊矩陣

令 $X_n=\begin{bmatrix}A_{n+1}\\A_n\end{bmatrix}$

$$\therefore X_{n+1}=\begin{bmatrix}A_{n+2}\\A_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}A_{n+1}+\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&\frac{-9}{2}\\\frac{-9}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}A_n\\\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}A_{n+1}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}A_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&\frac{3}{2}&\frac{-9}{2}\\3&2&\frac{-9}{2}&\frac{3}{2}\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{n+1}\\A_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&\frac{3}{2}&\frac{-9}{2}\\3&2&\frac{-9}{2}&\frac{3}{2}\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}X_n$$

$$X_n=\begin{bmatrix}1&2&\frac{3}{2}&\frac{-9}{2}\\3&2&\frac{-9}{2}&\frac{3}{2}\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}^{n-1}X_1\ \Rightarrow\begin{bmatrix}A_{n+1}\\A_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&\frac{3}{2}&\frac{-9}{2}\\3&2&\frac{-9}{2}&\frac{3}{2}\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}A_2\\A_1\end{bmatrix}$$

對角化得$$\begin{bmatrix}\frac{-1}{16}&\frac{-1}{16}&\frac{3}{16}&\frac{3}{16}\\\frac{-3}{10}&\frac{-1}{10}&0&\frac{3}{5}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{-1}{8}&\frac{-1}{8}\\\frac{9}{80}&\frac{-7}{80}&\frac{-3}{16}&\frac{17}{80}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&\frac{3}{2}&\frac{-9}{2}\\3&2&\frac{-9}{2}&\frac{3}{2}\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-2&3&3\\3&2&9&-3\\5&-1&1&-1\\3&1&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A_{n+1}\\A_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2&3&3\\3&2&9&-3\\5&-1&1&-1\\3&1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}\frac{-1}{16}&\frac{-1}{16}&\frac{3}{16}&\frac{3}{16}\\\frac{-3}{10}&\frac{-1}{10}&0&\frac{3}{5}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{-1}{8}&\frac{-1}{8}\\\frac{9}{80}&\frac{-7}{80}&\frac{-3}{16}&\frac{17}{80}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6&3\\8&1\\9&-7\\2&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{155}{16}-\frac{11}{5}\cdot 2^n-\frac{9}{8}\cdot 3^n-\frac{633}{80}\cdot(-3)^{n-1}&\frac{-65}{16}-\frac{7}{5}\cdot 2^n+\frac{7}{8}\cdot 3^n+\frac{579}{80}\cdot(-3)^{n-1}\\\frac{93}{16}+\frac{11}{5}\cdot 2^n-\frac{9}{8}\cdot 3^{n+1}-\frac{211}{80}\cdot(-3)^n&\frac{-39}{16}+\frac{7}{5}\cdot 2^n+\frac{7}{8}\cdot 3^{n+1}+\frac{193}{80}\cdot(-3)^n\\\frac{155}{16}-\frac{11}{5}\cdot 2^{n-1}-\frac{9}{8}\cdot 3^{n-1}+\frac{211}{80}\cdot(-3)^{n-1}&\frac{-65}{16}-\frac{7}{5}\cdot 2^{n-1}+\frac{7}{8}\cdot 3^{n-1}-\frac{193}{80}\cdot(-3)^{n-1}\\\frac{93}{16}+\frac{11}{5}\cdot 2^{n-1}-\frac{9}{8}\cdot 3^n-\frac{211}{80}\cdot(-3)^{n-1}&\frac{-39}{16}+\frac{7}{5}\cdot 2^{n-1}+\frac{7}{8}\cdot 3^n+\frac{193}{80}\cdot(-3)^{n-1}\end{bmatrix}$$

$$A_n=\begin{bmatrix} \frac{155}{16}-\frac{11}{5}\cdot 2^{n-1}-\frac{9}{8}\cdot 3^{n-1}+\frac{211}{80}\cdot(-3)^{n-1} & \frac{-65}{16}-\frac{7}{5}\cdot 2^{n-1}+\frac{7}{8}\cdot 3^{n-1}-\frac{193}{80}\cdot(-3)^{n-1} \\ \frac{93}{16}+\frac{11}{5}\cdot 2^{n-1}-\frac{9}{8}\cdot 3^{n}-\frac{211}{80}\cdot(-3)^{n-1} & \frac{-39}{16}+\frac{7}{5}\cdot 2^{n-1}+\frac{7}{8}\cdot 3^{n}+\frac{193}{80}\cdot(-3)^{n-1} \end{bmatrix}$$

例子三：從矩陣等比級數和討論矩陣遞迴數列級數和

討論矩陣的等比數列合：(此處的公比同為矩陣)

$$S_n=B_1+B_2+\cdots\cdots\cdots+B_n$$

其中 $B_n=KB_{n-1}$

$$S_n=B_1+KB_1+\cdots\cdots\cdots+K^{n-1}B_1$$

$$KS_n=KB_1+K^2B_1+\cdots\cdots\cdots+K^nB_1$$

兩式相減得：

$$S_n-KS_n=B_1-K^nB_1$$

$$(I-K)S_n=(I-K^n)B_1$$

$$S_n=(I-K)^{-1}(I-K^n)B_1$$

考慮一階矩陣遞迴 $A_n=PA_{n-1}+Q$ ，利用特徵方程式解之：

尋找一 $n\times n$ 矩陣 α 使得 $\alpha=P\alpha+Q$

$$A_n-\alpha=PA_{n-1}+Q-\alpha$$

$$Q-\alpha=-P\alpha$$

$$A_n-\alpha=P(A_{n-1}-\alpha)$$

$$A_n-\alpha=P^{n-1}(A_1-\alpha)$$

$$A_n=P^{n-1}(A_1-\alpha)+\alpha$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}A_n=\sum_{k=1}^{n}\left[P^{n-1}(A_1-\alpha)+\alpha\right]$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}P^{n-1}(A_1-\alpha)+\alpha n$$

此時可將問題視為矩陣 $(A_1-\alpha)$ 的等比數列合，其中公比為 P

$$S_n = (I-P)^{-1}(I-P^n)(A_1-\alpha)+\alpha n$$

$$S_n = (I-P)^{-1}(I-P^n)\left[A_1-(I-P)^{-1}Q\right]+(I-P)^{-1}Qn$$

我們另外可討論當矩陣等比數列收斂到0時，其數列合也會收斂：

$$S_n = (I-Q)^{-1}(I-Q^n)B_1$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = (I-Q)^{-1}B_1$$

接著我好奇矩陣二階遞迴數列合，由定理三知：

若 $A_n = PA_{n-1}+QA_{n-2}$

令 $X_n = \begin{bmatrix} A_{n+1} \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_1 \end{bmatrix}$

$$S_{Xn} = \begin{bmatrix} S_{n+1} \\ S_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}^{k-1} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_1 \end{bmatrix}$$

$$S_{Xn} = \begin{bmatrix} S_{n+1} & 0 \\ S_n & 0 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}^{k-1} \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ A_1 & 0 \end{bmatrix}$$

套用矩陣等比級數和公式

$$S_{Xn} = \begin{bmatrix} S_{n+1} & 0 \\ S_n & 0 \end{bmatrix} = \left(I-\begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1}\left(I-\begin{bmatrix} P & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}^{n}\right)\begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ A_1 & 0 \end{bmatrix}$$

即可得 $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$

陸、 研究結果與結論

（一）、一階矩陣遞迴式 $A_n = PA_{n-1}+Q$，可求得 A_n 之一般式：

$$A_n = P^{n-1}\left[A_1-(I_n-P)^{-1}Q\right]+(I_n-P)^{-1}Q$$

（二）、二階矩陣遞迴式 $A_n = PA_{n-1}+QA_{n-2}$ 若 P,Q 有交換律，可求得 A_n 之一般式：

$$A_n = (\alpha-\beta)^{-1}\left[\alpha^{n-1}(A_2-\beta A_1)-\beta^{n-1}(A_2-\alpha A_1)\right]$$

其中$\alpha=\dfrac{P\pm\sqrt{P^2+4Q}}{2}$，$\beta=\dfrac{P\mp\sqrt{P^2+4Q}}{2}$

特別地：

若$P^2+4Q=0$則$A_n=\alpha^{n-1}\left(A_1-\gamma\right)+\gamma$，其中$\gamma=\alpha\gamma+\alpha^{n-2}\left(A_2-\alpha A_1\right)$

（三）、k階$n\times m$矩陣遞迴數列$A_i=\sum_{j=1}^{k}P_jA_{i-j}$其中$P_k$為已知$n\times n$矩陣，

A_i為已知$n\times m$矩陣，則$\begin{bmatrix} A_i \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{i-k+1} \\ A_{i-k} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & \cdots & \cdots & P_k \\ I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}^{i-k}\begin{bmatrix} A_k \\ \vdots \\ \vdots \\ A_2 \\ A_1 \end{bmatrix}$

並由此得A_i

（四）、一階$n\times m$矩陣遞迴數列$A_n=PA_{n-1}+Q$收斂，其中P為已知$n\times n$矩陣Q, A_1為已知$n\times m$矩陣，且令P之對角化形式$SPS^{-1}=D$則D之特徵值

$\lambda_k, k\in\{1,2......n\}$滿足$-1<\lambda_k<1$。

（五）、$A_i=\sum_{j=1}^{k}P_jA_{i-j}$收斂，且$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & \cdots & \cdots & P_k \\ I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}$之對角化形式

$S\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & \cdots & \cdots & P_k \\ I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}S^{-1}=D$中$D$為主對角矩陣，若且唯若$D$的特徵

值$\lambda_t, t\in\{1,2......kn\}$滿足$-1<\lambda_t<1 \ni \lambda_t^x\to 0$ as $x\to\infty$

（六）、一階2×1矩陣遞迴數列$A_n=PA_{n-1}+Q$，其中P,Q為已知2×2矩 陣，

A_1為2×1矩陣，A_n在$X-Y$平面上圖形可分類為以下：

收斂：假若矩陣P之對角化形式SDS^{-1}，其中主對角矩陣D之特徵值λ_1,λ_2滿足

$-1<\lambda<1$，則此遞迴數列收斂，依λ值正負又分以下三類情形：

情形一：λ_1,λ_2<0

因為兩特徵值皆正負跳動使得A_n呈螺旋狀收斂，並向$(I_n-P)^{-1}Q$收斂。

情形二：$\lambda_1\lambda_2$<0

因為其中一個特徵值正負跳動使得A_n摺疊跳動，並向$(I_n-P)^{-1}Q$收斂。

情形三：λ_1,λ_2>0

A_n直接收斂不會有跳動現象。

發散：假若矩陣P之對角化形式SDS^{-1}，其中主對角矩陣D之特徵值λ_1,λ_2滿足

$1<\lambda$或$\lambda<-1$，則此遞迴數列發散，依λ值正負又分以下三類情形：

情形一：λ_1,λ_2<0

因為特徵值的正負跳動使得A_n呈螺旋向外發散。

情形二：$\lambda_1\lambda_2$<0

因為其中一個特徵值正負跳動使得A_n摺疊跳動發散。

情形三：λ_1,λ_2>0

A_n直接發散不會有跳動現象。

柒、 應用及未來展望

本研究討論矩陣的遞迴數列其運算與性質，渴望在其他情境例子上可使用，研究解果也能減少對於矩陣遞迴數列的運算，未來希望能夠討論更多這方面的性質。圖形上我們討論一階矩陣遞迴式得疊代圖形，未來希望能夠更進一步討論二階或是高階遞迴式之圖形。

捌、 參考文獻

1.南一版高中數學第 2、4 冊

2. A. G. Kostyuchenko, K. A. Mirzoev《Three-term recurrence relations with matrix coefficients. The completely indefinite case》

3.Stephen H. Friedberg 《Linear Algebra》

4. http://ccjou.wordpress.com/(線代啟示錄)

5. http://mathworld.wolfram.com/