摘要

本篇報告討論基於切片的葉柄三維重建問題。其背景是：採取存儲二維切片資訊，利用切片資訊重建原物體三維形態的方法，可以有效地保存和利用三維資訊。此技術在實際中有很大的用途，在醫學和其他領域有廣泛的應用。如要將人體全部三維資訊，包含內部錯綜複雜的結構，完整地存儲在電腦中，以現在的技術也是有一定難度的，但若改用儲存人體切片資訊，使用時重建再現的方法，則是利用現有技術可以解決的。本論文假設葉柄可視為一類特殊的管道，該管道的表面是由球心沿著某一曲線（稱為中軸曲線）的球滾動包絡而成，其中軸曲線為直線，由半徑固定的球滾動包絡形成。

現有某管道的相繼20張平行切片圖像，記錄了管道與切片的交面。為簡化起見假設管道中軸曲線與每張切片有且只有一個交點，球半徑固定，切片間距以及圖像圖元的尺寸均為1。

目錄

壹、 研究動機

切片可用於瞭解生物組織、器官等的形態。例如，將樣本染色後切成厚約 1mm 的切片，在顯微鏡下觀察該橫斷面的組織形態結構。如果用單面刀片連續不斷地將樣本切成數十、成百的平行切片，可依次逐片觀察。根據拍照並採樣得到的平行切片數位圖像，運用電腦可重建組織、器官等準確的三維形態，因此，我們可以希望能透過利用數學建模的研究，以期未來能以數位的方式模擬一些生醫方面的活動。

貳、研究目的

本報告基於題中對葉柄形態的假設，建立管道中軸曲線參數方程，並綜合考慮實際情況中由於切片厚度及數位圖像離散化帶來的偏差，通過在每張切片圖像中搜索其中陰影區域所能包含的最大圓面，確定最適管半徑為 R=？，在此基礎上，將每張切片圖像中陰影區域所能包含的半徑接近 R 的圓面圓心作為中軸曲線與各切片交點（即中心點）的候選點集合。本模型使用了二種改進演算法對該候選點集進行篩選以確定較接近實際的交點。

本研究將會分成兩個部份：

1. 建立葉柄切片的數學模型
2. 不同的建模系統與實物的誤差探討。

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦、MathType5、Microsoft Office Word2003、Wolfram Mathematica 6、Bloodshed Dev-C++

肆、建模問題分析

建模方法:

(一).建模假設

一. 假設樣本葉柄可視為一類特殊的管道，該管道的表面是由球心沿著某一曲線的球滾動包絡而成，球半徑固定。

二. 假設管道中軸曲線與每張切片有且只有一個交點，即將切片視為無厚度的切平面。

三. 假設切片間距以及圖像圖元的尺寸均為1。

四. 假設管道中軸曲線處處連續，且充分光滑。

五. 假設兩點間距離根據“四捨五入”原則。

(二). 名詞解釋與對應符號：

(1) M_i : 第 i 張切片的點陣圖資訊矩陣，為方便起見，我們也稱其為第 i 個切平面。

(2) M : 點陣圖資訊矩陣集合，$M=\{M_i\,|0\le i\le 19\}$。

(3) $\begin{cases} x=X(z) \\ y=Y(z) \end{cases}$ ：管道中軸曲線參數方程，其中 $0\le z\le 19$。

(4) R ：管半徑，即沿中軸曲線滾動球的半徑。

(5) P_i：中心點，即管道中軸曲線與第 i 個切平面的交點，根據上述方程可知 $P_i=(X(i),\ Y(i))$，其中 $0\le i\le 19$。

(6) SP_i ： P_i 的候選點的集合，為定義在某切平面 M_i 上所有被判定為最適圓面 $(r\ge R)$ 的圓。

(三). 模型建立及求解：

由以上分析，中軸曲線可以通過確定 $P_i\quad(0\le i\le 19)$ 的座標來求得。因此問題即轉化為如何確定 $P_i\quad(0\le i\le 19)$ 的座標。

由於中軸曲線為球心滾動軌跡，因此 P_i 為球心。而**理想**無厚度切片的圖像為切平面與沿中軸曲線滾動的球體相交成的圓面疊加而成，即右圖中各圓周的包絡區域：

下面說明的命題對本模型有基礎意義:。

在該包絡區域中可容納的最大圓面以 P_i 為圓心，R 為半徑。

說明：假設中軸曲線上存在另一點 P'，以其為球心，以 R 為半徑作球，則該球與此切平面相交成的圓面的半徑不大於 R，若為 R，則可知 P' 與此切平面的距離為 0，換句話說，P' 在此切平面上。這與題設中軸曲線與每個切平面有且只有一個交點矛盾。因此可證明在該包絡區域中可容納的最大圓面是以 P_i 為球心，以 R 為半徑的圓。

(四). 建模流程：

步驟一：令 $R=0$。

步驟二：若以 P 為圓心，R 為半徑的圓面包含在點陣圖 M_i 中，繼續下一步驟，
　　　　否則轉步驟四。

步驟三： $R=R+1$，轉步驟二。

步驟四：返回 $R-1$，以上過程，用 $C++$，執行此過程。

(五). 建模系統分析：

上述實驗目的提到， 我們要對不同的建模系統與實物進行誤差探討
建模系統可分為:
系統一，系統二
分別將 $i = 0 \sim 19$ 帶入中軸曲線方程式，得到 P_i ，進行誤差計算，以誤差值比較兩種系統的優劣

由於分析每張切片發現圖案皆接近圓形，故此處我們進行簡化，假設第i張切片的圖形為以 P_i 為圓心，最適半徑的圓。(此圖稱為 N_i)

誤差計算方式:直接比較 M_i 和 N_i 的 $0-1$ 矩陣，計算相同點的數目(S_i)

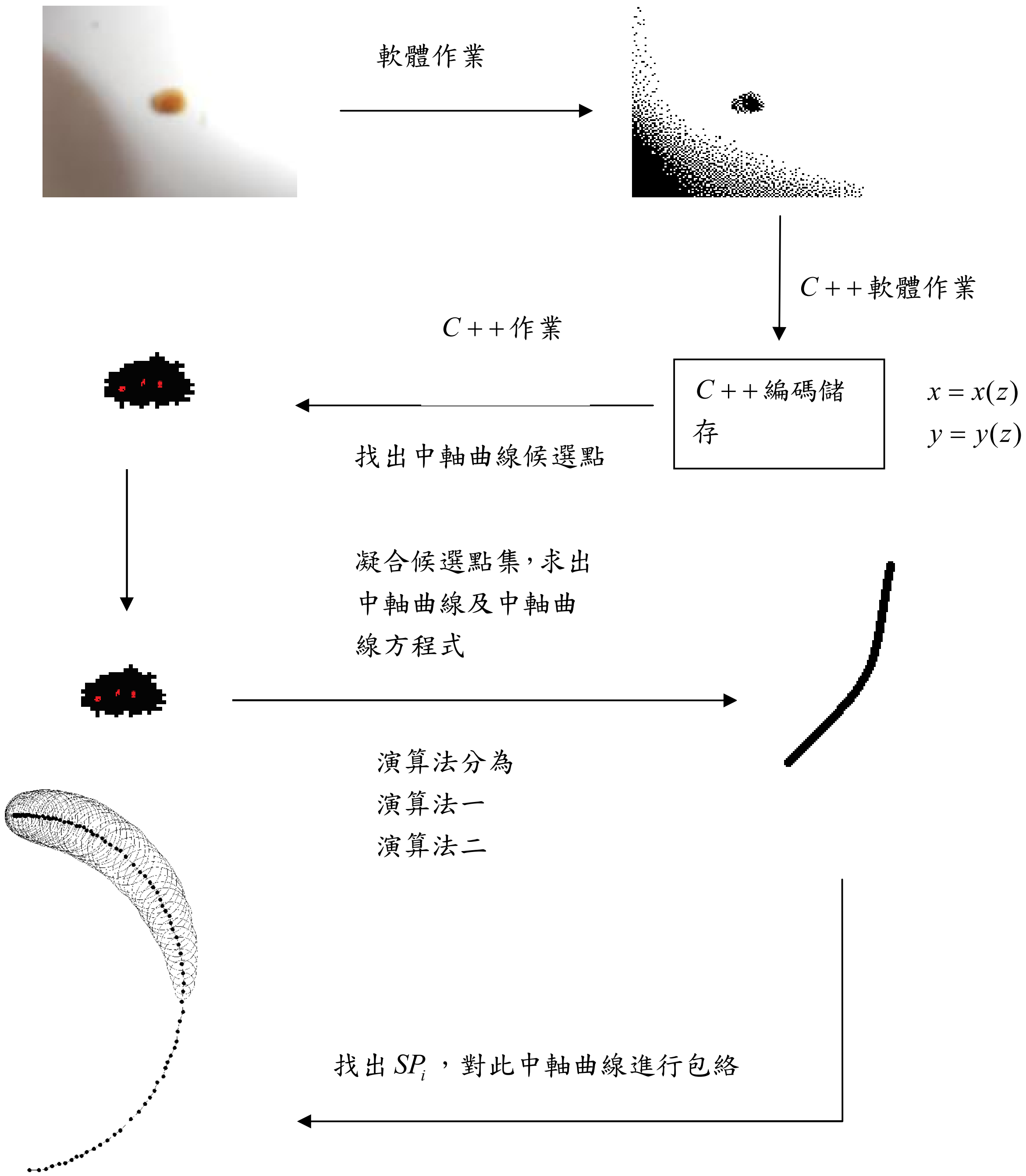
誤差率 $= {}^{16384 - Si}\!\!\diagup_{16384} \times 100\%$

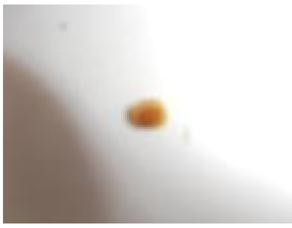
伍、研究方法與過程

由於數位圖像離散化會造成一定的陰影和誤差，其實際形態與再現圖是有一定偏離的。根據題中假設，假設某些葉柄可視為一類特殊的管道，該管道的表面是由球心沿著某一曲線滾動的半徑固定的球包絡而成，該曲線稱為中軸曲線，球半徑也稱為管半徑。

本模型將基於上述假設重建葉柄的三維形態，使其精確化，參數化。
建模過程:
數據分析流程

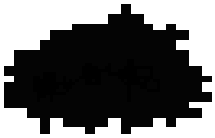
首先，將切片拍照後，利用軟體將其轉成黑白的點陣圖，再利用 C++程式將黑色的部分用1儲存，白色的部分用 R 儲存，然後再用另一個 C++程式，求出候選點集，在將這些點凝合，求出中軸曲線方程式，最後再將每個切片結合起來，搭配中軸曲線，建模出三維葉柄模型


軟體作業
C++軟體作業
C++作業
C++編碼儲存
$x = x(z)$
$y = y(z)$
找出中軸曲線候選點
凝合候選點集，求出
中軸曲線及中軸曲
線方程式
演算法分為
演算法一
演算法二
找出 SP_i，對此中軸曲線進行包絡



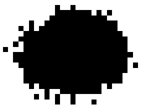
誤差率

$$=\frac{16384-Si}{16384}\times 100\%$$



演算法一:將某一切平面 M_i 所有的點代入 $GetMaxR(M_i, P)$，將求得的半徑排序，選取半徑最大的圓面圓心作為 P_i，迴圈即得所有中心點座標及對應最大圓面半徑。

作業流程如圖:



→ 代入 $GetMaxR(M_i, P)$

↓

求得半徑排序

← 將半徑排序中，最適半徑設為此模型的管半徑

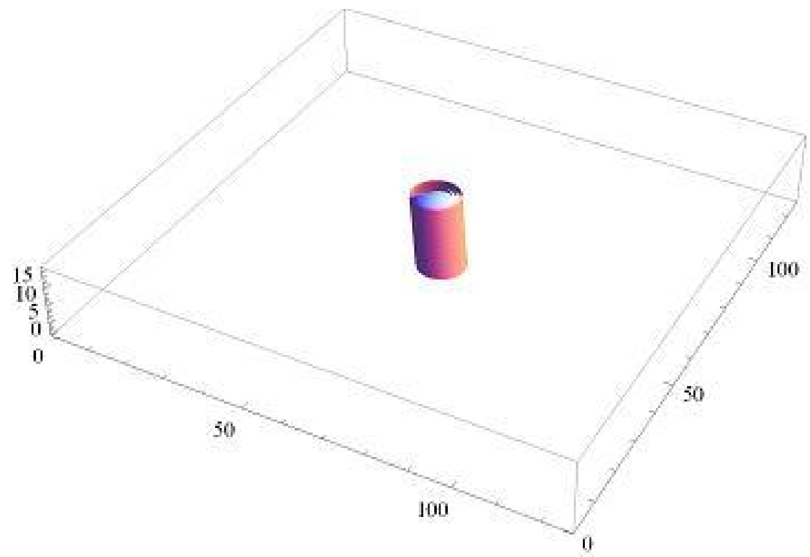
↓

搭配由候選點集第一個找到的點，收集起來，凝合出中軸曲線方程式

→ 將中軸曲線用求出的管半徑所形成的圓進行包絡，即完成演算法一建模

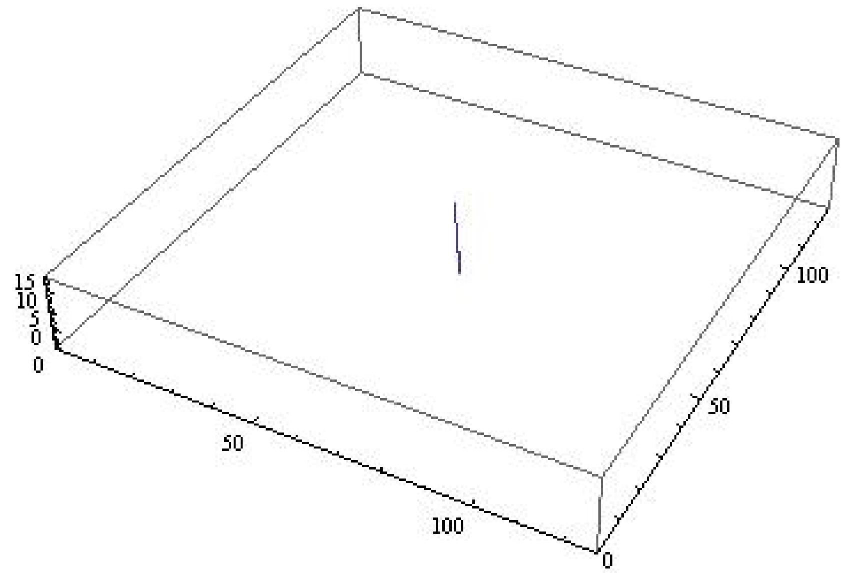
演算法一結果探討:

利用演算法一所建立的模型如下



中軸曲線方程式: $x = -0.074z + 63.1$
$y = -0.003z + 64.029$

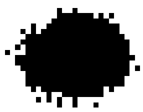
中軸曲線繪圖如下:



由圖可知，建模的結果接近實物，不過細節的部分仍有些許的差距，原因是演算法一是利用候選點集中第一個找到的點進行中軸曲線的凝合，所以在某些切片我們所選擇的點不是真正中軸曲線上的點，而有些偏差，故所凝合的中軸曲線也不會完全與原物相同， 再加上管半徑的誤差，整個建模結果與實物產生了誤差。

演算法二:切片內所有 P_i 的侯選點集 SP_i 的資訊，確定 P_i 的座標，可以提高結果的精度。

建模流程如圖:



代入 $GetMaxR(M_i, P)$

求得半徑排序:…………

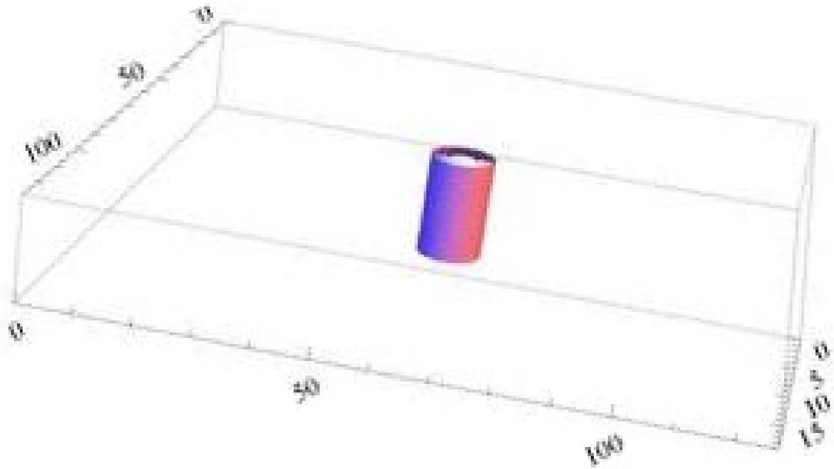
將半徑排序中，最適半徑設為此模型的管半徑。

搭配由候選點集中，將位於中間的點收集起來，凝合出中軸曲線方程式。

將中軸曲線用求出的管半徑所形成的圓進行包絡，即完成演算法二建模。

演算法二結果探討:

利用演算法二所建立的模型如下:

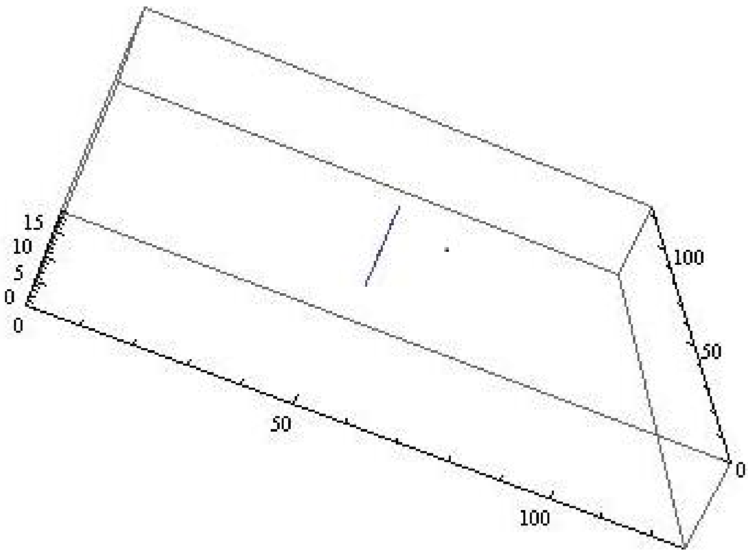


中軸曲線方程式:

$$x = -0.016z + 62.9$$

$$y = -0.008z + 64.529$$

中軸曲線繪圖如下:



在演算法二中，我們預期會更接近真正的中軸曲線，因為我所選取的點是候選點及分佈中，位於中間的點，理論上應該會比演算法一正確，但還是有些許的差距，再加上管半徑的誤差，整個建模結果與實物比起，仍有些偏頗，但兩者的比較的真實情形，等等會在誤差分析中探討。

建模誤差分析:

$$\text{誤差率} = {}^{16384 - Si}\!/_{16384} \times 100\%$$

1. 演算法一：

編號	誤差率	編號	誤差率
1	0.939941%	11	0.476074%
2	0.360107%	12	0.524902%
3	0.482178%	13	0.805664%
4	0.482178%	14	0.537109%
5	0.579834%	15	0.384521%
6	0.714111%	16	0.915527%
7	0.622559%	17	0.750732%
8	0.701904%	18	0.891113%
9	0.701904%	19	0.750732%
10	0.714111%	20	0.671387%

平均：0.65329%

2. 演算法二：

編號	誤差率	編號	誤差率
1	0.939941%	11	0.299072%
2	0.286865%	12	0.347900%
3	0.567627%	13	1.080322%
4	0.616455%	14	0.7990561%
5	0.720215%	15	0.610352%
6	0.598145%	16	1.489258%
7	0.933838%	17	0.476074%
8	0.939941%	18	0.579834%
9	0.939941%	19	0.512695%
10	0.622559%	20	0.592041%

平均：0.697632%

陸、研究結果與結論

(一).

由於原始切片數位圖像精度只能達到1，理論上應有±0.5的誤差允許範圍，因此模型結果中半徑應處於6±0.5範圍內。此外模型結果中求得中軸曲線與各切平面交點均為整數座標，這將造成捨入誤差。

事實上模型中假設中軸曲線是過切面的某個像素點的。實際情況中，中軸曲線可能不過任何像素點，而是從相鄰的象素點之間穿過，但理論上模型結果給出中軸曲線應充分接近實際中軸曲線，因此在不超過原始資料精度條件下，模型精度總是可以達到要求的。

根據葉柄形態特點，其中軸曲線應該是連續並充分光滑的，但求得的離散點插值結果不是很光滑，因此有必要進行多項式擬合，以得到充分光滑的曲線，這樣處理之後擬和中軸曲線應更加接近實際中軸曲線的形態。

(二).

在演算法一中，在收集候選點集時，我們選的是找到的第一個點，而演算法二中，我們找的是候選點集中，點分佈的中間值，我們可以合理的預期：
演算法二所凝合出的中軸曲線方程式會比演算法一接近實際的中軸曲線，但在誤差分析中，透過演算法二凝合出的中軸曲線比演算法一的中軸曲線誤差為大，令我們始料未即。

(三).

後來討論，為何結果不是我們所預料的，最後有以下幾個推論:

1. 可能樣本數太少
2. 可能真實的中軸曲線原本就比較接近候選點集點分佈中，偏向第一個選到的點，再加上樣本本體形狀較規律，應此相鄰的切片其實差距不大，綜合以上原因，才會發生演算法一 所凝合的中軸曲線會比演算法二準確
3. 演算法二凝合的中軸曲線誤差率為0.697632%，而演算法一凝合的中軸曲線誤差率為0.65329%，其實差別不大，也許增加切片數量或建模樣本，便可看出兩種演算法之間的差異，可能會符合我們的預期，但也可能越不與我們的預期相符。

(四).

由於我們從誤差探討中發現演算法二會比演算法一來的不準確，不過差距不大，但就以平均值會比單一變數來得接近實際值的經驗而言，如此結果令我們感到不解，於是我們希望能把此研究作進一步的研伸探討，經過討論之後，我們可以往以下兩個方面進行深入研究：

1.

增加選取的樣本數量，對同一個樣本切成越多數量的切片，切片與切片之間的差距也縮小，此舉可以降低我們捨入的誤差，進而達到更精確取樣

2.

改變所選取的樣本，往樣本型態較不規律的方面的方面著手，如此一來，切片與切片之的相似度會降低，因此，不同的演算法之間的差距就會較明顯的表現出來，也可以判斷演算法的優劣。

柒、應用及未來展望

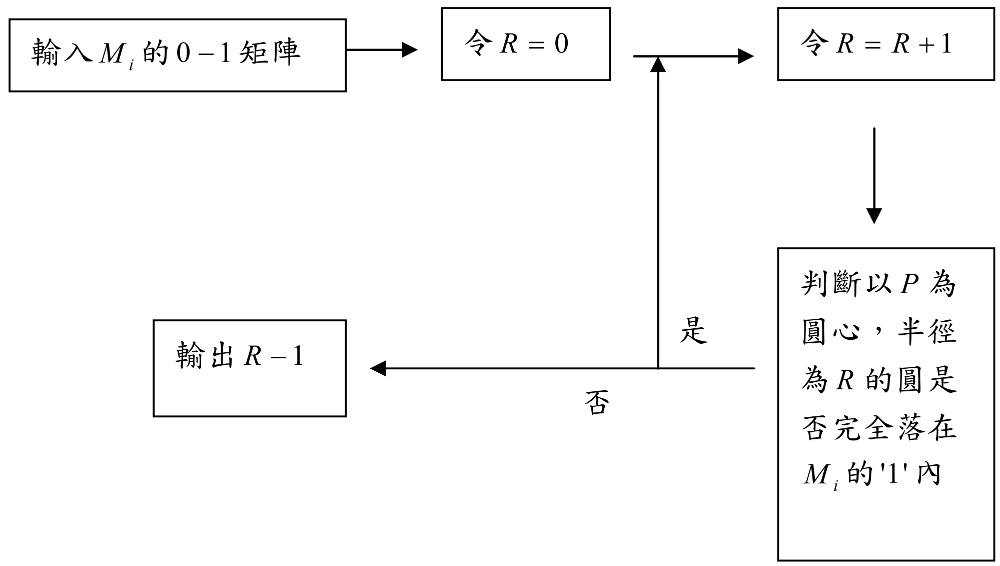
在很多研究中，如果要實際操作實物進行研究，有時會比較耗時、耗力，而且其他條件、變因在現實中也不好控制，但如果能有一套完整且有系統的方法把實物建立在電腦中，不但可以儲存數據，還可以利用軟體進行模擬，此舉可以避免許多現實中無法避免的影響，雖然有些部分還是會和現實有差距，但在可接受的範圍內，利用數學建模搭配電腦程式模擬，比起操作實物來得經濟實惠和效率，故本報告研究葉柄的建模，以期未來能延伸到更多面向的建模，進而達到利用電腦程式模擬實驗之目的。

捌、參考文獻

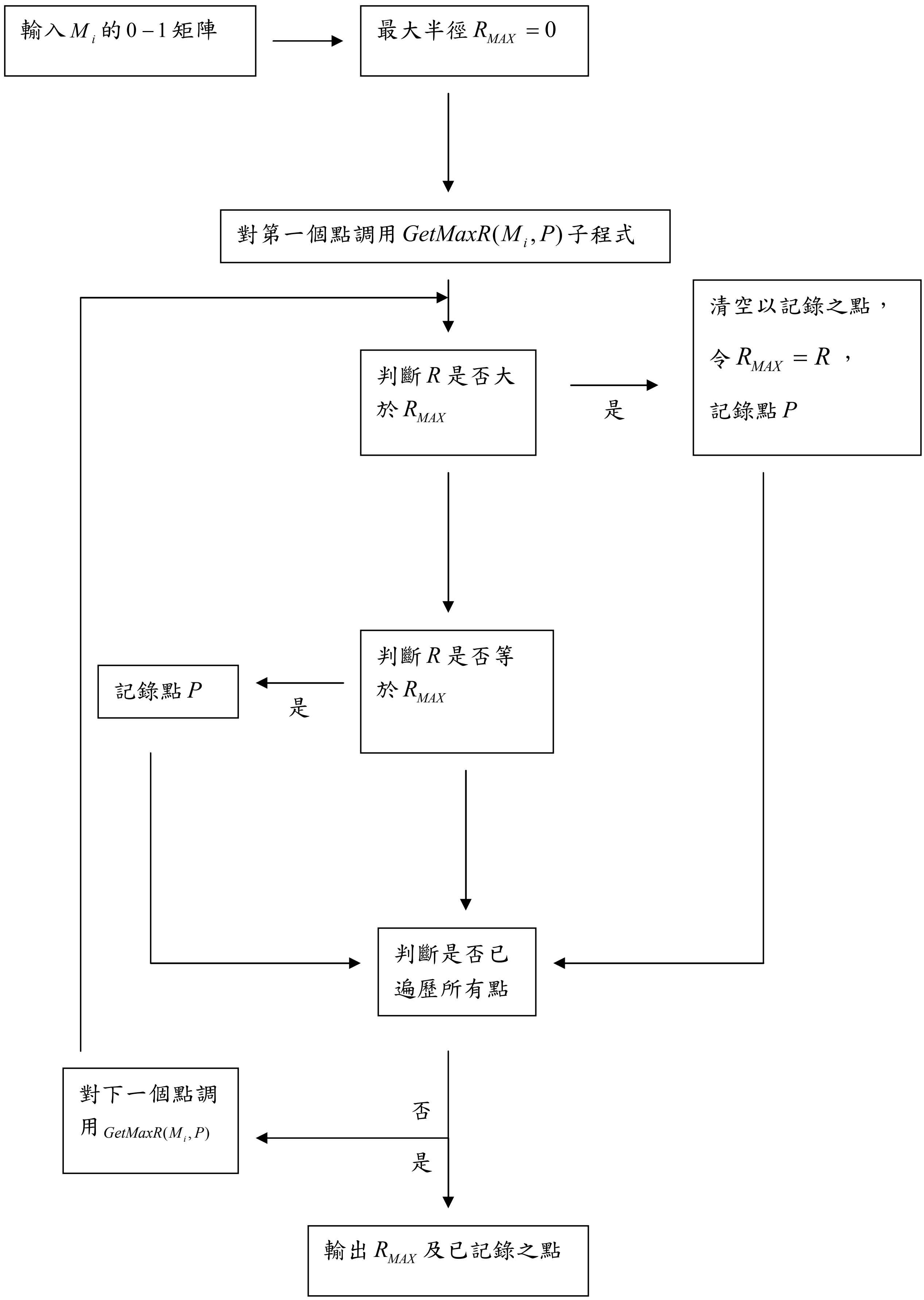
1. 汪国昭。血管的三維重建問題。2001 年
2. Mathematica 資料參考中心
   http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html

玖、附錄

1. $GetMaxR(M_i, P)$



2.取得最大半徑的方法


輸入 M_i 的 $0-1$ 矩陣
最大半徑 $R_{MAX}=0$
對第一個點調用 $GetMaxR(M_i,P)$ 子程式
判斷 R 是否大於 R_{MAX}
是
清空以記錄之點，令 $R_{MAX}=R$，記錄點 P
判斷 R 是否等於 R_{MAX}
是
記錄點 P
判斷是否已遍歷所有點
否
對下一個點調用 $GetMaxR(M_i,P)$
是
輸出 R_{MAX} 及已記錄之點