# 摘要

本次作品主要針對二次曲線上弦長來做出討論，又搭配機率，可求出其過焦點弦長的期望值，再從中尋找它的性質。先分別計算出拋物線、橢圓、以及雙曲線的弦長函數，利用弦長與$x$軸所夾銳角$q$來表示出來，再利用機率密度函數來做積分，即可求出期望值。而這其中，拋物線與雙曲線皆非封閉，因此須利用到狹積分，我們這裡只討論出所選擇的機率密度函數的種類，使其積分有意義。我們主要將焦點放在橢圓，橢圓的封閉性，使其機率密度函數可以任取，我們希望能在橢圓中找出一些性質，並延伸至三維空間等等。

# 目錄

## 壹、研究動機

在上網搜尋有關期望值之性質時，無意間看見了一篇 2014 年的國際科展作品，當中作者利用了圓的弦長函數，求出圓的弦長期望值。對於恰學到這裡的我，對能將圓以及統計組合在一起的創意深感佩服，這時我突然冒出一個想法:若此時函數圖形不是圓，而是變成橢圓，甚至是拋物線、雙曲線時，會擦出甚麼樣的火花呢?這一連串的想法讓我開始了這段研究。

## 貳、研究目的

1. 探討二次曲線過焦點弦長期望值。
2. 尋找橢圓弦長的性質。

## 參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、繪圖軟體 *GeoGebra*

## 肆、方程式說明

在此報告中所討論之二次曲線標準式如下:

(1)**拋物線**: $y^2=4cx$ .

(2)**橢圓**: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b\right)$ .

(3)**雙曲線**: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ .

且此報告中所取的**機率密度函數**若無特別說明均為均勻分佈

$p(x)=\frac{1}{p}$ . $\forall x\in(\frac{-p}{2},\frac{p}{2})$

# 伍、研究過程

## 一、問題簡化與解決問題的思路：

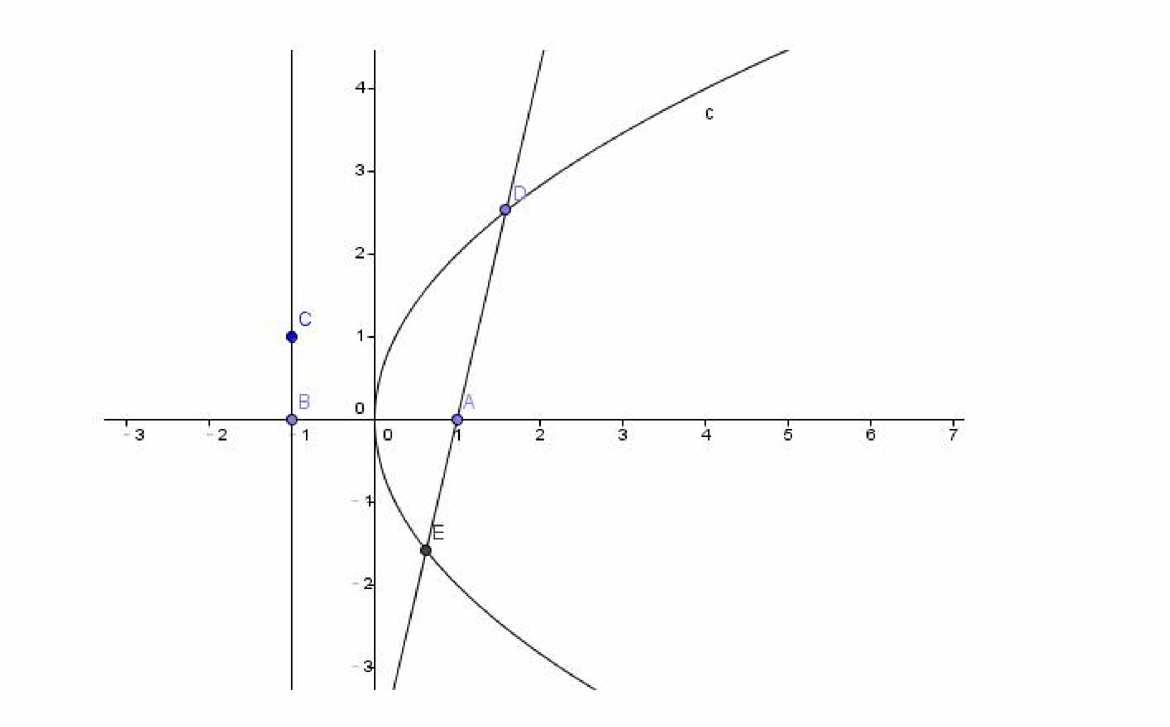
我們先假設一弦長過二次曲線焦點，先利用焦點座標$(c,0)$，以及弦長與$x$軸的夾角$q$，利用參數式來表示出弦長以及圖形的交點座標。

## 二、主要問題結果與討論：

### (一)過焦點弦長函數 $f(q)=s$：

**1.拋物線**

在處理這個問題之前，我們先去假設一過焦點之弦，其中與$x$軸的夾角為$q$，因此，此弦長的兩端點(即與圖形之交點座標)可使用與$q$有關的參數式表達出來，再利用兩點座標求距離公式找出弦長。




(圖一)

由於與$x$軸的夾角為$q$，因此我們可以得到$\overline{DE}$直線的方向向量為$(\cos q,\sin q)$。利用方向向量，以及焦點的座標$(c,0)$，可將$D$、$E$的座標表現如$(c+\cos qt,\sin qt)$。再利用兩點座標公式，即可求得弦長(即$\overline{DE}$)的長。

我們先假設$D$、$E$的座標分別為$\left(c+\cos q t_1,\sin q t_1\right)$、$\left(c+\cos q t_2,\sin q t_2\right)$.

$$\overline{DE}=\sqrt{\left[c+\cos q t_1-\left(c+\cos q t_2\right)\right]^2+\left(\sin q t_1-\sin q t_2\right)^2}$$

$$=\sqrt{\cos^2 q\left(t_1-t_2\right)^2+\sin^2 q\left(t_1-t_2\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(t_1-t_2\right)^2}=\left|t_1-t_2\right|$$

又將座標代入圖形方程式，得:

$$\sin^2 q t^2=4c\left(c+\cos q t\right)$$

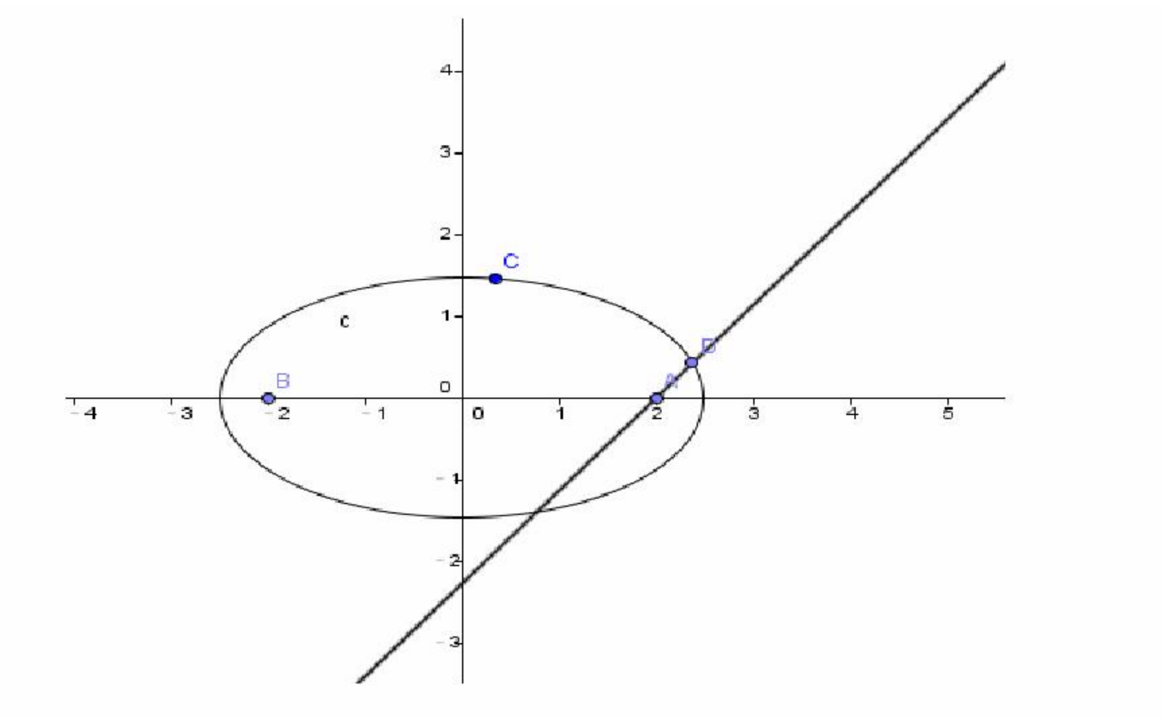
$$\sin^2 q t^2-4c\cos q t-4c^2=0\Rightarrow t=\frac{4c\cos^2 q\pm\sqrt{16c^2}}{2\sin^2 q}.$$

$$\left|t_1-t_2\right|=\frac{2\sqrt{16c^2}}{2\sin^2 q}=\frac{4c}{\sin^2 q}$$

因此我們可以得到拋物線過焦點弦長函數$s=f\left(q\right)=\dfrac{4c}{\sin^2 q}$.

**2.橢圓**

與拋物線之處理方法相同，一樣利用與$x$軸之夾角，表示出兩點，並用兩點距離公式算出橢圓過焦點弦長。




(圖二)

假設交於$D$、$E$兩點，其中座標為$\left(c+\cos q t_1, \sin q t_1\right)$、$\left(c+\cos q t_2, \sin q t_2\right)$.

將座標代入橢圓函數$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$b^2\left(c^2+2ct\cos q+\cos^2 q t^2\right)+a^2\sin^2 q t^2=a^2b^2$$

$$t^2\left(a^2\sin^2 q+b^2\cos^2 q\right)+2b^2c\cos q t+b^2c^2-a^2b^2=0$$

$$t=\frac{-2b^2c\cos q\pm\sqrt{D}}{2\left(a^2\sin^2 q+b^2\cos^2 q\right)}$$

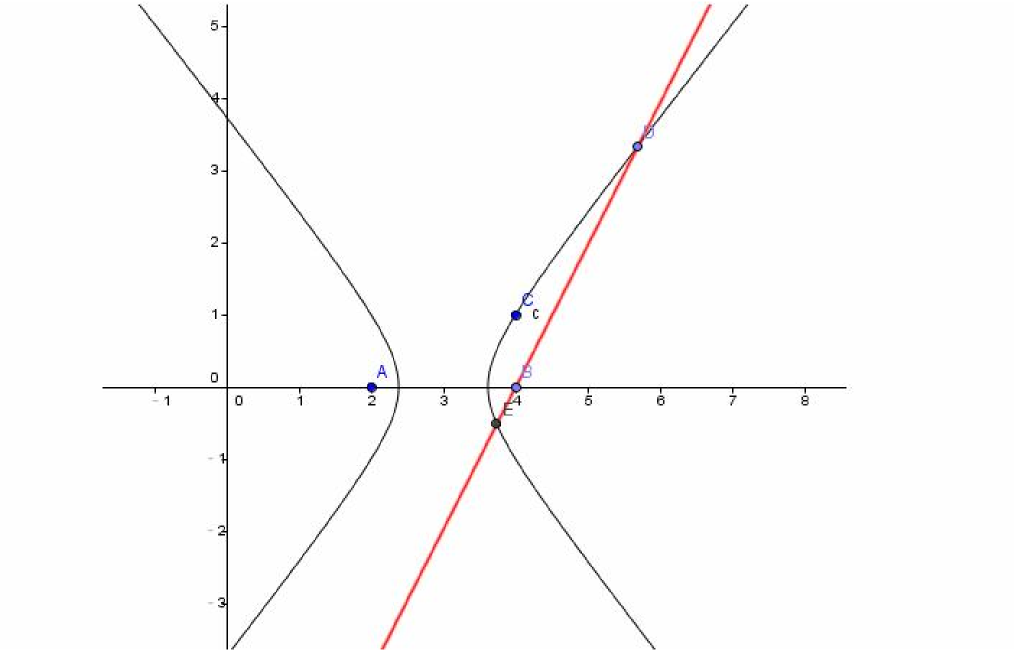
$$\mathbf{Q}\ \overline{DE}=\left|t_1-t_2\right|$$

$$\begin{aligned}\left|t_1-t_2\right|&=\frac{2\sqrt{D}}{2\left(a^2\sin^2 q+b^2\cos^2 q\right)}\\&=\frac{\sqrt{4b^4c^2\cos^2 q+4b^4a^2\sin^2 q+4b^6\cos^2 q}}{a^2\sin^2 q+b^2\cos^2 q}\\&=\frac{2b^2\sqrt{c^2\cos^2 q+a^2\sin^2 q+b^2\cos^2 q}}{a^2\sin^2 q+b^2\cos^2 q}\\&=\frac{2ab^2}{a^2\sin^2 q+b^2\cos^2 q}\\&=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2 q}\end{aligned}$$

因此我們可以得到橢圓過焦點弦長函數$s=f(x)=\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2 q}$.

3.**雙曲線**

與前面兩者處理方法相同，一樣找到弦長端點的座標，再利用其座標即可找出它們的弦長。




(圖三)

假設交於 $D$ 、 $E$ 兩點，兩點座標為 $\left(c+\cos q t_1, \sin q t_1\right)$ 、 $\left(c+\cos q t_2, \sin q t_2\right)$ .

將兩點座標代入雙曲線函數 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ .

$$b^2y^2-a^2x^2=a^2b^2$$

$$b^2\left(c^2+2ct\cos q+\cos^2 t^2\right)-a^2\sin^2 q t^2=a^2b^2$$

$$t^2\left(b^2\cos^2 q-a^2\sin^2 q\right)+2b^2c\cos q t+b^2c^2-a^2b^2=0$$

$$t=\frac{-2b^2c\cos q\pm\sqrt{D}}{2\left(b^2\cos^2 q-a^2\sin^2 q\right)}$$

$$\mathbf{Q}\ \overline{DE}=\left|t_1-t_2\right|$$

$$\left|t_1-t_2\right|=\frac{\sqrt{D}}{\left|b^2\cos^2 q-a^2\sin^2 q\right|}$$

$$=\frac{\sqrt{4b^4c^2\cos^2 q-4b^4\left(b^2\cos^2 q-a^2\sin^2 q\right)}}{\left|b^2\cos^2 q-a^2\sin^2 q\right|}$$

$$=\frac{2b^2\sqrt{c^2\cos^2 q-b^2\cos^2 q+a^2\sin^2 q}}{\left|b^2\cos^2 q-a^2\sin^2 q\right|}$$

$$=\frac{2ab^2}{\left|b^2\cos^2 q-a^2\sin^2 q\right|}$$

$$=\frac{2ab^2}{\left|c^2\cos^2 q-a^2\right|}$$

因此我們可以得到雙曲線過焦點的弦長函數$s=f(x)=\dfrac{2ab^2}{\left|c^2\cos^2 q-a^2\right|}$.

## (二)期望值以及機率密度函數的採取:

### 1.拋物線

由上可知，拋物線的弦長函數為$\dfrac{4c}{\sin^2 q}$，很明顯的可以發現，當$q=0$時，此弦長會趨近於無限大，我們在積分時也可得到相同的結果。在積分時，我們從$q=-\dfrac{p}{2}$積到$\dfrac{p}{2}$，機率函數取$p(x)=\dfrac{1}{p}$，可發現:

$$4c\times\frac{1}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{1}{\sin^2 q}dq=4c\times\frac{1}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\csc^2 q\,dq$$

$$=\frac{4c}{p}\left(\int_{0^+}^{\frac{p}{2}}\csc^2 q\,dq+\int_{-\frac{p}{2}}^{0^-}\csc^2 q\,dq\right)$$

$$=\frac{4c}{p}(-\cot q)\Big|_{0^+}^{\frac{p}{2}}+\frac{4c}{p}(-\cot q)\Big|_{-\frac{p}{2}}^{0^-}$$

我們發現，$\cot q$ 在$0^+$與$0^-$時會趨近於無限大，也就是說，此積分結果不會收斂，積分不存在。故機率密度函數並不能取常數函數，應該討論。

我們將此積分式分解後，可以得到:

$$4c\left(\int_{0^+}^{\frac{p}{2}}\csc^2 x p(x)\,dx+\int_{-\frac{p}{2}}^{0^-}\csc^2 x p(x)\,dx\right)$$

$$=4c\left(\int_{0^+}^{\frac{p}{2}}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{p(x)}{x^2}dx+\int_{-\frac{p}{2}}^{0^-}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{p(x)}{x^2}dx\right)$$

所以要使積分式有意義，等價於要使積分 $\int_{0^+}^{\frac{p}{2}} \frac{p(x)}{x^2}dx + \int_{-\frac{p}{2}}^{0^-} \frac{p(x)}{x^2}dx$ 有意義，即任何機率密度函數 $p(x)$ 使得上述積分有意義者均可作為我們要找的函數。

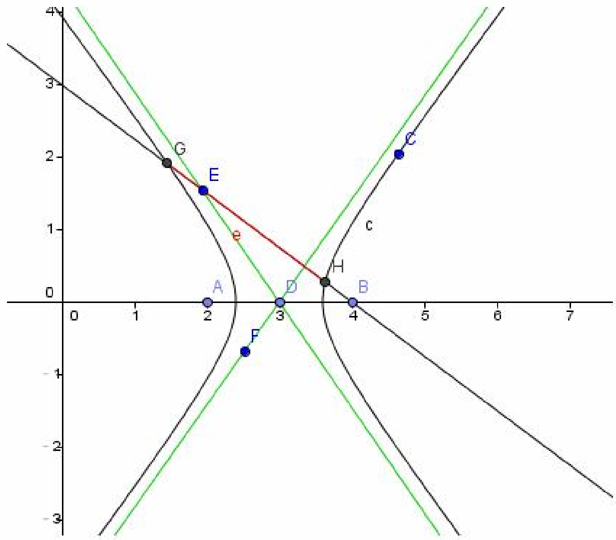
例如我們可以選取 $p(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \frac{1}{p - 2\arctan\frac{p}{2}}$ .

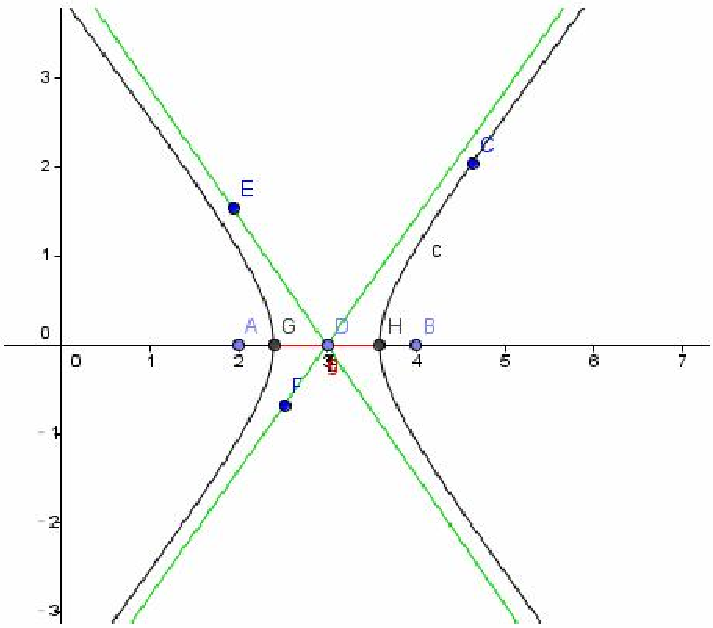
2.**雙曲線**

觀察雙曲線函數的圖形也可知道，雙曲線也有一些範圍的限制。我們先做出雙曲線函數的漸進線 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$，發現當與 $x$ 軸的夾角 $q$ 的範圍為從 $\arctan\left(-\frac{b}{a}\right)$ 到 $\arctan\frac{b}{a}$ 時，其與圖形的交點連線後所得到的弦長並沒有通過焦點，這與我們一開始所定義的「過焦點」弦長並不一致，因此在這哩，我們將這段範圍內的弦長屏除，也就是當我們在做積分時，就不會積分到此範圍，直接跳過。

以下利用圖形，更能清楚地表示。

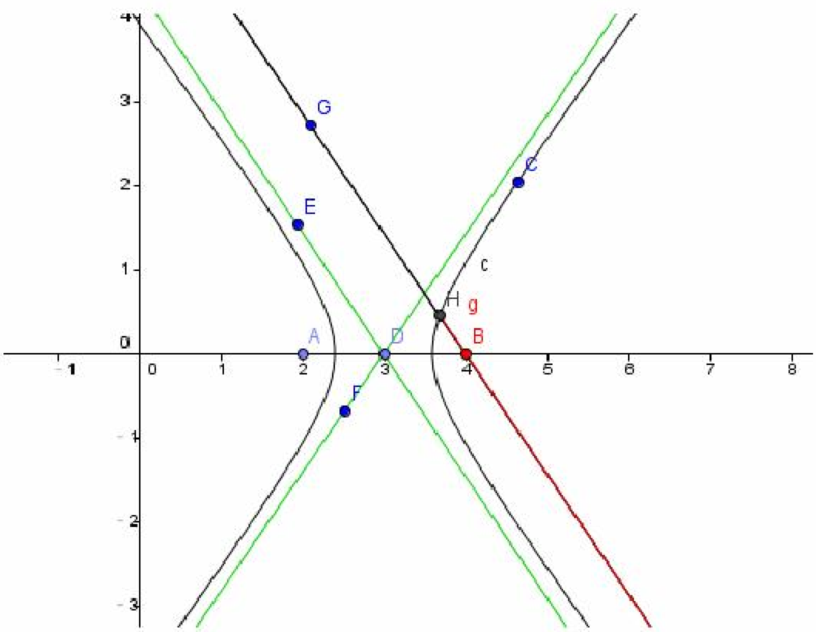
| |
|---|
| 當 $\arctan\left(-\frac{b}{a}\right) < q < \arctan\frac{b}{a}$ 時，弦長 $s$ 無意義 |

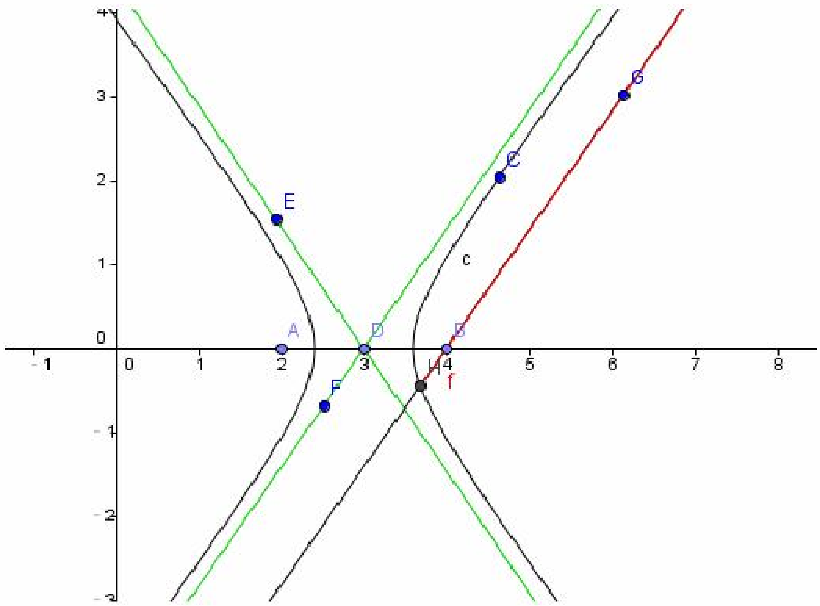


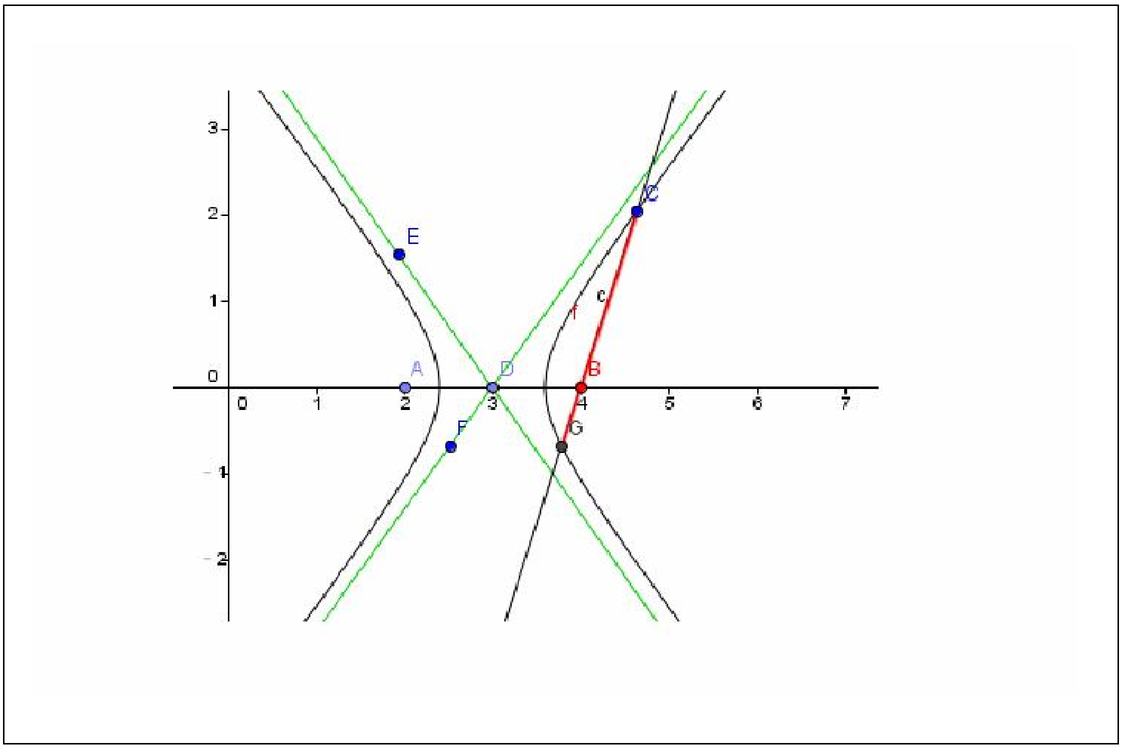

當 $q = \arctan\left(\pm\left(\dfrac{b}{a}\right)\right)$ 時，弦長 $s = \infty$

當 $-\frac{p}{2} \le q < \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) \vee \arctan\frac{b}{a} < q \le \frac{p}{2}$ 時，$s$ 才有意義




當 $-\frac{p}{2} \le q < \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) \vee \arctan\frac{b}{a} < q \le \frac{p}{2}$ 時，$s$ 才有意義




由上面幾個圖形可發現，當我們要求雙曲線弦長期望值時，必須分兩段積分，且機率函數不能為常數函數，因為當$q=\arctan\left(\pm\frac{b}{a}\right)$時，弦長為無限大，若直接做積分的話，此積分結果將不存在。

### 3.橢圓

與前面兩者不同的地方在於，橢圓為封閉圖形，因此我們要求期望值時，其機率密度函數可以任取，在此舉$p(x)=\frac{1}{p}$當作例子。

所求積分結果$I=\frac{2ab^2}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{dq}{a^2-c^2\cos^2 q}$

$$\mathbf{Q}\cos^2 q=\frac{1}{2}(1+\cos 2q)$$

$$\therefore I=\frac{2ab^2}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}\frac{2dq}{\left(2a^2-c^2\right)-c^2\cos 2q}=\frac{4ab^2}{p}\int_{0}^{\frac{p}{2}}\frac{d(2q)}{\left(2a^2-c^2\right)-c^2\cos 2q}$$

令$\tan q=t,\cos 2q=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$dt=\sec^2 q\,dq,d2q=\frac{2}{\sec^2 q}dt=\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\therefore I=\frac{4ab^2}{p}\int_{\infty}^{1}\frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\left(2a^2-c^2\right)-c^2\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$=\frac{4ab^2}{p}\int_{\infty}^{1}\frac{2dt}{\left(2a^2-c^2\right)\left(1+t^2\right)+c^2\left(t^2-1\right)}$$

$$=\frac{4ab^2}{p}\int_{\infty}^{1}\frac{2dt}{2a^2t^2+2\left(a^2-c^2\right)}$$

$$=\frac{4ab^2}{p}\int_{\infty}^{1}\frac{dt}{a^2t^2+b^2}$$

$$=\frac{4ab^2}{p}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2b^2}}\arctan\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}t+c\Big|_{\infty}^{1}\right)$$

$$=\frac{4ab^2}{p}\cdot\frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}$$

$$=\frac{4b}{p}\arctan\frac{a}{b}\ .$$

因此我們得到 $\boxed{\textbf{橢圓的過焦點弦長期望值為}\ \frac{4b}{p}\arctan\frac{a}{b}\ .}$

## (三)橢圓過焦點弦性質之討論:

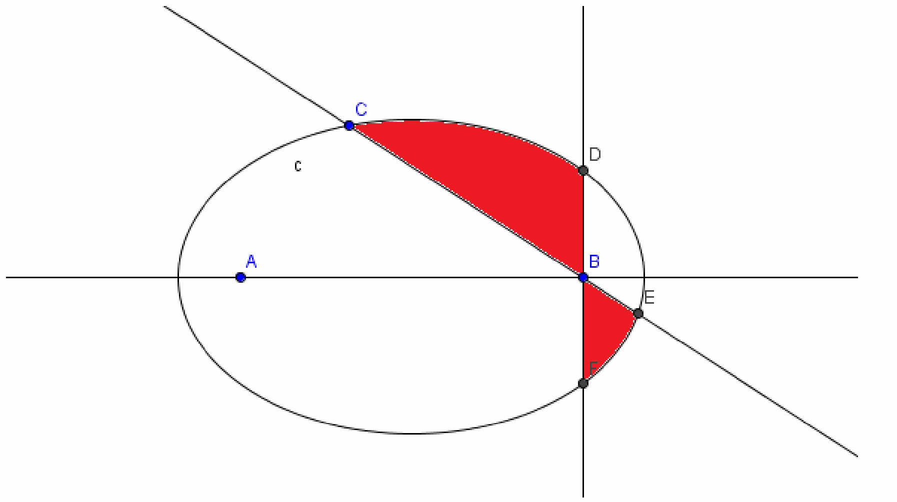
由(二)的結果可以發現，橢圓由於是封閉的圖形，因此並不會跟雙曲線以及拋物線一樣會有弦長無限大的問題，因此在這裡我們針對橢圓，來看看是不是有甚麼性質。

### 1. 橢圓過焦點弦旋轉面積之探討

若給定橢圓函數$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，當弦旋轉$q$時，則其掃過的面積多少?

我們在此先把情況分為兩種，一種為起始點的弦垂直長軸，另一種則為一般的情況，及起始弦與長軸夾任意角。

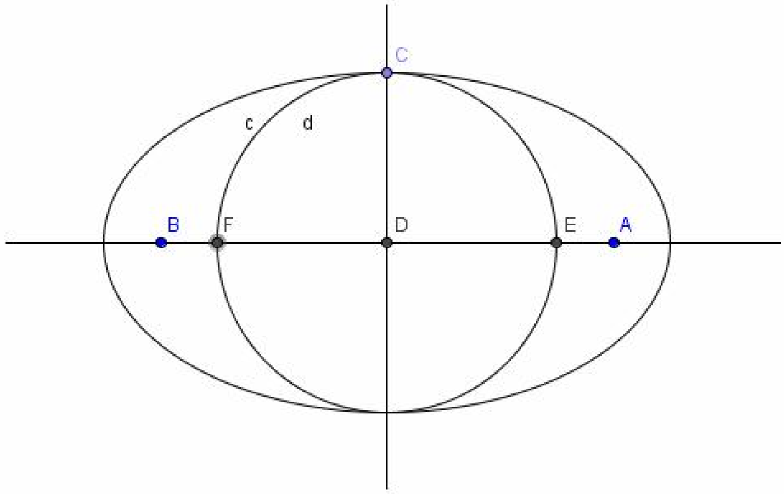
#### (1) 起始弦垂直長軸




(圖四)

圖中$\overline{DF}$(起始弦)垂直長軸直線$\overleftrightarrow{AB}$，而$\overline{CE}$則為終點弦，兩條弦之間夾了$q$，即$\angle CBD=q$，我們要算的面積即為塗色區域。

由於橢圓掃過的面積直接計算會有一定的困難度，因此我們先利用二階方陣的平面變換，先將橢圓的方程式變成圓，利用圓算出面積後，再將其面積值轉換回橢圓，這樣即可求出我們想要的值。




(圖四)

令橢圓圖色面積為$S$。

將橢圓以$y$軸作為基線作$x$軸$\dfrac{b}{a}$倍的伸縮，可以得到:

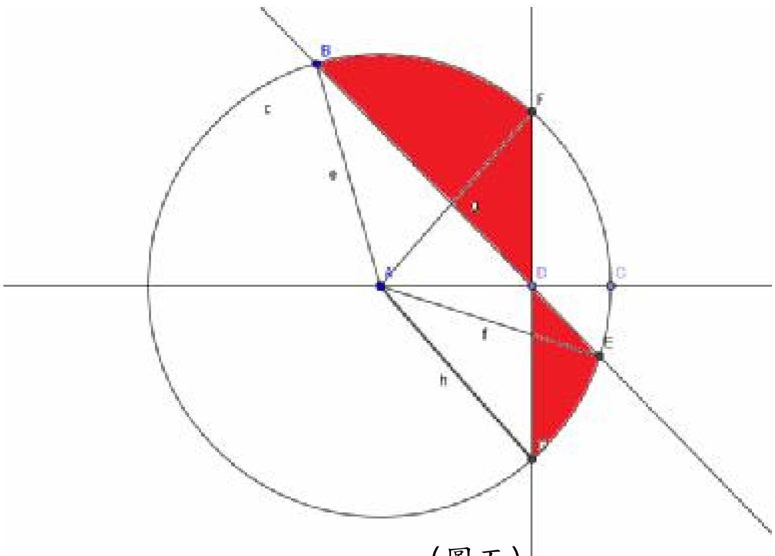
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{b}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{b}{a}x \\ y'=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{b}x' \\ y=y' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \frac{\frac{a^2}{b^2}x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \quad x'^2+y'^2=b^2$$

因此我們可以知道原本的方程式變成了$x'^2+y'^2=b^2$.

也因此原本的焦點$(c,0)$轉換成了$\left(\dfrac{bc}{a},0\right)$.

將方程式做轉換後，得到下圖:




(圖五)

其中圓 $A$ 的半徑為 $b$ ，$\overline{AC} \perp \overline{FG}$ ，$\overline{AD} = \dfrac{bc}{a}$ ，$\angle BDF = q$

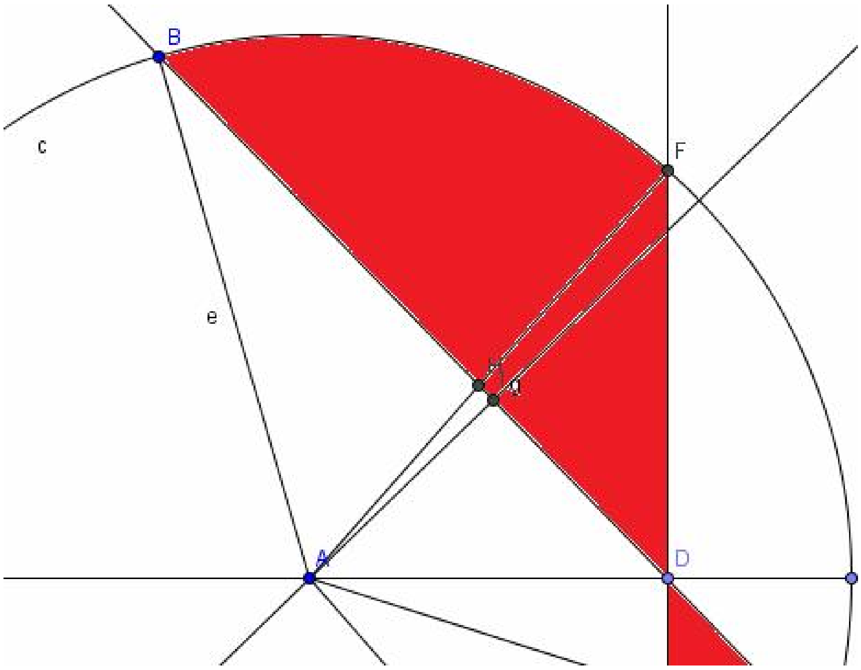
分析後我們得到，我們要算的圓形紅色面積 $S^{'}$ 即等於:

扇形 $BAF$ + 扇形 $EAG$ $+\Delta BAE + \Delta FAG - 2(\Delta BAD + \Delta ADG)$

**Q** $\angle BDF = q$ ，由圓內角性質知，$\dfrac{\angle BAF + \angle EAG}{2} = q$ ，$\angle BAF + \angle EAG = 2q$

$\therefore$ 扇形 $BAF$ + 扇形 $EAG$ $= \dfrac{1}{2} b^2 2q = b^2 q$ .

為了清楚說明，我們將 $\Delta BAD$ 放大，得圖:




(圖六)

我們先作過 $A$ 點垂直 $\overline{BD}$ 的直線 $\overset{\mathbf{suu}}{AI}$ ，並設 $\overline{AF}$ 交 $\overline{BD}$ 於 $H$ 點。

**Q** $\angle ADF = \dfrac{p}{2} = \angle AID$ 且 $\angle BDF = q$ ，$\therefore \angle IAD = q$

$$\Rightarrow \overline{AI} = \frac{bc}{a}\cos q \text{ 且 } \overline{DI} = \frac{bc}{a}\sin q \ .$$

$$\Rightarrow \overline{BI} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{bc}{a}\cos q\right)^2} = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\cos^2 q\right)} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 q}$$

$$\therefore \Delta BAE = 2\Delta BAI = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{bc}{a}\cos q \times \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 q} = \frac{b^2 c}{a^2}\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 q}\,\cos q$$

同理，$\overline{DF}=\sqrt{b^2-\left(\frac{bc}{a}\right)^2}=\sqrt{b^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)}=\frac{b^2}{a}\left(\mathbf{Q}\, a^2=b^2+c^2\right)$

$$\therefore \Delta GAF=2\Delta ADF=2\times\frac{1}{2}\times\frac{bc}{a}\times\frac{b^2}{a}=\frac{b^3c}{a^2}$$

又 $\Delta ADG=\Delta ADF=\frac{1}{2}\times\frac{b^2}{a}\times\frac{bc}{a}=\frac{b^3c}{2a^2}$

$$\mathbf{Q}\,\angle BAI=\arccos\frac{\overline{AI}}{\overline{AB}}=\arccos\frac{\frac{bc}{a}\cos q}{b}$$

$$\begin{aligned}\Delta BAD&=\frac{1}{2}\times\overline{BA}\times\overline{AD}\times\sin\angle BAD\\&=\frac{1}{2}\times b\times\frac{bc}{a}\times\sin\left(\angle BAI+\angle IAD\right)\\&=\frac{b^2c}{2a}\times\sin\left(\arccos\frac{\frac{bc}{a}\cos q}{b}+q\right)\\&=\frac{b^2c}{2a}\times\left[\sin\left(\arccos\frac{\frac{bc}{a}\cos q}{b}\right)\cos q+\cos\left(\arccos\frac{\frac{bc}{a}\cos q}{b}\right)\sin q\right]\\&=\frac{b^2c}{2a}\times\left[\sin\left(\arcsin\frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2\cos^2 q}}{b}\right)\cos q+\cos\left(\arccos\frac{c\cos q}{a}\right)\sin q\right]\end{aligned}$$

$\mathbf{Q}\sqrt{a^2-c^2\cos^2 q}<a$ $\therefore 0<\frac{\sqrt{a^2-c^2\cos^2 q}}{a}<1$，同理 $0<\frac{c\cos q}{a}<1$

$$\therefore \Delta BAD=\frac{b^2c}{2a}\times\left(\frac{\sqrt{a^2-c^2\cos^2 q}}{a}\cos q+\frac{c}{a}\cos q\sin q\right)$$

我們將所有的面積全部代入上面的式子，即可得到我們要的塗色面積即為

$$b^2q+\frac{b^2c}{a^2}\sqrt{a^2-c^2\cos^2 q}\cos q+\frac{b^3c}{a^2}-2\left[\frac{b^2c}{2a}\times\left(\frac{\sqrt{a^2-c^2\cos^2 q}}{a}\cos q+\frac{c}{a}\cos q\sin q\right)+\frac{b^3c}{2a}\right]$$

$$=b^2q+\frac{b^2c}{a^2}\sqrt{a^2-c^2\cos^2 q}\cos q+\frac{b^3c}{a^2}-\frac{b^2c}{a^2}\sqrt{a^2-c^2\cos^2 q}\cos q-\frac{b^2c^2}{a^2}\cos q\sin q-\frac{b^3c}{a}$$

$$=b^2q-\frac{b^2c^2}{a^2}\sin q\cos q\ .$$

因此我們得到圖色面積為 $b^2q-\dfrac{b^2c^2}{a^2}\sin q\cos q$ .

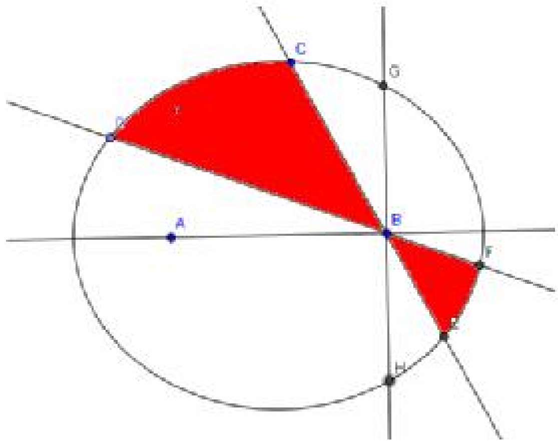
但這是在圓形的情況之下，我們還必須將面積轉為橢圓的面積。

由矩陣 $\begin{bmatrix}\dfrac{b}{a} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 知，橢圓的塗色面機會與圓形面積差了 $\dfrac{b}{a}$ 倍。

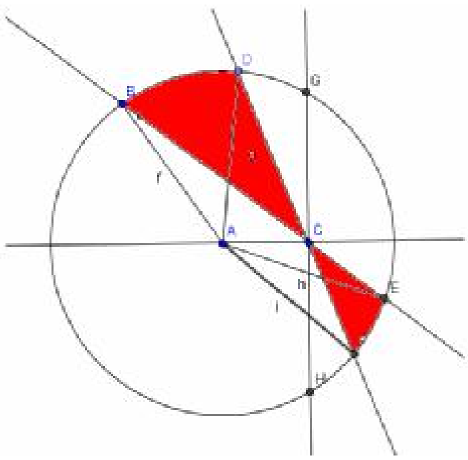
所以 $S\times\dfrac{b}{a}=S^{'}=b^2q-\dfrac{b^2c^2}{a^2}\sin q\cos q$ ，$S=abq-\dfrac{bc^2}{a}\sin q\cos q$

因此我們知道橢圓掃過的面積為 $abq-\dfrac{bc^2}{a}\sin q\cos q$ .

(2) **起始弦與垂直長軸的直線夾一個 $f$ 角**



我們一樣先把橢圓先轉換成圓形，得到下圖:



(圖七)

圖中 $\overrightarrow{GH} \perp \overrightarrow{AC}$ ，$\overline{DF}$ (起始弦)與 $\overrightarrow{GH}$ 夾一個 $f$ ，即 $\angle GCD = f$ ，而 $\overline{BE}$ 則為終點弦，兩條弦之間夾了 $q$ ，即 $\angle BCD = q$ ，我們要算的面積即為塗色區域。

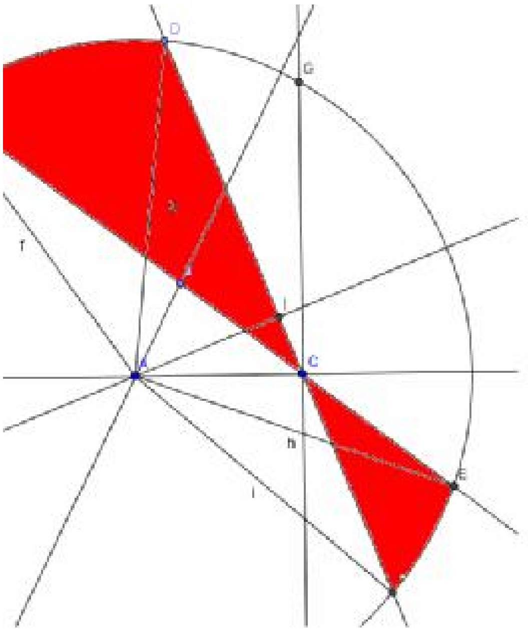
又圓 $A$ 的半徑為 $b$ ，$\overline{AC} = \dfrac{bc}{a}$ ，一樣利用前面類似的方法，得面積 $S'$ 為

扇形 $BAD$ + 扇形 $EAF + \Delta BAE + \Delta DAF - 2(\Delta BAC + \Delta ACF)$ .

利用圓內角的性質，得 $\angle BAD + \angle EAF = 2q$

所以扇形 $BAD$ + 扇形 $EAF = \dfrac{1}{2} b^2 2q = b^2 q$

為了計算 $\Delta DAF$ ，我們將 $\Delta DAF$ 部分放大，得到下圖：



(圖八)

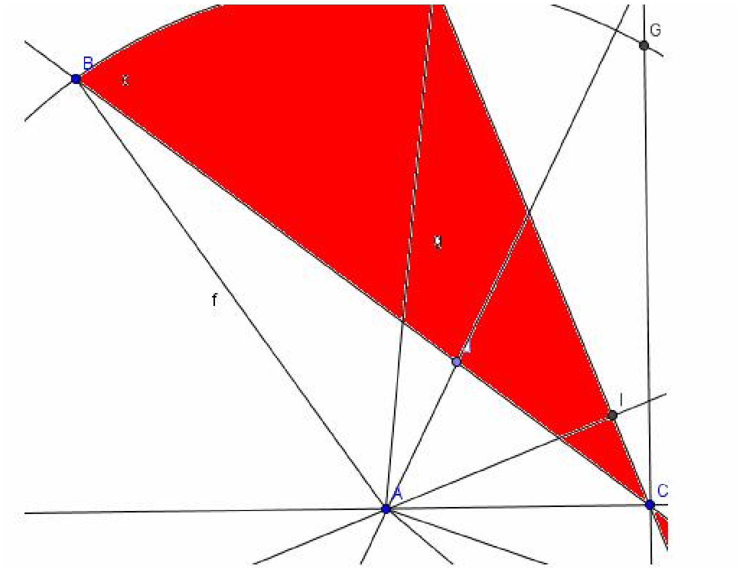
做過 $A$ 垂直 $\overline{CD}$ 的直線 $\overrightarrow{AI}$ ，$\mathbf{Q}$ $\overline{AI} \perp \overline{CD}$ 且 $\angle DCG = f$ ，$\therefore \angle IAC = f$

又 $\overline{AD} = b$ 且 $\overline{AC} = \dfrac{bc}{a}$ ，$\therefore \overline{AI} = \dfrac{bc}{a}\cos f$ ，$\overline{IC} = \dfrac{bc}{a}\sin f$

$$\Rightarrow \overline{DI} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{bc}{a}\cos f\right)^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 f}$$

$$\Rightarrow \Delta DAF = 2\Delta DAI = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 f} \times \frac{bc}{a}\cos f = \frac{b^2 c}{a^2}\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 f}\cos f$$

利用相同的方法，我們將 $\Delta BAE$ 部分放大，得到下圖：




做過 $A$ 垂直 $\overline{BC}$ 的直線 $\overleftrightarrow{AJ}$ ，$\mathbf{Q}\ \overline{AJ}\perp\overline{BC}$ ，$\therefore \angle JCG = q+f=\angle JAC$

$$\overline{AJ}=\frac{bc}{a}\cos\left(f+q\right)\text{，}\overline{JC}=\frac{bc}{a}\sin\left(f+q\right)\Rightarrow\overline{BJ}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2\cos^2\left(f+q\right)}$$

$$\Delta BAE=2\Delta BAJ=\frac{bc}{a}\cos\left(f+q\right)\times\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2\cos^2\left(f+q\right)}=\frac{b^2c}{a^2}\sqrt{a^2-c^2\cos^2\left(f+q\right)}\cos\left(f+q\right)$$

計算出 $\Delta BAE$ 與 $\Delta DAF$ 後，我們再分別算出 $\Delta BAC$ ，$\Delta ACF$

$$\Delta BAC=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\left(\angle BAJ+\angle JAC\right)=\frac{b}{2}\times\frac{bc}{a}\times\sin\left\{\arccos\left[\frac{\frac{bc}{a}\cos\left(f+q\right)}{b}\right]+\left(f+q\right)\right\}$$

$$=\frac{b^2c}{2a}\times\left[\sin\left(\arcsin\frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2\cos^2\left(q+f\right)}}{b}\right)\cos\left(q+f\right)+\cos\left(\arccos\frac{\frac{bc}{a}\cos\left(q+f\right)}{b}\right)\sin\left(q+f\right)\right]$$

$$\mathbf{Q}\ 0<\frac{\sqrt{a^2-c^2\cos^2\left(f+q\right)}}{a}<1\text{，}0<\frac{c\cos\left(f+q\right)}{a}<1$$

$$\therefore\Delta BAC=\frac{b^2c}{2a}\left[\frac{\sqrt{a^2-c^2\cos^2\left(f+q\right)}}{a}\cos\left(f+q\right)+\frac{c}{a}\cos\left(f+q\right)\sin\left(f+q\right)\right]$$

$$\Delta ACF=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{CF}\times\sin\angle ACF=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\left(\overline{IF}-\overline{IC}\right)\times\sin\angle ACF$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{bc}{a}\times\frac{b}{a}\left(\sqrt{a^2-c^2\cos^2 f}-c\sin f\right)\times\sin\left(\frac{p}{2}+f\right)$$

$$=\frac{b^2c}{2a^2}\sqrt{a^2-c^2\cos^2 f}\cos f-\frac{b^2c^2}{2a^2}\sin f\cos f$$

將上面所算之結果代入，得到塗色面積為

$$b^2q+\frac{b^2c}{a^2}\sqrt{a^2-c^2\cos^2 f}\cos f+\frac{b^2c}{a^2}\sqrt{a^2-c^2\cos^2(f+q)}\cos(f+q)$$

$$-2\times\frac{b^2c}{2a}\left[\frac{\sqrt{a^2-c^2\cos^2(f+q)}}{a}\cos(f+q)+\frac{c}{a}\cos(f+q)\sin(f+q)\right]$$

$$-2\times\left(\frac{b^2c}{2a^2}\sqrt{a^2-c^2\cos^2 f}\cos f-\frac{b^2c^2}{2a^2}\sin f\cos f\right)$$

$$=b^2q+\frac{b^2c^2}{a^2}\sin f\cos f-\frac{b^2c^2}{a^2}\cos(f+q)\sin(f+q)$$

所以我們得到面積為 $b^2q+\frac{b^2c^2}{a^2}\sin f\cos f-\frac{b^2c^2}{a^2}\cos(f+q)\sin(f+q)$ .

將面積換回橢圓，得面積 $abq+\frac{bc^2}{a}\sin f\cos f-\frac{bc^2}{a}\cos(f+q)\sin(f+q)$ .

特別地，當 $f=0$ 時，面積為 $abq-\frac{bc^2}{a}\sin q\cos q$ ，與(1)之結果相符。

# 陸、研究結果與結論

1.拋物線過焦點的弦長函數為 $s=f(q)=\dfrac{4c}{\sin^2 q}$，其中 $-\dfrac{p}{2}\le q\le\dfrac{p}{2}$.

2.橢圓過焦點的弦長函數為 $s=f(x)=\dfrac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2 q}$，其中 $-\dfrac{p}{2}\le q\le\dfrac{p}{2}$.

3.雙曲線過焦點的弦長函數為 $s=f(x)=\dfrac{2ab^2}{\left|c^2\cos^2 q-a^2\right|}$，其中 $-\dfrac{p}{2}\le q\le\dfrac{p}{2}$.

4.拋物線的弦長期望值為 $4c\left(\int_{0^+}^{\frac{p}{2}}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{p(x)}{x^2}dx+\int_{-\frac{p}{2}}^{0^-}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{p(x)}{x^2}dx\right)$，為了使積分式有意義，所採取的機率函數 $p(x)$ 必須使積分式 $\int_{0^+}^{\frac{p}{2}}\dfrac{p(x)}{x^2}dx+\int_{-\frac{p}{2}}^{0^-}\dfrac{p(x)}{x^2}dx$ 有意義，例如 $p(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{1}{p-2\arctan\frac{p}{2}}$.

5.雙曲線的過焦點弦，僅當 $-\dfrac{p}{2}\le q<\arctan\left(-\dfrac{b}{a}\right)\vee\arctan\dfrac{b}{a}<q\le\dfrac{p}{2}$ 時，才在我們的討論範圍內。

6.橢圓的過焦點弦長期望值為 $\dfrac{4b}{p}\arctan\dfrac{a}{b}$.

7.橢圓過焦點弦若轉動了 $q$，且起始的弦與過焦點垂直長軸的弦夾 $f$，其掃過的面積為 $abq+\dfrac{bc^2}{a}\sin f\cos f-\dfrac{bc^2}{a}\cos(f+q)\sin(f+q)$.

# 柒、未來展望

1.將二次曲線推廣到二次曲面，並求出過焦點所截出的平面面積期望值。
2.針對橢球做相關性質之探討。
3.針對需要用到狹積分的二次曲線，對其機率密度函數做更進一步的研究。

# 捌、參考資料


1.高二普通數學，龍騰書版社。
2.高三選修數學，龍騰書版社。
3.2014 年台灣國際科學展覽挑動心弦—弦長、圖心與新的圖形辨識
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2014/pdf/010022.pdf