摘要

探討在一1×1的方形撞球桌上，取一角落放置一母球，若欲阻擋球桌上的進行無能量散失且直線前進的母球，則最少需幾顆阻礙球？關於此問題，首先探討若將子球置於與母球同邊的中點上之情形。利用繪圖觀察的方式找出最少的障礙球，並另外探討其路線斜率、截距及反彈方向的關係，計算出給定碰撞次數的路線數。最終將結論加以推廣至一般點。

目錄

壹、研究動機

一直對撞球很有興趣的我，在一次參加撞球比賽的過程中，運用攻防戰術，使對手無法使母球正面擊中子球。因此，想探討該如何在放置最少障礙球的情況下，使母球從球桌角落出發，在經過有限次符合反射定律的反射下，無法碰到球檯上的指定球。

貳、研究目的

一、求出在一1×1的方形球桌上，母球經有限次的反射後無法碰到與母球同邊中點上的子球的最少障礙球數。

二、求出在一1×1的方形球桌上，母球經有限次的反射後無法碰到子球的最少障礙球數。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GeoGebra 繪圖軟體。

肆、名詞與定義

一、障礙球：在1×1的方形球桌上放置，用來阻擋母球行徑路線的球。

二、反彈路徑：若有一線段可代表一種母球的行進路線，則稱其為一反彈路徑，如研究過程中的定理一。

三、目標點：1×1的方形球桌上母球所擊向的子球。

四、$[\ ]$：高斯符號。

伍、研究過程

由於本研究運用大量碰撞反彈，故利用幾何中線對稱進行研究，除此之外，亦期盼能用較簡易的方式代表母球行進路線，因此首先證明定理一。

> 定理一：對於一母球行進路線，若有一線段可代表一種母球的行進路線，則稱其為一反彈路徑。

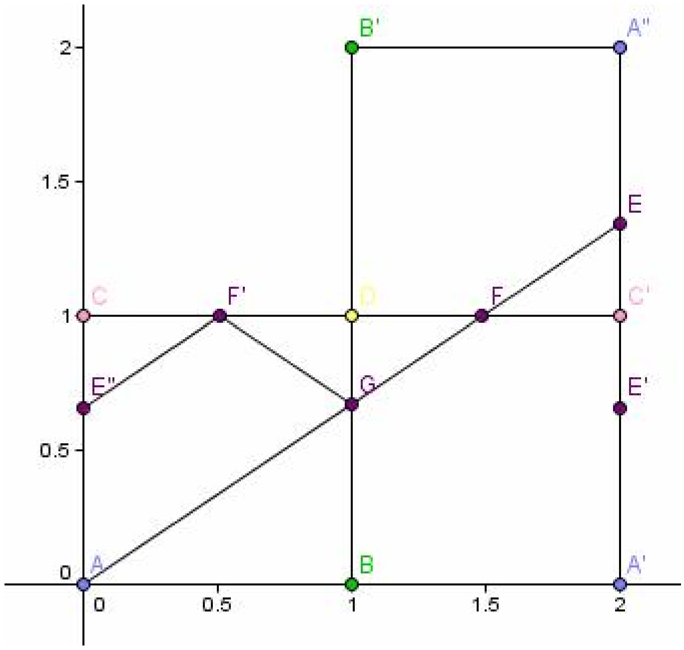
證明：如圖(一)，若 $\overline{AG},\overline{GF'},\overline{F'E''}$ 代表一母球行進路線，

$$\because \angle AGB = \angle DGF$$
$$\Rightarrow \angle AGB + \angle AGF' + \angle F'GD = \angle DGF + \angle AGF' + \angle F'GD = 180^\circ$$

故 A—G—F 共線，

同理可得 A—G—F—E 共線

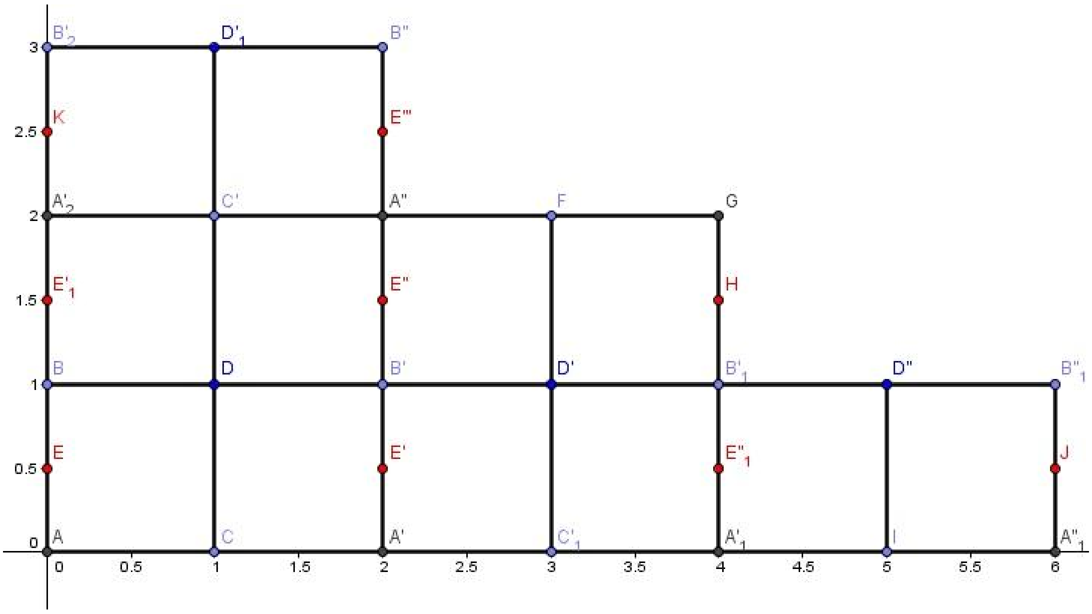
則此對稱後線段可代表一種行徑路線，得證。



圖（一）

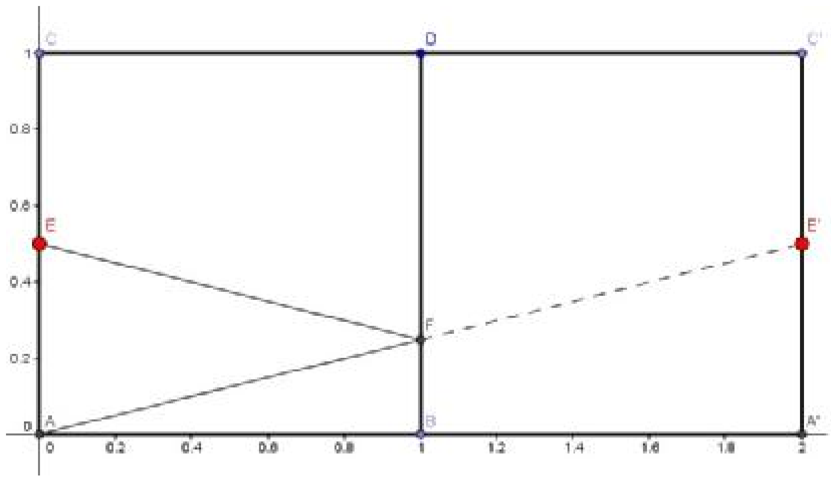
一、將子球置於與母球同邊之中點

（一）將球桌以目標點的對邊為對稱軸向外作對稱，如圖（二）。其中，由於球桌之四個角為直角，可完全鋪滿平面，故原點及翻轉後的目標點連線必會經過有球桌覆蓋的平面。



圖（二）

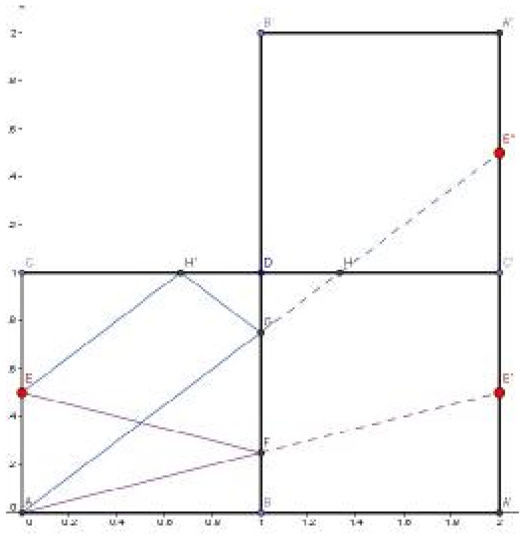
其中，由於母球及子球的連線為球桌之邊，故不討論母球及子球的連線。建立一座標系，定母球所在的角落為$(0,0)$，則球桌的其他三個頂點依序為$(1,0),(1,1),(0,1)$，子球座標$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$。先觀察僅翻轉一次的球桌，如圖（三）。其中，實線為球之實際路徑，虛線為其對稱前的路徑。



圖（三）

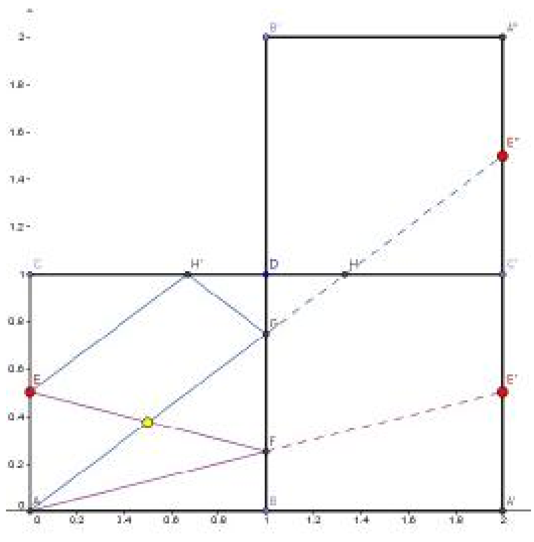
由圖（三）知，僅需一顆分布在其路徑上任一點的障礙球，即可符合原題需求。

若翻轉兩次，如圖（四）。



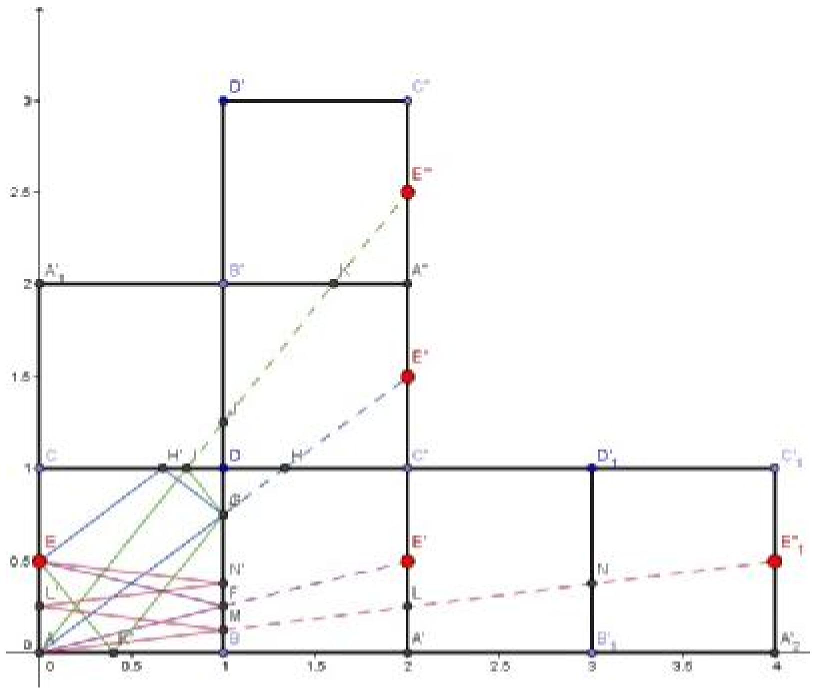
圖（四）

由圖（四）知，若將障礙球置於藍色及紫色兩種反射路徑上的交點，即為原題需求，如圖（五）。



圖（五）

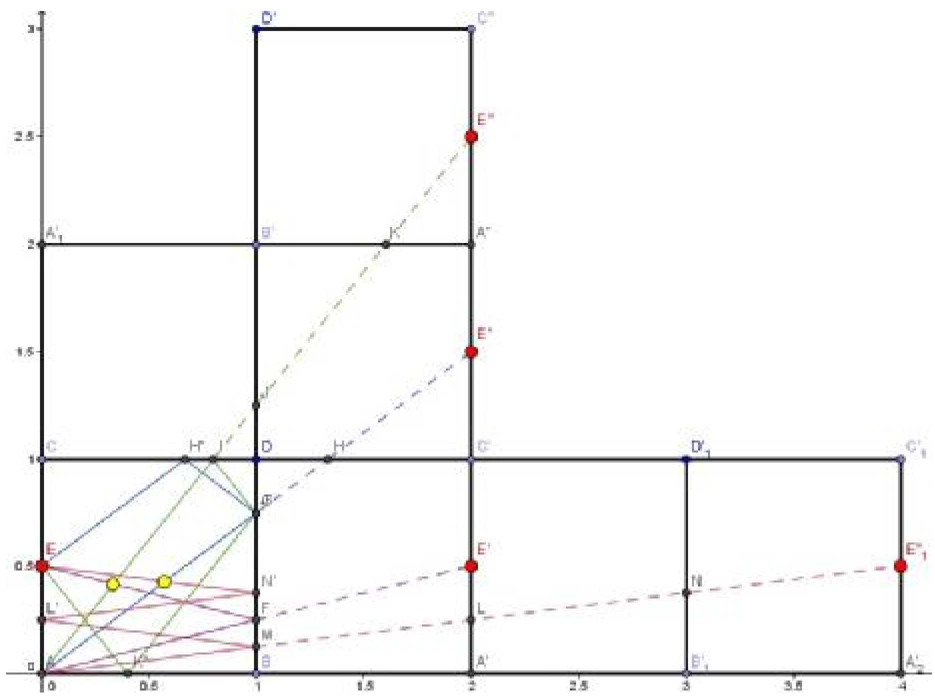
若翻轉三次，如圖（六）。



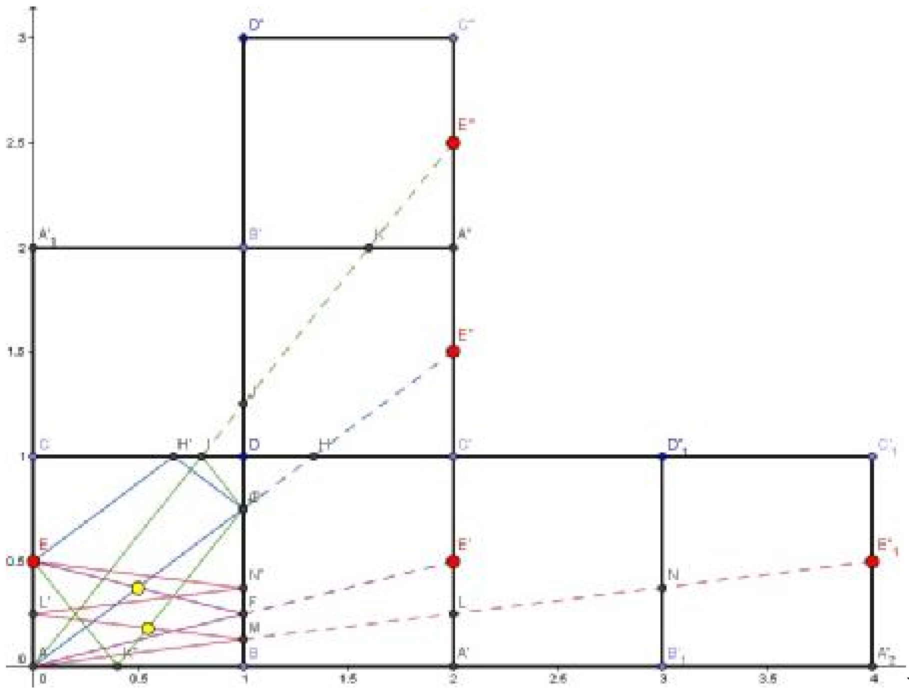
圖（六）

由圖（六）知，最少能用兩顆障礙球，即可阻擋此四種反射路徑，且在此情況下，障礙球的擺法不唯一，只要找四條路徑上的兩兩路徑之交點即可。

例如圖（七）或圖（八）

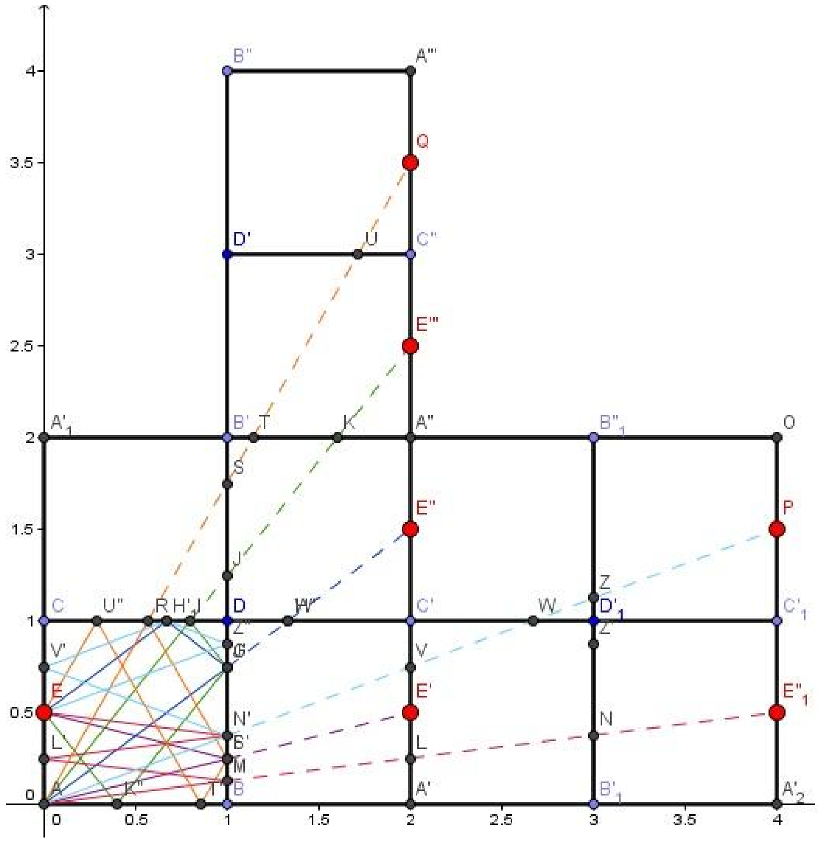


圖（七）



如圖（八）

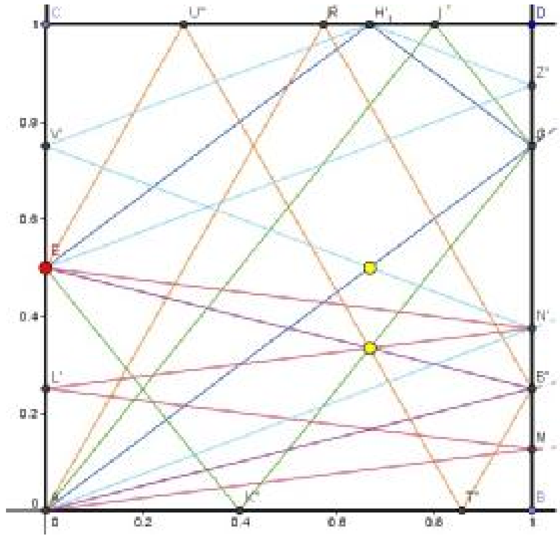
若翻轉四次，如圖（九）。



圖（九）

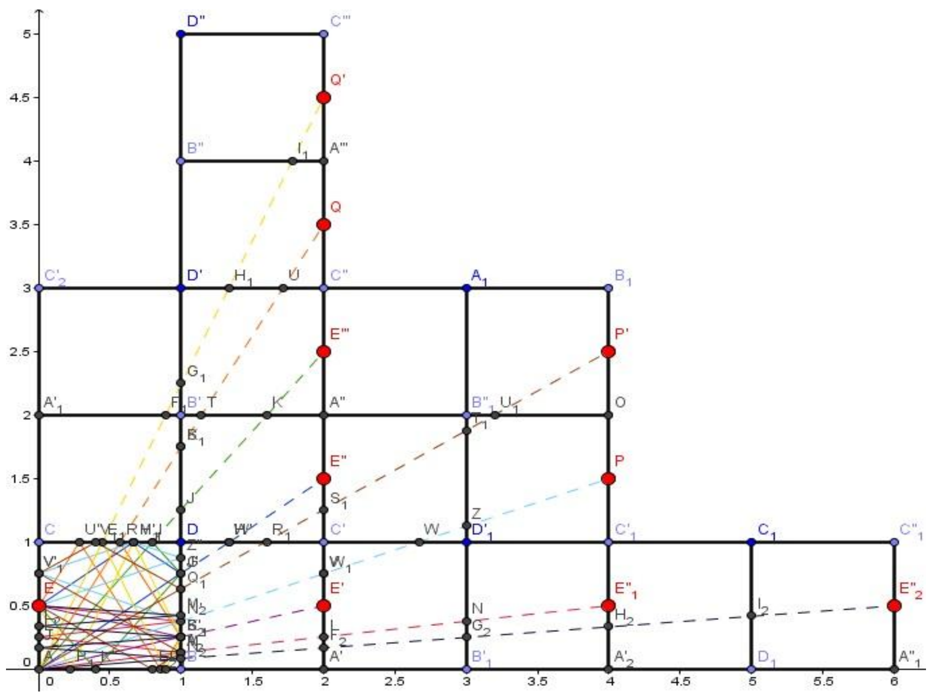
由圖（九）知，最少能用兩顆障礙球，即可阻擋此六種反射路徑，由於圖中出現一四條路徑的交點，故將障礙球放在此交點，在另取另外兩條路

徑的任意交點，即為原題所求。如圖（十）



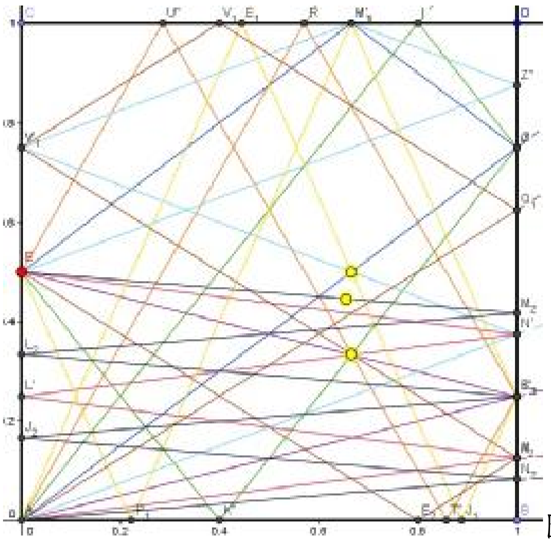
圖（十）

若翻轉五次，如圖（十一）。

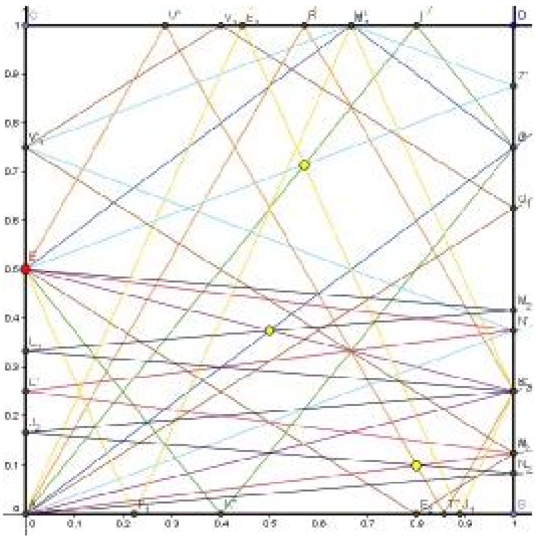


圖（十一）

由圖（十一）知，最少能用三顆障礙球，即可阻擋此九種反射路徑，且在此情況下，障礙球的擺法不唯一。例如圖（十二）及圖（十三）。

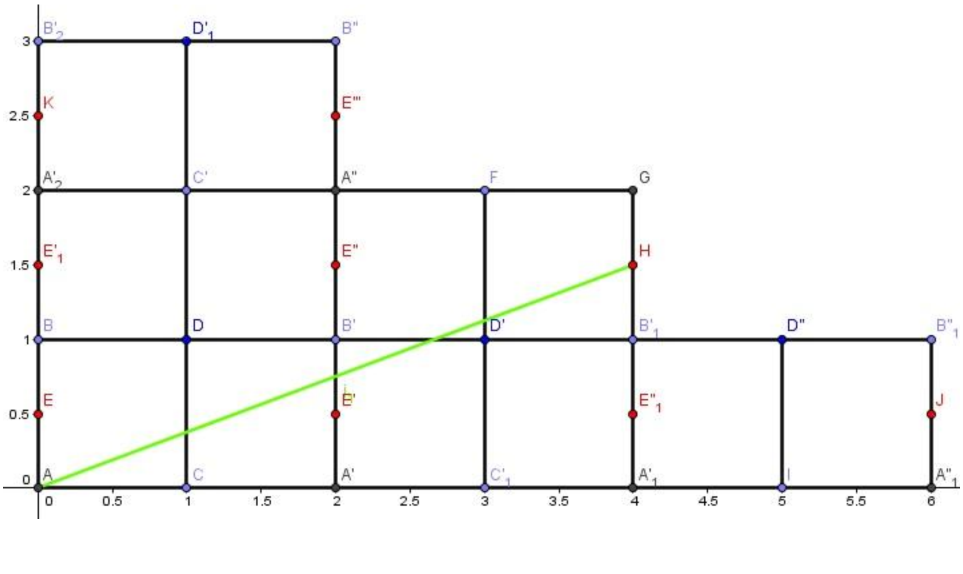


圖（十二）



圖（十三）

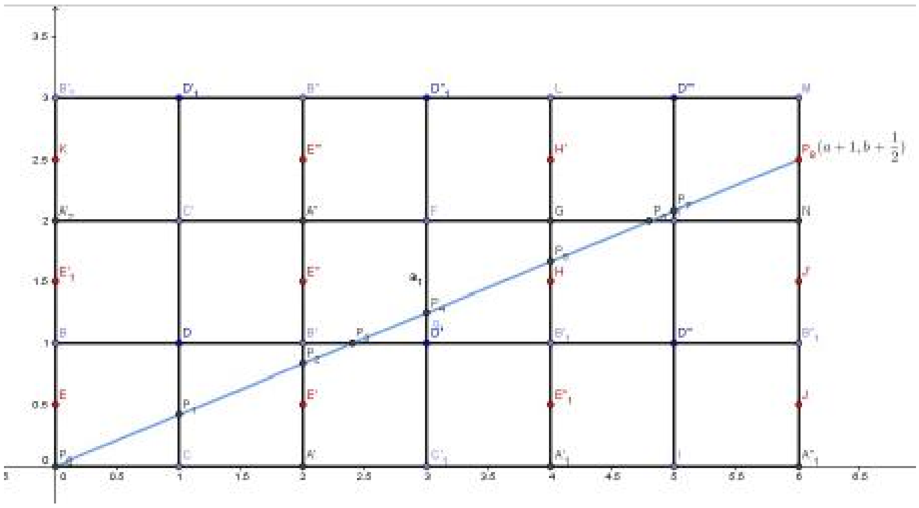
（二）以下，取一條可經反彈後到達目標點的路線作分析，如圖（十四）。



圖（十四）

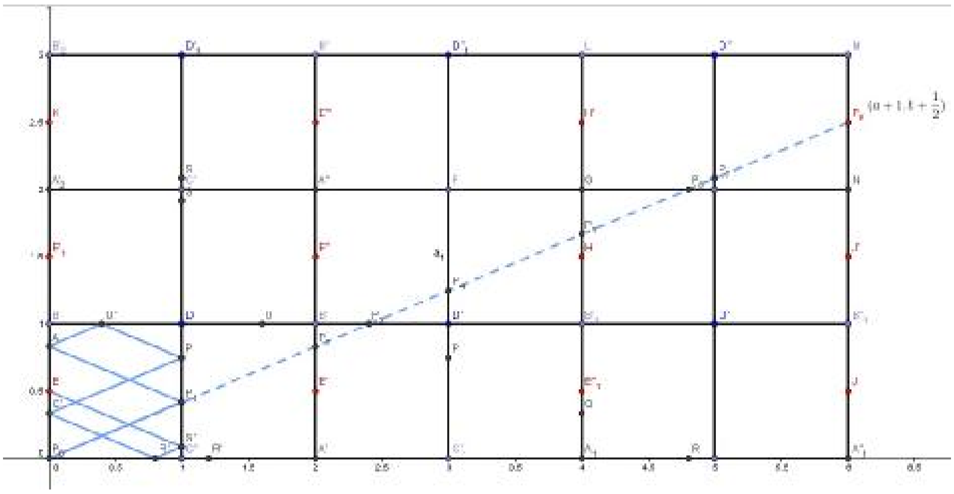
此綠色路徑最終的目標點為原目標點所在的球桌，向右翻轉兩次，向上翻轉一次，再向右翻轉一次而成。

故我們令一路徑之所有向右翻轉次數為a，所有向上次數為b，定線段第n個與方格線的交點為P_{n-1}，其中a為正奇數。則如圖（十五）。



圖（十五）

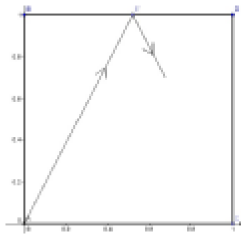
圖中之直線L可表示為$L: y=\dfrac{b+{}^{1}\!/_{2}}{a+1}x$，且此線段被方格切割為$(a+b+1)$條線段，若將線段折回原$1\times 1$方桌上，則此路經碰到$x=0$的次數為$\left[\dfrac{a}{2}\right]$次，碰到$x=1$的次數為$\left[\dfrac{a-1}{2}\right]+1$次，同理，碰到$y=0$的次數為$\left[\dfrac{b}{2}\right]$次，碰到$y=1$的次數為$\left[\dfrac{b-1}{2}\right]+1$次，且$\overline{P_nP_{n+1}}$斜率$\begin{cases} a, n=2t, t\in\{¥,0\} \\ -a, n=2t+1, t\in ¥ \end{cases}$。如圖（十六）。



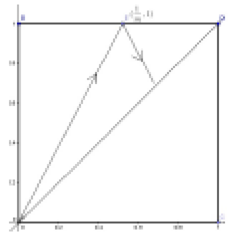
圖（十六）

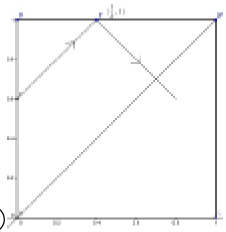
（三）分析線段的截距和反彈方向的關係:

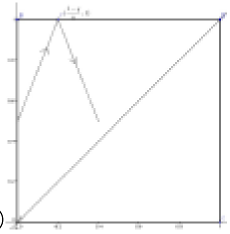
首先，分析如圖（十七）之反彈方式。

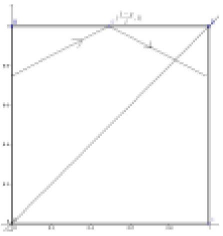


圖（十七）

①

$L_1 : y = mx, m > 0$

②

$L_2 : y = x + k, 1 > k > 0$

③

$L_3 : y = nx + q, \begin{cases} 1 > q > 1 - n \\ n > 1 \end{cases}$

④  $L_4: y = lx + p, \begin{cases} 1 > p > 1-l \\ 1 > l > 0 \end{cases}$

故可得此種反彈方式之 X 截距與斜率之關係: $y = ax + b$，$\frac{-1}{a} < \frac{-b}{a} < 1 - \frac{1}{a}$

同理，分析其他七種反彈方式後可得以下結論:

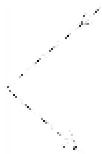
 $: \frac{-1}{a} < \frac{-b}{a} < 1 - \frac{1}{a}$

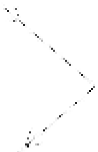
 $: 1 > \frac{-b}{a} > 0$

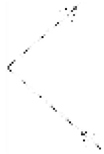
 $: 1 - \frac{1}{a} < \frac{-b}{a} < \frac{-1}{a}$

 $1 > \frac{-b}{a} > 0$

 $: 1 - \frac{1}{a} < \frac{-b}{a} < 1$

 $: 0 > \frac{-b}{a} > \frac{-1}{a}$

 $: 1 > \frac{-b}{a} > 1 - \frac{1}{a}$

 $-\frac{1}{a} < -\frac{b}{a} < 1$

（四）發現了定理二如下:

定理二：若將子球置於與母球同邊之中點，則給定總反彈次數 c，可得翻轉 c 次的線段共有 $\left[\frac{c+1}{2}\right]$ 條。

證明：

由斜率 $m = \frac{b + 1/2}{a+1} = \frac{2b+1}{2(a+1)}$，其中 $2b+1$ 為正奇數，$2(a+1)$ 為四的倍數，則

斜率的分子及分母和 $(2b+1) + 2(a+1) = 2(a+b) + 3 = 2c+3$，其中 $2c+3$ 為正奇

數，

則若給定總反彈次數 c，可得翻轉 c 次的線段共有 $\left[\frac{2c+3}{4}\right]=\left[\frac{c+\frac{3}{2}}{2}\right]=\left[\frac{c+1}{2}\right]$，

得證。

（五）討論：若 $m<1$ 之解有 $\left[\frac{c+3}{4}\right]$ 個，$m>1$ 之解有 $\left[\frac{c+1}{4}\right]$ 個。

證明：

若 $m<1 \rightarrow m=\frac{2b+1}{2(a+1)}<1$

$\rightarrow 2b+1<2a+2$

$\rightarrow 2(b-a)<1$

$\rightarrow a-b>\frac{-1}{2}$

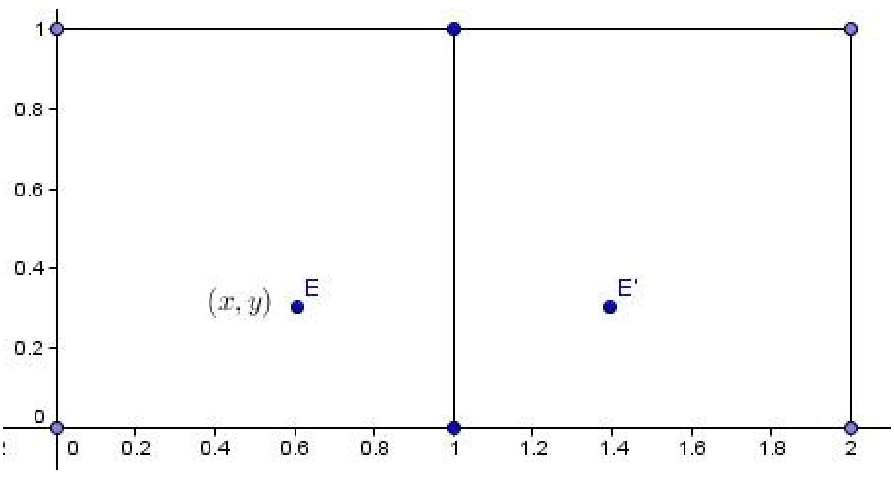
$\Rightarrow a-b\geq 0$

又 $a+b=c$

$$\begin{cases} a\geq \frac{c}{2} \\ b\leq \frac{c}{2} \end{cases} \Rightarrow m<1 \text{ 之解有 } \left[\frac{c+3}{4}\right] \text{ 個。}$$

同理，若 $m>1 \rightarrow m=\frac{2b+1}{2(a+1)}>1 \Rightarrow \begin{cases} a\leq \frac{c-1}{2} \\ b\geq \frac{c+1}{2} \end{cases} \Rightarrow m>1$ 之解有 $\left[\frac{c+1}{4}\right]$ 個。

（六）探討所取交點與經翻轉後的交點之間的關係，如圖（十八）：



圖（十八）

$$\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\end{cases} \rightarrow E'(x',y')\left\langle \begin{matrix} x'=\begin{cases}a+x, if\ a=2k\\ a+(1-x), if\ a=2k+1\end{cases}, k\in ¥ \\ y'=\begin{cases}b+y, if\ b=2k\\ b+(1-y), if\ b=2k-1\end{cases}, k\in ¥\end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases}x'=2\left[\dfrac{a+1}{2}\right]+(-1)^a x\\ y'=2\left[\dfrac{b+1}{2}\right]+(-1)^b y\end{cases}$$

（七）由於在給定翻傳次數後所形成的路線，在球桌上的軌跡極為複雜，故首先證明定理三。

定理三：任取兩條路線，必至少有一交點。

證明：

假設兩路線 L_1,L_2 分別翻轉 $(a_1+b_1),(a_2+b_2)$ 次，其中 a_1,a_2 為向右翻轉次數，b_1,b_2 為向上翻轉次數，則可將此兩條路線表為 $y=\dfrac{2b_1+1}{2a_1+2}x$ 、 $y=\dfrac{2b_2+1}{2a_2+2}x$ 。

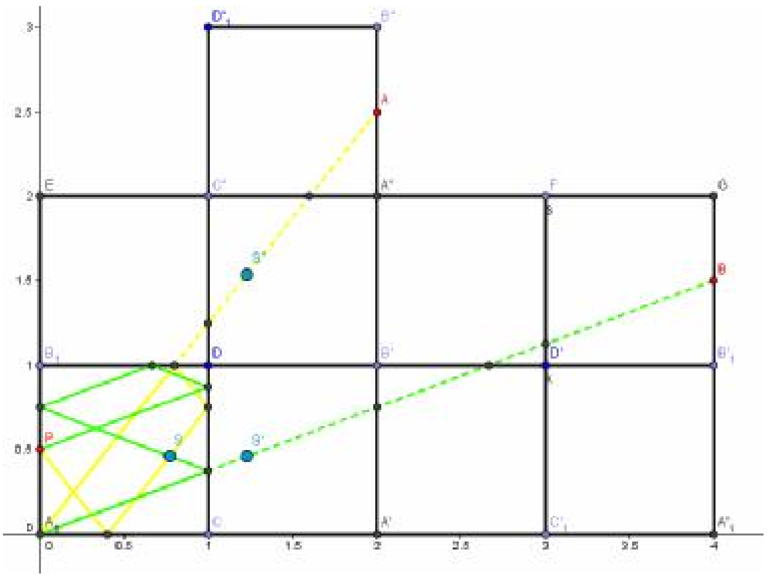
令 $\dfrac{2b_1+1}{2a_1+2}=\tan q_1$，$\dfrac{2b_2+1}{2a_2+2}=\tan q_2$，且 $\tan q_1>\tan q_2$

$\Rightarrow$ 則此二線段分別表為 $y=\tan q_1 x$，$y=\tan q_2 x$，

則原題為證明：$\exists q_0(x_0,y_0)\ni q_1(m_1+x_0\cdot(-1)^{m_1},n_1+y_0\cdot(-1)^{n_1})\in y=\tan q_1 x$

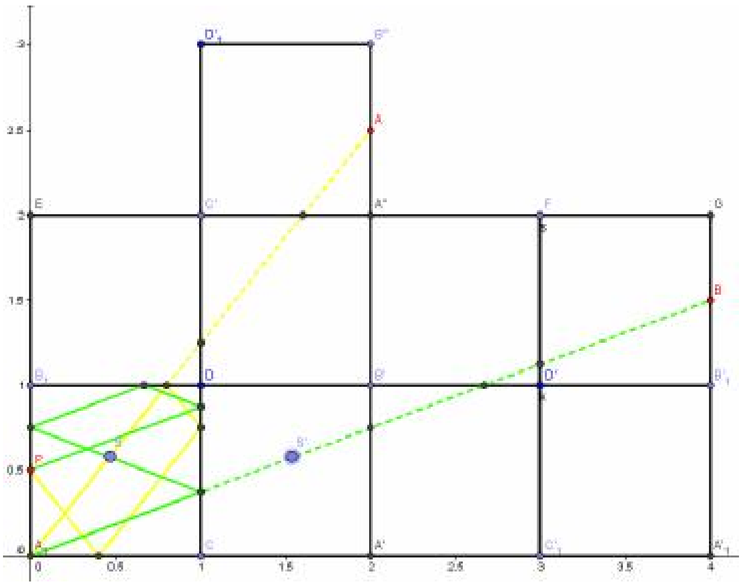
$q_2(m_2+x_0\cdot(-1)^{m_2},n_2+y_0\cdot(-1)^{n_2})\in y=\tan q_2 x$，

其中 $m_1,m_2,n_1,n_2\in\{¥,0\}$，如圖（十九）。



圖（十九）

特別地，$n_1=m_1=0$ 時，必存在一 (x_0,y_0) 使得原題有解。如圖（二十）。



圖（二十）

$$\rightarrow\begin{cases} y_0=\tan q_1\cdot x_0 \\ n_2+(-1)^{n_2}y_0=\tan q_2\cdot(m_2+(-1)^{m_2})x_0 \end{cases}$$

且 $m>0,n\geq 0$

$$則\begin{cases} x_0=\dfrac{n_2}{\tan q_2\cdot(m_2+(-1)^{m_2})-\tan q_1(-1)^{n_2}} \\ y_0=\dfrac{\tan q_1 n_2}{\tan q_2\cdot(m_2+(-1)^{m_2})-\tan q_1(-1)^{n_2}} \end{cases}$$

(Ⅰ) $x_0,y_0>0$

$\rightarrow n_2\left[\tan q_2\cdot(m_2+(-1)^{m_2})-\tan q_1(-1)^{n_2}\right]>0$

$\rightarrow \tan q_2\cdot(m_2+(-1)^{m_2})>\tan q_1(-1)^{n_2}$

(Ⅱ) $x_0,y_0<1$

$\rightarrow n_2<\tan q_2\cdot(m_2+(-1)^{m_2})-\tan q_1(-1)^{n_2}$

$\rightarrow \tan q_1 n_2<\tan q_2\cdot(m_2+(-1)^{m_2})-\tan q_1(-1)^{n_2}$

由(Ⅰ) (Ⅱ)，

（a）若 $\tan q_1>1$

$\tan q_2\cdot(m_2+(-1)^{m_2})-\tan q_1(-1)^{n_2}>\tan q_1 n_2$ ，且 $n_2>0$

(1) 若 m_2,n_2 為奇數

$\rightarrow \tan q_2(m_2-1) > \tan q_1(n_2-1)$

$\rightarrow$取 $\dfrac{\tan q_2}{\tan q_1} > \dfrac{n_2-1}{m_2-1}$

(2) 若 m_2 為奇數，n_2 為偶數

$\rightarrow \tan q_2(m_2-1) > \tan q_1(n_2+1)$

$\rightarrow$取 $\dfrac{\tan q_2}{\tan q_1} > \dfrac{n_2+1}{m_2-1}$

(3) 若 m_2 為偶數，n_2 為奇數

$\rightarrow \tan q_2(m_2+1) > \tan q_1(n_2-1)$

$\rightarrow$取 $\dfrac{\tan q_2}{\tan q_1} > \dfrac{n_2-1}{m_2+1}$

(4) 若 m_2, n_2 為偶數

$\rightarrow \tan q_2(m_2+1) > \tan q_1(n_2+1)$

$\rightarrow$取 $\dfrac{\tan q_2}{\tan q_1} > \dfrac{n_2+1}{m_2+1}$

(b)若 $\tan q_1 < 1$, $n_2 \geq 0$

$\rightarrow \tan q_2(m_2+(-1)^{m_2}) - \tan q_1(-1)^{n_2} > n_2$

(1) $n_2 = 0$

$\rightarrow$取 $m_2 > \dfrac{\tan q_1 - (-1)^{m_2} \tan q_2}{\tan q_2} > 0$

(2) $n_2 > 0$

$\rightarrow$取 $m_2 > \dfrac{n_2 + \tan q_1(-1)^{n_2}}{\tan q_2} - (-1)^{m_2}$

故兩路線必至少有一交點。

另外，求兩路線之一般解範圍。

$\mathbf{Q}\, q_1, q_2$ 分別在 L_1, L_2 上

$$\rightarrow\begin{cases} n_1+y_0\cdot(-1)^{n_1}=\tan q_1(m_1+x_0\cdot(-1)^{m_1})=\tan q_1\cdot(-1)^{m_1}\cdot x_0+\tan q_1\cdot m_1 \\ n_2+y_0\cdot(-1)^{n_2}=\tan q_2(m_2+x_0\cdot(-1)^{m_2})=\tan q_2\cdot(-1)^{m_2}\cdot x_0+\tan q_2\cdot m_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases} \tan q_1\cdot(-1)^{m_1}\cdot x_0-(-1)^{n_1}\cdot y_0=n_1-\tan q_1\cdot m_1 \\ \tan q_2\cdot(-1)^{m_2}\cdot x_0-(-1)^{n_2}\cdot y_0=n_2-\tan q_2\cdot m_2 \end{cases}$$

利用行列式解此二元一次方程式，

則 $\Delta=\begin{vmatrix} \tan q_1\cdot(-1)^{m_1} & (-1)^{n_1+1} \\ \tan q_2\cdot(-1)^{m_2} & (-1)^{n_2+1} \end{vmatrix}=\tan q_1\cdot(-1)^{m_1+n_2+1}-\tan q_2\cdot(-1)^{m_2+n_1+1}$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} n_1-\tan q_1\cdot m_1 & (-1)^{n_1+1} \\ n_2-\tan q_2\cdot m_2 & (-1)^{n_2+1} \end{vmatrix}=\left(n_1-\tan q_1\cdot m_1\right)(-1)^{n_2+1}-\left(n_2-\tan q_2\cdot m_2\right)(-1)^{n_1+1}$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} \tan q_1\cdot(-1)^{m_1} & n_1-\tan q_1\cdot m_1 \\ \tan q_2\cdot(-1)^{m_2} & n_2-\tan q_2\cdot m_2 \end{vmatrix}=\tan q_1\cdot(-1)^{m_1}\left(n_2-\tan q_2\cdot m_2\right)-\tan q_2\cdot(-1)^{m_2}\left(n_1-\tan q_1\cdot m\right.$$

其中，若 $\Delta=0\Rightarrow\tan q_1\cdot(-1)^{m_1+n_2+1}=\tan q_2\cdot(-1)^{m_2+n_1+1}\Rightarrow\dfrac{\tan q_1}{\tan q_2}=(-1)^{m_2+n_1-m_1-n_2}$

又 $\tan q_1,\tan q_2>0,\tan q_1\neq\tan q_2$，故 $\Delta\neq 0$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_0=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{\left(n_1-\tan q_1\cdot m_1\right)(-1)^{n_2+1}-\left(n_2-\tan q_2\cdot m_2\right)(-1)^{n1+1}}{\tan q_1\cdot(-1)^{m_1+n_2+1}-\tan q_2\cdot(-1)^{m_2+n_1+1}}=\dfrac{\left(n_1-\tan q_1\cdot m_1\right)(-1)^{n_2}-\left(n_2-\tan q_2\cdot m_2\right)(-}{\tan q_1\cdot(-1)^{m_1+n_2}-\tan q_2\cdot(-1)^{m_2+n_1}} \\ y_0=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{\tan q_1\cdot(-1)^{m_1}\left(n_2-\tan q_2\cdot m_2\right)-\tan q_2\cdot(-1)^{m_2}\left(n_1-\tan q_1\cdot m_1\right)}{\tan q_1\cdot(-1)^{m_1+n_2+1}-\tan q_2\cdot(-1)^{m_2+n_1+1}} \end{cases}$$

（Ⅰ）$\mathbf{Q}\,0<x_0,y_0$

$$\Rightarrow\begin{cases} \left[\left(n_1-\tan q_1\cdot m_1\right)(-1)^{n_2}-\left(n_2-\tan q_2\cdot m_2\right)(-1)^{n_1}\right]\left[\tan q_1\cdot(-1)^{m_1+n_2}-\tan q_2\cdot(-1)^{m_2+n_1}\right]>0 \\ \left[\tan q_1\cdot(-1)^{m_1}\left(n_2-\tan q_2\cdot m_2\right)-\tan q_2\cdot(-1)^{m_2}\left(n_1-\tan q_1\cdot m_1\right)\right]\left[\tan q_1\cdot(-1)^{m_1+n_2}-\tan q_2\cdot(-1)^{m_2+n_1}\right]< \end{cases}$$

其中 $\tan q_1\cdot(-1)^{m_1+n_2}-\tan q_2\cdot(-1)^{m_2+n_1}>0$

$\rightarrow\tan q_1\cdot(-1)^{m_1+n_2}>\tan q_2\cdot(-1)^{m_2+n_1}$

$\rightarrow 2\,|\,m_1+n_2$

取 $2\,|\,m_1$，$2\,|\,n_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} (n_1 - \tan q_1 \cdot m_1)(-1)^{n_2} > (n_2 - \tan q_2 \cdot m_2)(-1)^{n_1} \\ \left[\tan q_1 \cdot (-1)^{m_1}(n_2 - \tan q_2 \cdot m_2) - \tan q_2 \cdot (-1)^{m_2}(n_1 - \tan q_1 \cdot m_1)\right] < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (n_1 - \tan q_1 \cdot m_1)(-1)^{n_2} > (n_2 - \tan q_2 \cdot m_2)(-1)^{n_1} \\ \tan q_1 \cdot (-1)^{m_1}(n_2 - \tan q_2 \cdot m_2) < \tan q_2 \cdot (-1)^{m_2}(n_1 - \tan q_1 \cdot m_1) \end{cases} \mathbf{KKK}(*)$$

(Ⅱ) $\mathbf{Q}\, x_0, y_0 < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} (n_1 - \tan q_1 \cdot m_1)(-1)^{n_2} - (n_2 - \tan q_2 \cdot m_2)(-1)^{n_1} < \tan q_1 \cdot (-1)^{m_1+n_2} - \tan q_2 \cdot (-1)^{m_2+n_1} \\ \tan q_2 \cdot (-1)^{m_2+1}(n_1 - \tan q_1 \cdot m_1) - \tan q_1 \cdot (-1)^{m_1+1}(n_2 - \tan q_2 \cdot m_2) < \tan q_1 \cdot (-1)^{m_1+n_2} - \tan q_2 \cdot (-1)^{m_2+n_1} \end{cases} \mathbf{K}($$

$\mathbf{Q}\, 2|m_1, 2|m_2$ ，由 $(*),(**)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m_1+1)\tan q_1 - \left[(-1)^{m_2+n_1} + (-1)^{n_2} m_2\right]\tan q_2 > n_1 - (-1)^{n_1} \cdot n_2 \ \mathbf{KKK}(1) \\ m_1 \tan q_1 - (-1)^{n_1} \cdot m_2 \cdot \tan q_2 < n_1 - n_2 \ \mathbf{KKK}(2) \\ (n_1 - \tan q_1 m_1)\tan q_2 \cdot (-1)^{m_2+1} + (n_2 - \tan q_2 m_2)\tan q_1 < \tan q_1 - \tan q_2 (-1)^{m_2+n_1} \ \mathbf{KKK}(3) \\ \tan q_2 \cdot (-1)^{m_2} \cdot (n_1 - \tan q_1 m_1) > \tan q_1 (n_2 - \tan q_2 m_2) \ \mathbf{KKK}(4) \end{cases}$$

由(1)、(2)

$\rightarrow \tan q_1 + (-1)^{m_2+n_1+1}\tan q_2 > (1 - (-1)^{n_1} \cdot n_2$

取 $2|n_1 \Rightarrow \tan q_1 - \tan q_2 > 0$ 符合原假設。

$\rightarrow (1) \rightarrow (m_1+1)\tan q_1 - (1+m_2)\tan q_2 > n_1 - n_2 \ \mathbf{KKK}(5)$

$(3) \rightarrow (n_1 - \tan q_1 m_1)\tan q_2 \cdot (-1)^{m_2+1} + (n_2 - \tan q_2 m_2)\tan q_1 < \tan q_1 - \tan q_2$

$(4) \rightarrow \tan q_2 \cdot (-1)^{m_2} \cdot (n_1 - \tan q_1 m_1) > \tan q_1 (n_2 - \tan q_2 m_2)$

(3)(4)經整理後可得

$$\rightarrow \begin{cases} (m_1 \cdot (-1)^{m_2} - m_2)\tan q_1 \tan q_2 + (n_2 - 1)\tan q_1 + (1 - n_1 \cdot (-1)^{m_2})\tan q_2 < 0 \\ (m_1 \cdot (-1)^{m_2} - m_2)\tan q_1 \tan q_2 - n_1 (-1)^{m_2}\tan q_2 < -n_2 \tan q_1 \end{cases} \mathbf{KKK}(***)$$

由 $(***)$ 可得 $\rightarrow (n_2 - 1)\tan q_1 + \tan q_2 < -n_2 \tan q_1$

$\rightarrow (2n_2 - 1)\tan q_1 + \tan q_2 < 0$

$\rightarrow n_2 < \dfrac{\tan q_1 - \tan q_2}{2\tan q_1} \mathbf{KKK}(6)$

$$(5) \Rightarrow (m_1+1)\tan q_1 - (1+m_2)\tan q_2 > n_1 + \frac{\tan q_1 - \tan q_2}{2\tan q_1}$$

$$\Rightarrow m_1 \tan q_1 - m_2 \tan q_2 - n_1 > \frac{\tan q_2 - \tan q_1}{2\tan q_1} + \tan q_2 - \tan q_1$$

(Ⅲ)若 m_2 為正奇數，

$$\Rightarrow \begin{cases} n_1 - \tan q_1 m_1 > n_2 - \tan q_2 m_2 \to m_1 \tan q_1 - m_2 \tan q_2 - n_1 + n_2 < 0 \mathbf{KKK}(a) \\ m_1 \tan q_1 - m_2 \tan q_2 - n_1 > \dfrac{\tan q_2 - \tan q_1}{2\tan q_1} + \tan q_2 - \tan q_1 \\ n_2 < \dfrac{\tan q_1 - \tan q_2}{2\tan q_1} \mathbf{KKK}(a) \\ \tan q_2 \cdot (-1)^{m_2} \cdot (n_1 - \tan q_1 m_1) > \tan q_1 (n_2 - \tan q_2 m_2) \\ (m_1 \cdot (-1)^{m_2} - m_2)\tan q_1 \tan q_2 - n_1 (-1)^{m_2} \tan q_2 < n_2 \tan q_1 - \tan q_2 \end{cases}$$

$\therefore$ 由 (a) 可得 n_1 範圍

化簡(a) $\to 2n_1 + 1 > 2(m_1 \tan q_1 - m_2 \tan q_2 + n_2) + 1$

代入 $(a) \to 2m_2 \tan q_2 > 2m_1 \tan q_1 - 2m_2 \tan q_2 + 2n_2 + 1$

$$\to 2m_2(\tan q_1 + \tan q_2) - 2m_1 \tan q_1 - 2n_2 > 1$$

$$\to m_2(\tan q_1 + \tan q_2) - n_2 - \frac{1}{2} > m_1 \tan q_1$$

$$\to m_2 \tan q_1 - n_2 - \frac{1}{2} > \frac{\tan q_1 - \tan q_2}{2\tan q_1} + \tan q_1 - \tan q_2$$

$$\to m_2 > \frac{1}{\tan q_1}\left[(\tan q_1 - \tan q_2)\left(\frac{1}{2\tan q_1} + 1\right) + n_2 + \frac{1}{2}\right] \mathbf{KKK}(b)$$

$\therefore$ 由 (b) 及 n_2 可得 m_2 範圍

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan q_2 (n_1 - \tan q_1 \cdot m_1) < \tan q_1 (n_2 - \tan q_2 \cdot m_2) \\ (m_1 + m_2)\tan q_1 \tan q_2 - \tan q_2 \cdot n_1 > n_2 \cdot \tan q_1 + \tan q_2 \end{cases}$$

$$\to (m_1 - m_2)\tan q_1 \cdot \tan q_2 + \tan q_1 n_2 - \tan q_2 \cdot n_1 > 0$$
$$\to \tan q_1 n_2 > (m_1 - m_2)\tan q_1 \cdot \tan q_2 + \tan q_2 \cdot n_1$$
$$\to (m_1 + m_2)\tan q_1 \cdot \tan q_2 - \tan q_2 \cdot n_1 > (m_1 - m_2)\tan q_1 \cdot \tan q_2 + \tan q_2 \cdot n_1 + \tan q_2$$
$$\to 2m_2 \tan q_1 \cdot \tan q_2 > 2\tan q_2 \cdot n_1 + \tan q_2$$
$$\to 2m_2 \tan q_1 > 2n_1 + 1$$
$$\to n_1 < m_2 \tan q - \frac{1}{2} \mathbf{KKK}(g)$$

$\therefore$ 由 (g) 及 m_2 可得 n_1 範圍

代回前式可得

$$\begin{cases} m_1 < \dfrac{1}{\tan q_1}(n_1 - n_2 + \tan q_2 \cdot m_2) \\ m_1 > \dfrac{1}{\tan q_1}\left(\dfrac{\tan q_2 - \tan q_1}{2\tan q_1} + \tan q_2 - \tan q_1 + n_1 - n_2 + \tan q_2 \cdot m_2\right) \end{cases}$$

$\therefore$ 可得 m_1 範圍

$\therefore$ 可求得任二路線 L_1, L_2 在 1×1 方格內之交點 (x_0, y_0)

故原題得證。

由定理二及定理三，若母球之行進路線數 c，則障礙球數之上界 $=\dfrac{\left[\dfrac{c+1}{2}\right]}{2}$。

二、將子球置於球桌內任一點

若將子球置於球桌內之任一點，則延續前方作法，求出給定翻轉次數之線段數。

定理四：若將子球置於球桌內任一點，則給定總反彈次數 c，可得翻轉 c 次的線段共有(c+1)條。

證明：

若將目標球置於 (p,q)，其中 $p=\dfrac{n_1}{m_1}, q=\dfrac{n_2}{m_2}, 0<n_1<m_1, 0<n_2<m_2$，且 $n_1, n_2 \in$ ¡ $^+, m_1, m_2 \in$ ¥

則可將通過此點之線段表為 $y=\dfrac{2\left[\dfrac{b+1}{2}\right]+(-1)^b q}{2\left[\dfrac{a+1}{2}\right]+(-1)^a p}x$.

(1)若總翻轉偶數次，

Ⅰ、a , b 皆為偶數

$$\rightarrow y=\frac{b+q}{a+p}x=\frac{b+\frac{n_2}{m_2}}{a+\frac{n_1}{m_1}}x=\frac{m_1m_2b+m_1n_2}{m_1m_2a+m_2n_1}x \Rightarrow \text{線段斜率分子分母和}=m_1m_2c+m_1n_2+m_2n_1$$

$$線段數=\left[\frac{\left[\frac{m_1m_2c+m_1n_2+m_2n_1}{m_2}\right]-n_1+1}{2m_1}\right]=\left[\frac{\left[\frac{m_1n_2}{m_2}\right]+m_1c+1}{2m_1}\right]=\left[\frac{c}{2}+\frac{\left[\frac{m_1n_2}{m_2}\right]+1}{2m_1}\right]=\frac{c}{2}$$

$$或=\left[\frac{\left[\frac{m_1m_2c+m_1n_2+m_2n_1}{m_1}\right]-n_2+1}{2m_2}\right]=\left[\frac{\left[\frac{m_1n_2}{m_1}\right]+m_2c+1}{2m_2}\right]=\left[\frac{c}{2}+\frac{\left[\frac{m_2n_1}{m_1}\right]+1}{2m_2}\right]=\frac{c}{2}$$

Ⅱ、a , b 皆為奇數

$$\rightarrow y=\frac{b+(1-q)}{a+(1-p)}x=\frac{b+1-\frac{n_2}{m_2}}{a+1-\frac{n_1}{m_1}}x=\frac{m_1m_2b+m_1m_2-m_1n_2}{m_1m_2a+m_1m_2-m_2n_1}x$$

$\Rightarrow$線段斜率分子分母和$=m_1m_2c+2m_1m_2-m_1n_2-m_2n_1$

$$\Rightarrow 線段數=\left[\frac{\left[\frac{m_1m_2c+2m_1m_2-m_1n_2-m_2n_1}{m_2}\right]-n_1+1}{2m_1}\right]=\left[\frac{m_1c+2m_1+1}{2m_1}\right]=\left[\frac{c}{2}+1+\frac{1}{2m_1}\right]=\frac{c}{2}+1$$

$$或=\left[\frac{\left[\frac{m_1m_2c+2m_1m_2-m_1n_2-m_2n_1}{m_1}\right]-n_2+1}{2m_2}\right]=\left[\frac{m_2c+2m_2+1}{2m_2}\right]=\left[\frac{c}{2}+1+\frac{1}{2m_2}\right]=\frac{c}{2}+1$$

故總線段數和$=c+1\cdots\cdots(*)$

(2)若總翻轉奇數次

Ⅰ、a 為奇數 b 為偶數

$$\rightarrow y=\frac{b+q}{a+(1-p)}x=\frac{b+\frac{n_2}{m_2}}{a+(1-\frac{n_1}{m_1})}x=\frac{m_1m_2b+m_1n_2}{m_1m_2a+m_1m_2-m_2n_1}x$$

$\Rightarrow$線段斜率分子分母和$=m_1m_2c+m_1m_2+m_1n_2-m_2n_1$

$$\Rightarrow \text{線段數} = \left[\frac{\left[\dfrac{m_1 m_2 c + m_1 m_2 + m_1 n_2 - m_2 n_1}{m_2} \right] - n_1 + 1}{2m_1} \right] = \left[\frac{m_1 c + m_1 + 1}{2m_1} \right] = \left[\frac{c+1}{2} + \frac{1}{2m_1} \right] = \frac{c+1}{2}$$

$$\text{或} = \left[\frac{\left[\dfrac{m_1 m_2 c + m_1 m_2 + m_1 n_2 - m_2 n_1}{m_1} \right] - n_2 + 1}{2m_2} \right] = \left[\frac{m_2 c + m_2 + 1}{2m_2} \right] = \left[\frac{c+1}{2} + \frac{1}{2m_2} \right] = \frac{c+1}{2}$$

Ⅱ、a 為偶數 b 為奇數

$$\rightarrow y = \frac{b+q}{a+(1-p)} x = \frac{b + (1 - \dfrac{n_2}{m_2})}{a + \dfrac{n_1}{m_1}} x = \frac{m_1 m_2 b + m_1 m_2 - m_1 n_2}{m_1 m_2 a + m_2 n_1} x$$

$$\Rightarrow \text{線段斜率分子分母和} = m_1 m_2 c + m_1 m_2 - m_1 n_2 + m_2 n_1$$

$$\Rightarrow \text{線段數} = \left[\frac{\left[\dfrac{m_1 m_2 c + m_1 m_2 - m_1 n_2 + m_2 n_1}{m_2} \right] - n_1 + 1}{2m_1} \right] = \left[\frac{m_1 c + m_1 + 1}{2m_1} \right] = \left[\frac{c+1}{2} + \frac{1}{2m_1} \right] = \frac{c+1}{2}$$

$$\text{或} = \left[\frac{\left[\dfrac{m_1 m_2 c + m_1 m_2 - m_1 n_2 + m_2 n_1}{m_1} \right] - n_2 + 1}{2m_2} \right] = \left[\frac{m_2 c + m_2 + 1}{2m_2} \right] = \left[\frac{c+1}{2} + \frac{1}{2m_2} \right] = \frac{c+1}{2}$$

故總線段數和 $= c+1 \ldots\ldots (**)$

$\therefore$ 由 $(*)(**) \Rightarrow$ 反彈次數 c 次的線段有 $c+1$ 條

由定理二及定理四，若母球之行進路線數 c，則障礙球數之上界 $= \dfrac{c+1}{2}$ 。

由於球桌上一般點以求出線段數，故接下來將球桌邊上一般點進行探討。

三、將子球置於球桌邊上一般點

延續前方做法，求出線段數。其中，探討目標點位於 $x=0$，$x=1$，則分別與 $y=0$ 及 $y=1$ 結論相同，因對稱於 $y=x$。利用定理二及定理四之研究方法便可得到定理五。

> 定理五：若將子球置於 $x=0$ 或 $y=0$ 上，則給定總反彈次數 c，可得翻轉 c 次的線段共有 $\left[\frac{c+1}{2}\right]$ 條；若將子球置於 $x=1$ 或 $y=1$ 上，則翻轉 c 線段共有 $(c+1)-\left[\frac{c+1}{2}\right]$ 條。

證明：

若將目標球置於 (p,q)

1. $x=0=p \Rightarrow a$ 為奇數，則可將線段表為 $y=\dfrac{2\left[\frac{b+1}{2}\right]+(-1)^b\cdot p}{a+1}x$

(1) b 為偶數 $\rightarrow y=\dfrac{b+p}{a+1}=\dfrac{b+\frac{n}{m}}{a+1}=\dfrac{mb+n}{m(a+1)}$

$\rightarrow$ 線段數 $=\left[\dfrac{mc+n+m}{2m}\right]=\left[\dfrac{c+1}{2}+\dfrac{n}{2m}\right]=\left[\dfrac{c+1}{2}\right]$

(2) b 為奇數 $\rightarrow y=\dfrac{b+1-p}{a+1}=\dfrac{b+1-\frac{n}{m}}{a+1}=\dfrac{mb+m-n}{m(a+1)}$

$\rightarrow$ 線段數 $=\left[\dfrac{mc+2m-n}{2m}\right]=\left[\dfrac{c}{2}+1-\dfrac{n}{2m}\right]=\left[\dfrac{c}{2}\right]$

其中，$y=0$ 結果亦然。

2. $x=1=p \Rightarrow a$ 為偶數，則可將線段表為 $y=\dfrac{2\left[\frac{b+1}{2}\right]+(-1)^b\cdot p}{a+1}x$

(1) b 為偶數 $\rightarrow y=\dfrac{b+p}{a+1}=\dfrac{b+\frac{n}{m}}{a+1}=\dfrac{mb+n}{m(a+1)}$

$\rightarrow$ 線段數 $=\left[\dfrac{mc+n+m}{m}\right]-\left[\dfrac{c+1}{2}\right]=\left[c+1+\dfrac{n}{m}\right]-\left[\dfrac{c+1}{2}\right]=c+1-\left[\dfrac{c+1}{2}\right]$

(2) b 為奇數 $\rightarrow y=\dfrac{b+1-p}{a+1}=\dfrac{b+1-\dfrac{n}{m}}{a+1}=\dfrac{mb+m-n}{m(a+1)}$

$\rightarrow$ 線段數 $=\left[\dfrac{mc+2m-n}{m}\right]-\left[\dfrac{c}{2}\right]=\left[c+2-\dfrac{n}{m}\right]-\left[\dfrac{c}{2}\right]=c+1-\left[\dfrac{c}{2}\right]$

其中，$y=1$ 結果亦然。

因此，由定理三、定理五可得，若將子球置於 $x=0$ 或 $y=0$ 上，則障礙球數之上界 $=\dfrac{\left[\dfrac{c+1}{2}\right]}{2}$。若將子球置於 $x=1$ 或 $y=1$ 上，則障礙球數之上界 $=\dfrac{(c+1)-\left[\dfrac{c+1}{2}\right]}{2}$ 條。

陸、結論

一、令一路徑之所有向右翻轉次數為a，所有向上次數為b，定線段第n個與方格線的交點為P_{n-1}，則$\overline{P_nP_{n+1}}$斜率$\begin{cases} a, n=2t, t\in\{¥,0\} \\ -a, n=2t+1, t\in ¥ \end{cases}$，且此路經碰到$x=0$的次數為$\left[\frac{a}{2}\right]$次，碰到$x=1$的次數為$\left[\frac{a-1}{2}\right]+1$次，同理，碰到$y=0$的次數為$\left[\frac{b}{2}\right]$次，碰到$y=1$的次數為$\left[\frac{b-1}{2}\right]+1$次。

二、若將子球置於與母球同邊之中點，給定總反彈次數 c，可得翻轉 c 次的線段共有$\left[\frac{c+1}{2}\right]$條。其中，$m<1$之解有$\left[\frac{c+3}{4}\right]$個，$m>1$之解有$\left[\frac{c+1}{4}\right]$個。

三、線段的截距和反彈方向的關係:

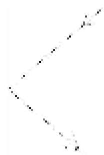

$:\frac{-1}{a}<\frac{-b}{a}<1-\frac{1}{a}$

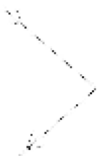

$:1>\frac{-b}{a}>0$

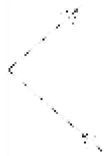

$:1-\frac{1}{a}<\frac{-b}{a}<\frac{-1}{a}$


$1>\frac{-b}{a}>0$


$:1-\frac{1}{a}<\frac{-b}{a}<1$


$:0>\frac{-b}{a}>\frac{-1}{a}$


$:1>\frac{-b}{a}>1-\frac{1}{a}$


$-\frac{1}{a}<-\frac{b}{a}<1$

四、交點與經翻轉後的交點之間的關係:$\begin{cases} x'=2\left[\frac{a+1}{2}\right]+(-1)^a x \\ y'=2\left[\frac{b+1}{2}\right]+(-1)^b y \end{cases}$.

五、任取兩條路線，必至少有一交點。

六、若將子球置於與母球同邊之中點，則障礙球數之上界$=\dfrac{\left[\dfrac{c+1}{2}\right]}{2}$。

若將子球置於球桌內任一點，則障礙球數之上界$=\dfrac{c+1}{2}$。

若將子球置於$x=0$或$y=0$上，則障礙球數之上界$=\dfrac{\left[\dfrac{c+1}{2}\right]}{2}$。

若將子球置於$x=1$或$y=1$上，則障礙球數之上界$=\dfrac{(c+1)-\left[\dfrac{c+1}{2}\right]}{2}$條。

柒、未來展望

希望能找出撞球桌中放置障礙球之一般化座標解為何。

捌、參考資料

一、〈數學家族 2〉九章出版社

二、中華民國第 42 屆中小學科學展覽會高中組數學科：正 N 邊形的撞球路徑

http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/42/pdf/e/4/040414.pdf

三、2015 年國際科展數學科：讓球回家