摘要

我們知道在高中競賽的覆蓋題目中，存在有許多有趣的問題，如著色問題，組合問題……等等。我的專題主要是探討任何邊長是2^m的正方形，只要挖掉任何一塊，剩下的圖形都可以用兩臂等長的L型積木去填滿，還有提到任何邊長是奇數的正方形，只要挖掉正中間的那一塊，剩下的圖形都可以用兩臂不等長的L型積木去填滿。並假設如果不是挖掉中間那塊，而是挖掉任意一塊的話，能填滿的條件又是如何呢？且在符合能填滿的條件之下，填滿此圖形的方法數又該如何計算。抑或是推廣至三維空間時，奇數邊長的正方體，在挖掉任一塊之後，是否也能使用兩臂不等長的L型積木去填滿？如果不行，又存在著什麼特殊條件能使其成立呢？

目錄

壹、 研究動機

在講解某競賽的組合題目時，數學老師突發奇想，向我們提出一個問題：任何邊長是2^m的正方形，只要挖掉正中間的那一塊，剩下的圖形是否都可以用兩臂等長L型的積木去填滿呢？我立刻受到極大的吸引，決心要靠自己把它證明出來。成功證明完之後，我又開始想其他相關的問題：如果題目的條件改成在邊長是2^m的正方形中挖掉任意一塊，是否也能全部填滿呢？那如果是兩臂不等長的L行積木，在邊長為奇數的正方形中，挖掉中間那塊，是否也有此性質呢？如果不是挖掉中間那塊，而是挖掉任意一塊的話，會不會也能用兩臂不等長的L型的積木去填滿呢？如果不行的話，能填滿的條件又是什麼呢？在符合能填滿的條件之下，填滿此圖形的方法數又該如何計算呢?當推廣至三維空間後，能填滿的條件又是如何呢？而立體圖形在可以完成的情況下，各種情況的排列數又是如何？

貳、研究目的

一、證明任何邊長是2^m的正方形，只要任意挖掉一塊，剩下的圖形是否都可以用兩臂等長L型的積木去填滿。

二、證明兩臂邊長為2×3的不等長的L行積木，在邊長為奇數的正方形中，挖掉中間那塊，也能完全填滿。

三、找出兩臂邊長為2×3的不等長的L行積木，在邊長為奇數的正方形中，任意挖掉一塊，也完全填滿的條件。

四、找出兩臂邊長為2×3的不等長的L行積木，在邊長為奇數的正方體中，任意挖掉一塊，也完全填滿的條件。

五、探討各種情形的排列數為何。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦繪圖軟體 GeoGebra、C++

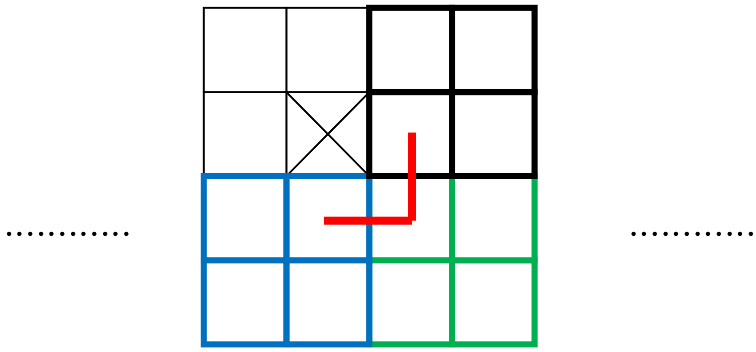
肆、研究過程

一、問題簡化與解決問題的思路：

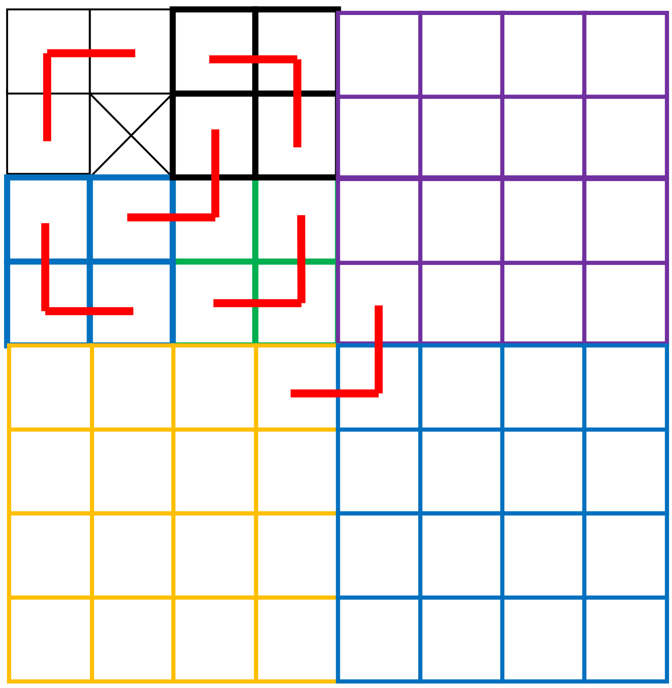
(一)先證明當$n=2^m$時，$n\times n$的正方形挖去正中間塊均可以兩臂等長L型積木填滿。形如

證明：

已知每當在一個缺角的2×2的正方形中放入一個兩臂等長的L型積木時，必定會使另外3個2×2的正方形缺一個角



此三個缺角的正方形經由此方式完成拼湊後，會得到一個完整的4×4正方形。在其角落再放置一個兩臂等長的L型積木，



又會使其他3個完整的正方形變成缺角的正方形，如此周而復始，最後即可完成所有邊常為2^m的形式的正方形。

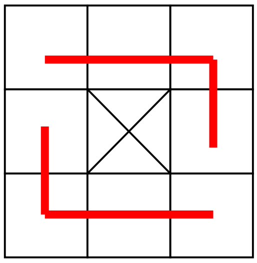
(二)當n為奇數時，$n\times n$的正方形挖去正中間塊均可以兩臂不等長 L 型積木填滿。形如

證明：

當n為偶數時，其總格子數為偶數，在挖掉一格之後總數即變為奇數。
故必定無法以占格子數為偶數的兩臂不等長L型積木填滿。

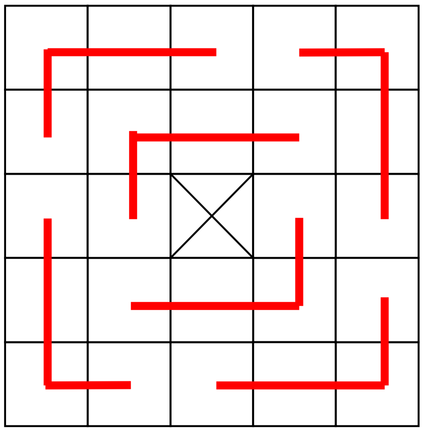
當n為奇數時，其總格子數為奇數，在挖掉一格之後總數即變為偶數。
故有機會以占格子數為偶數的兩臂不等長L型積木填滿。

觀察圖形，先看3×3的正方形：



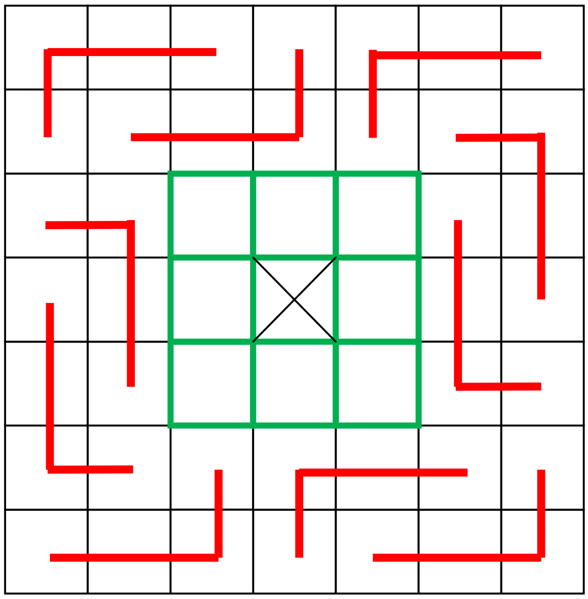
可完全填滿；

再看5×5的正方形：



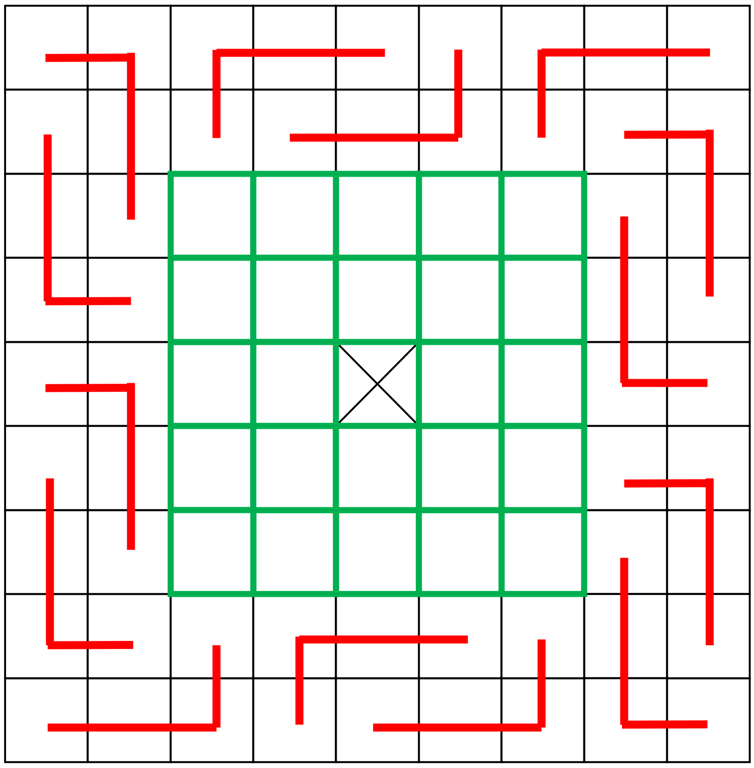
也可完全填滿；

再看 7×7 的正方形



可完全填滿；
並發現其中間涵蓋了一個3×3 的小正方形
由於3×3 的小正方形可完成，故 7×7 的正方形亦可完成

再看 9×9 的正方形



可完全填滿；

並發現其中間涵蓋了一個5×5的小正方形，
由於5×5的小正方形可完成，故7×7的正方形亦可完成。

綜上所述，我們得到結論：

當$n=4k+1$時，先將中間以5×5的小正方形的方式填滿，再依次向外延伸，即可填滿整個圖形；類似地，
當$n=4k+3$時，先將中間以3×3的小正方形的方式填滿，再依次向外延伸，即可填滿整個圖形。

二、主要問題結果與討論:

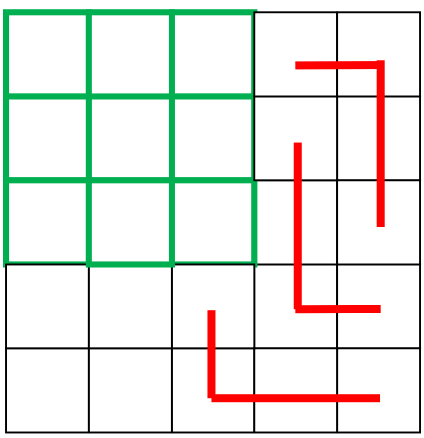
由於討論一般邊長$n\times n$的正方形太過於複雜，我們解決的基本想法必須把它切割成若干個小等分再一一進行討論研究。
首先要切成小等分正方形時必須先確定某幾塊圖形的區域必能被 L 型積木填滿，$n\times n$的正方形挖去必定可以完成的圖形後最後剩下的可能為3×3的正方形或5×5的正方形，而挖空的位置則可能是在角落、邊上或中心點。
以下討論其情形。
若當$n>m$時，則

$(4n+1)^2$切割後可縮小至$(4m+1)^2$，但$(4n+1)^2$切割後不可縮小至$(4m+3)^2$.

$(4n+3)^2$切割後可縮小至$(4m+3)^2$，但$(4n+3)^2$切割後不可縮小至$(4m+1)^2$.

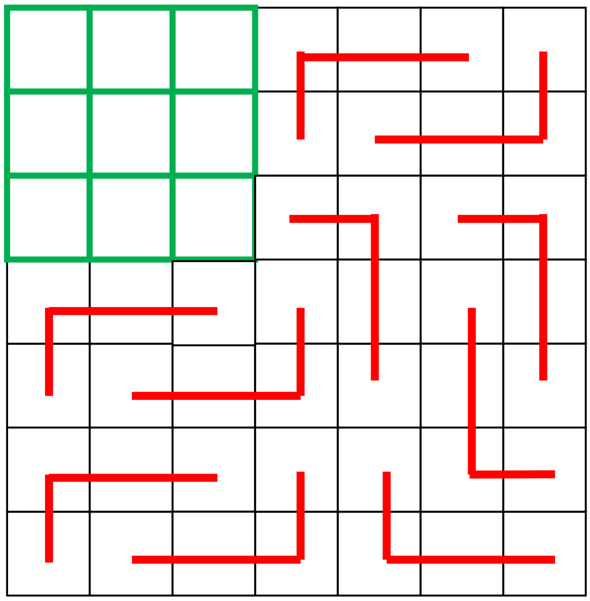
觀察圖形，先看3×3的正方形

(1) 5×5的正方形經過切割後變為3×3的正方形



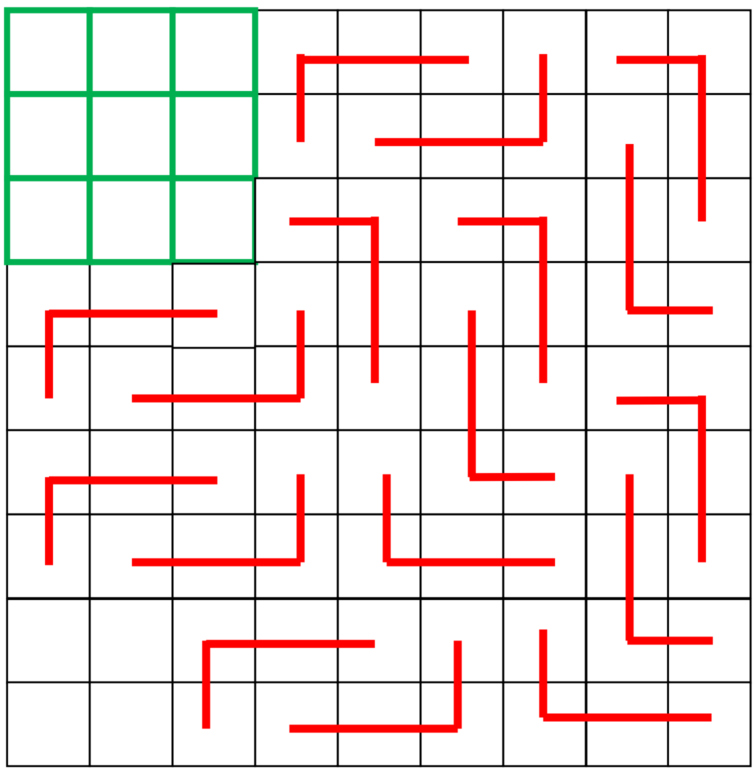
結論：**無法**完成

(2) 7×7 的正方形經過切割後變為3×3的正方形



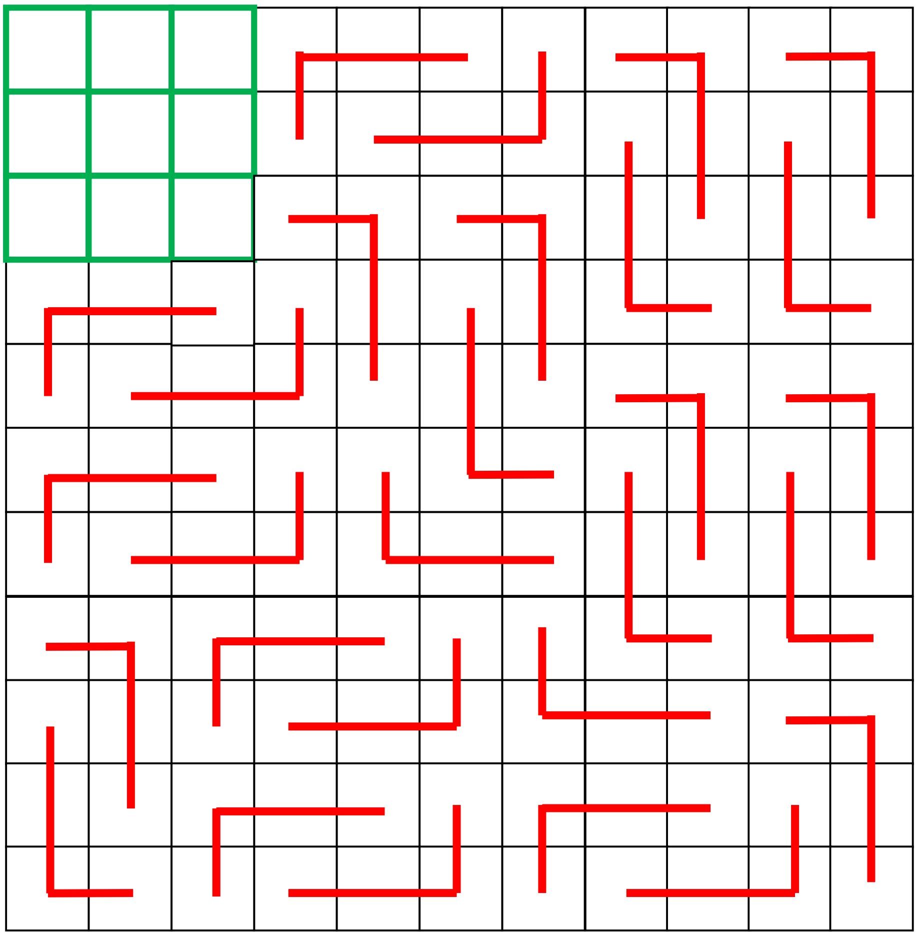
結論：**可以**完成

(3) 9×9 的正方形經過切割後變為3×3的正方形



結論：**無法**完成

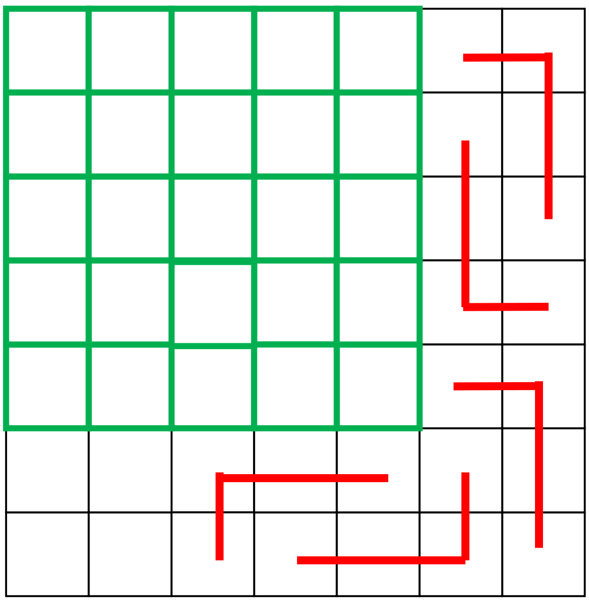
(4)11×11 的正方形經過切割後變為3×3 的正方形



結論：**可**完成

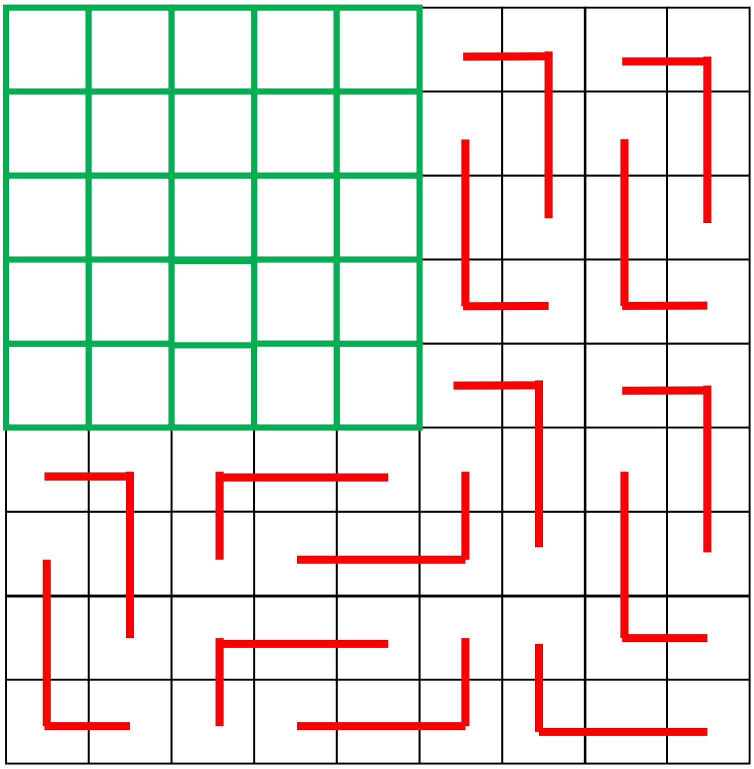
再看5×5 的正方形

(1) 7×7 的正方形經過切割後變為5×5 的正方形



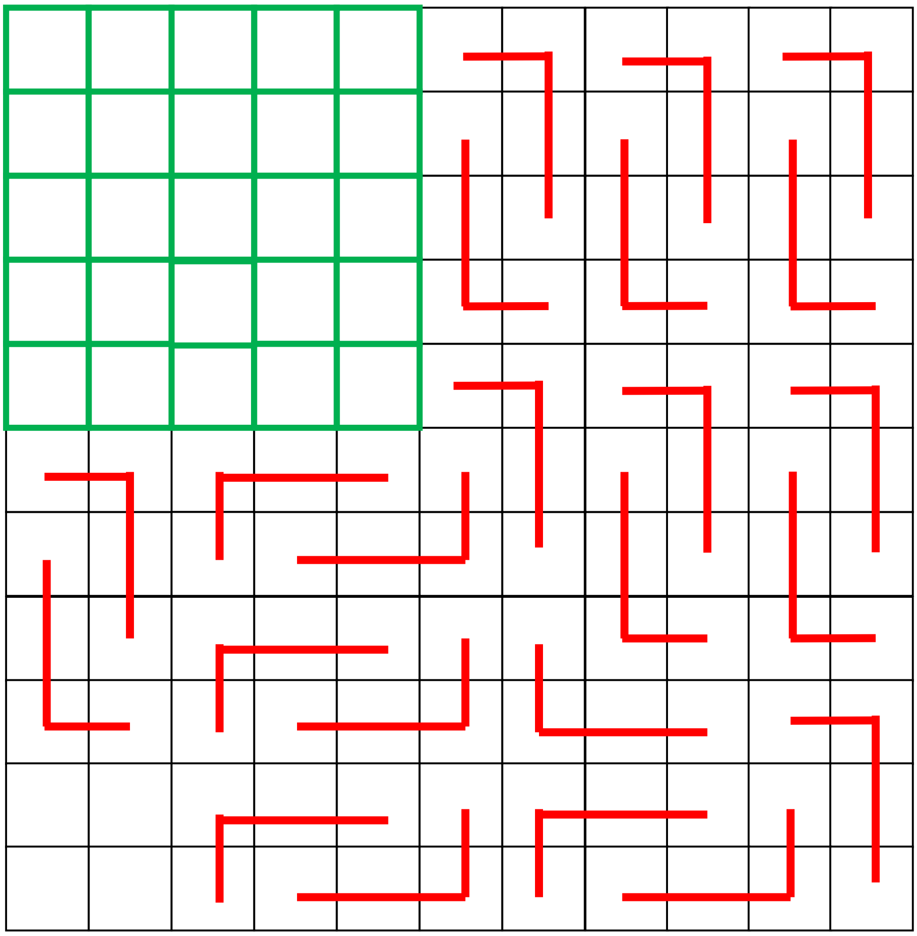
結論：**無法**完成

(2)9×9 的正方形經過切割後變為5×5 的正方形



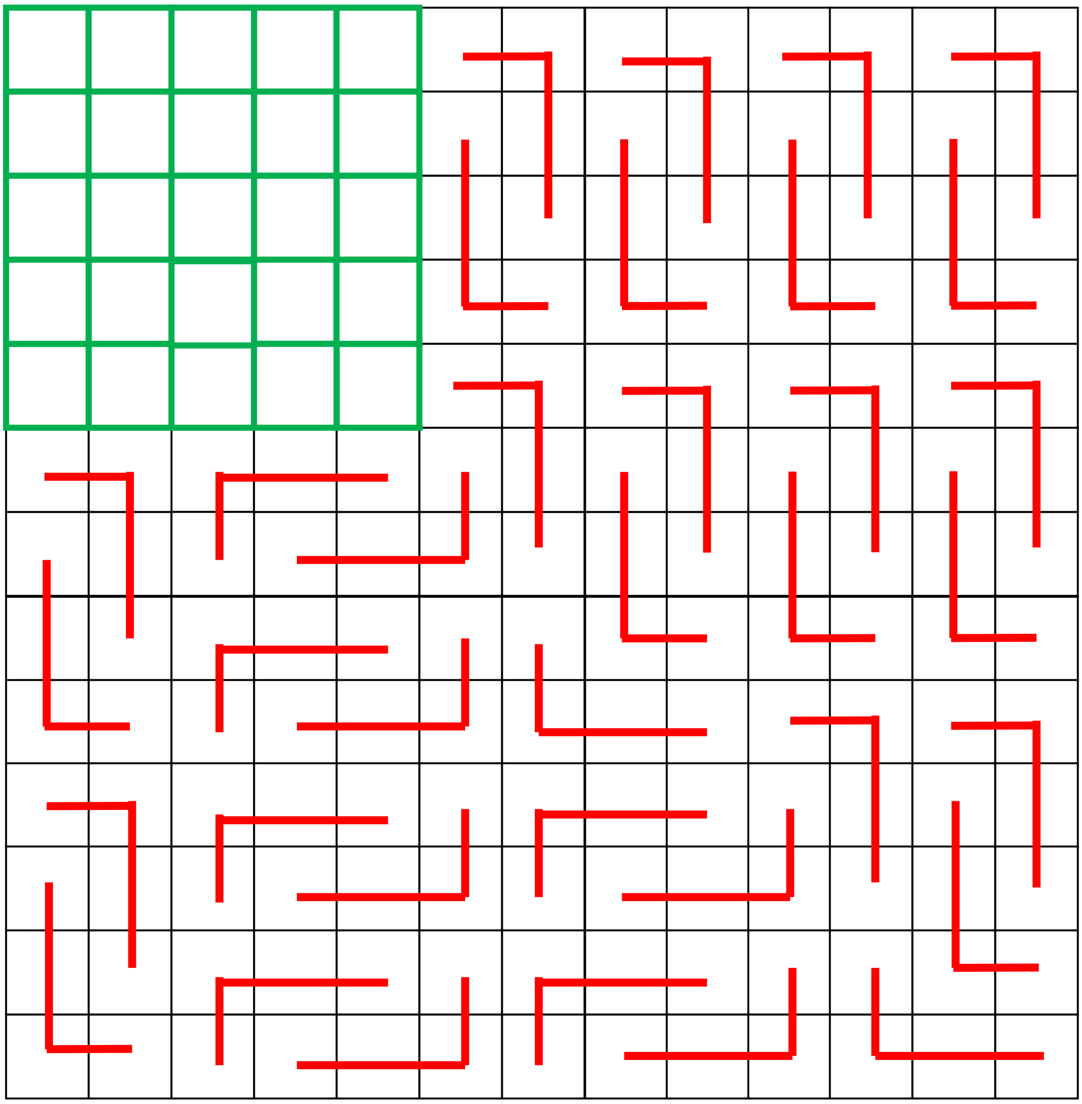
結論：可完成

(3)11×11 的正方形經過切割後變為 5×5 的正方形



結論：**無法**完成

(4)13×13 的正方形經過切割後變為 5×5 的正方形



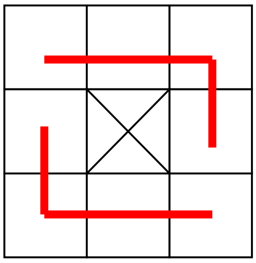
結論：可完成

(六)

由於任意 $(4n+3)^2$ 的正方形切割掉能補滿的方格之後，必能縮小至 3×3 的正方形

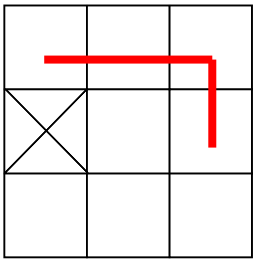
故接著討論當 $(4n+3)^2$ 切割後縮小至 3×3 的正方形時，所有挖空位置的可能

(1) 挖空正中心時



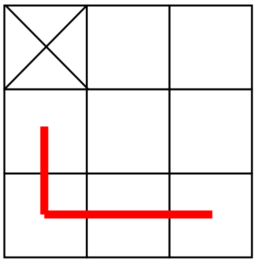
結論：可完成

(2) 挖空邊上時



結論：無法完成

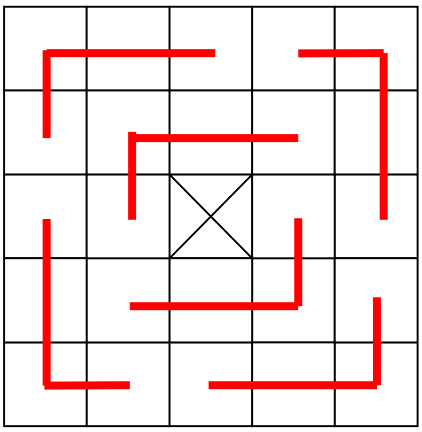
(3) 挖空角落上時



結論：無法完成

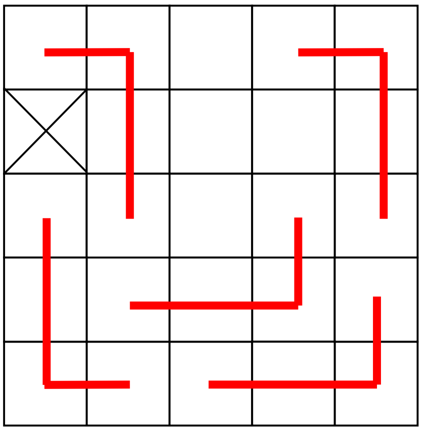
(六) 接著討論當 $(4n+1)^2$ 切割後縮小至 5×5 的正方形時，所有挖空位置的可能

(1) 挖空正中心時



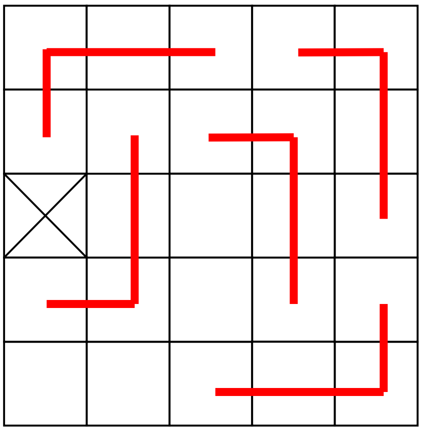
結論：可完成

(2) 挖空邊上(非邊中心) 時



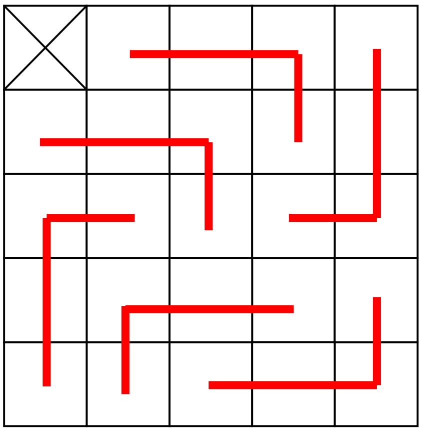
結論：無法完成

(3) 挖空邊中心上時



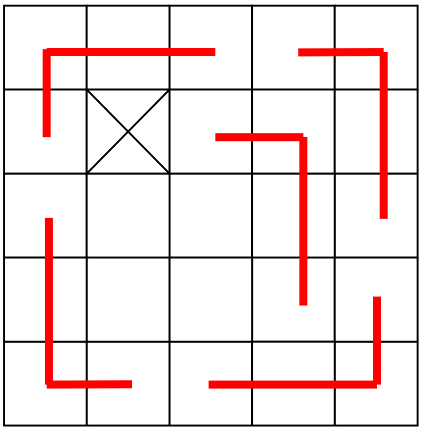
結論：無法完成

(4) 挖空角落上時



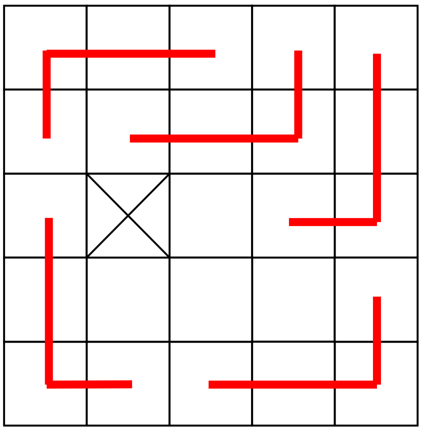
結論：可完成

(5)如圖所示時



結論：**無法**完成

(6)如圖所示時



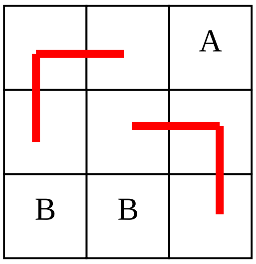
結論：**無法**完成

(七)

接著討論立體時的情形，先以  作為討論

先看 3×3×3 的圖形：

第一層：



第二層：

		A
D		A
B	C	E

第三層：

D		
D		E
C	C	E

故可成功填滿$3\times3\times3$**的正方體**

而 $n\times n\times n$ 的正方體又分為：

$3k\times3k\times3k$ ，$(3k+1)\times(3k+1)\times(3k+1)$ ，$(3k+2)\times(3k+2)\times(3k+2)$ 共三種，

以下將分別一一討論：

1、$3k\times3k\times3k$ ：

可直接以 $3\times3\times3$ 的正方體排滿

2、$(3k+1)\times(3k+1)\times(3k+1)$ ：

$(3k+1)\times(3k+1)\times(3k+1)=27k^3+27k^2+9k+1$

$27k^3+27k^2+9k+1\equiv1(\bmod 3)$

故必須先挖一塊才能補滿

3、$(3k+2)\times(3k+2)\times(3k+2)$ ：

$(3k+2)\times(3k+2)\times(3k+2)=27k^3+54k^2+36k+8$

$(27k^3+54k^2+36k+8)\equiv(9k^3+18k^2+12k+2)\equiv2(\bmod 3)$

故必須先挖二塊才能補滿

此立體圖形因為要挖掉的方塊過多，使得問題變得較為複雜，故先不討論

(八)討論$(3k+1)\times(3k+1)\times(3k+1)$的情況：

我們可以將$(3k+1)\times(3k+1)\times(3k+1)$切成$3k\times 3k\times 3k$一塊、$3k\times(3k+1)\times 1$三塊和$1\times 1\times 1$一塊，現在只要找出原本兩臂等長的$L$行積木能拼湊出$3k\times(3k+1)\times 1$的方法即可。

原本兩臂等長的L行積木裡片合起來即能拼湊出2×3之長方形，

故問題變成使用2×3的長方形拼成$3k\times(3k+1)$的長方形：

(2×3)可拼成$(2n_1\times 3m_1)$，也可以拼成$(3n_2\times 2m_2)$，將這兩塊拼在一起後，會得到$(2n_1+3n_2)\times(3m_1+2m_2)$，令其值為$3k\times(3k+1)$，及得到下列二元一次方程組：

$2n_1+3n_2=3k$

$3m_1+2m_2=3k+1$，之後即可找出此方程式通解。

(九)以下討論平面可以完成以兩臂等長的L行積木完全鋪滿時的排列數：

程式想法：使用遞迴+map+struct，以遞迴傳入布林(bool)陣列建構的struct表示未覆蓋之區域狀態，針對每個兩臂等長的L行積木旋轉狀態，一行一行的掃描，找出第一個未覆蓋點，再放上去，若未覆蓋區域被切割，則針對每個獨立區域遞迴求解再相乘；若否，則直接求出剩餘區域之解。每個旋轉狀態放上去後的解求出後最後再相加，即回傳答案。

為了加快速度，每次進去遞迴適時使用map工具檢查是否以計算過相同的case，並且若未覆蓋格數不為四的倍數時直接回傳方法數「0」。

為了減少記憶體使用量，使用位元運算，此方法可使計算再加速，儘管如此，13×13的正方形仍然跑了約半小時，佔用了電腦總記憶體的一半，可見其數量及暴增的驚人程度。

以下為$C++$程式爆開之結果：

1、當邊長$n=4k+1$時，挖空角落上時：

當$n=5$時，排列數有22種。

當$n=9$時，排列數有1709594種。

當$n=13$時，排列數有1027562355908220種。

2、當邊長$n=2k+1$時，挖空正中心時：

當$n=3$時，排列數有 4 種。

當$n=5$時，排列數有 40 種。

當$n=7$時，排列數有 3620 種。

當$n=9$時，排列數有 2493378 種。

當$n=11$時，排列數有 19311952376 種。

當$n=13$時，排列數有 1259757906843204 種。

但目前能無法找出其關係和規律，僅能確定其**取**$\log$**兩次之後約與**n**呈線性關係**。

伍、結論

(一)當使用邊長 n 為 2^m 的形式時，$n\times n$ 的正方形挖去任何一塊均可以兩臂邊長為 2×2 的等長 L 型積木填滿。

(二)當使用兩臂邊長為 2×3 的不等長 L 型積木時，分為下列兩種情況：

假設左下角為原點 $(0,0)$，小正方形邊長為 1：

(1)當 $n=4k+1$ 時，唯有挖空正中心、角落上時可以兩臂邊長為 2×3 的不等長 L 型積木完全鋪滿，即原來 $n\times n$ 的正方形可完全撲滿的條件為挖去 $(4m+3,4m+3)$、$(n-4m-3,4m+3)$、$(4m+3,n-4m-3)$、$(n-4m-3,n-4m-3)$

(2)當 $n=4k+3$ 時，唯有挖空 3×3 正中心時可以兩臂邊長為 2×3 的不等長 L 型積木完全鋪滿，即原來 $n\times n$ 的正方形可完全撲滿的條件為挖去 $(2n,2n)$.

(三)平面上挖空後可以兩臂邊長為 2×3 的不等長 L 型積木完全鋪滿時，其排列數取 2 次 $\log$ 之後大約與邊長呈現線性關係。

(四)立體圖形的部分：

$3\times3\times3$：可以兩臂邊長為 2×2 等長的 L 型積木完全填滿，其排列情形如上。

$3k\times3k\times3k$：也可以輕鬆以兩臂邊長為 2×2 等長的 L 型積木完全填滿。

$(3k+1)\times(3k+1)\times(3k+1)$：可以兩臂邊長為 2×2 等長的 L 型積木填滿之後剛剛好剩一格空格。

陸、未來展望

希望能夠導出其與邊長和挖洞地點之關係，進而推出挖二個洞、挖三個洞乃至挖n個洞的填滿條件。且在符合能填滿的條件之下，填滿此圖形的方法數又該如何計算？抑或是推廣至三維空間時，奇數邊長的正方體，在挖掉任一塊之後，是否也能使用兩臂邊長為2×3的不等長的L型積木去填滿？如果不行，又存在著什麼特殊條件能使其成立呢？

柒、參考資料

普通數學第二冊，龍騰文化出版社。