摘要

當有很多人需要比出勝負時，不太可能一下子分出，往往需要兩兩對決以分出結果，不過，有時賽制的規劃會影響到比賽的公平性，常常造成爭執。在文中，我們將介紹一種簡單的賽制。我們規定，由兩人先對決，接著勝者與下一人對決，依此類推，連贏2場者獲勝，計算其獲勝機率。接著改變獲勝條件及參加人數，進一步推廣連贏k場者獲勝機率為何，與獲勝場次的期望值與變異數。

目錄

壹、 研究動機

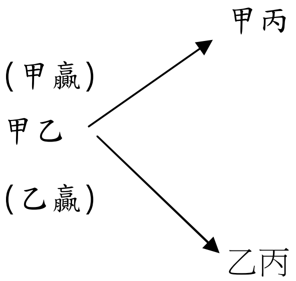
機率的源起是從賭博而來，換言之，是在探討人們比賽時的勝算，以及較易獲勝的方法。一年級的時候，我們學到了一些方法來計算簡單的機率問題，在課堂上我突然想到了這一個規則，覺得很有趣，因為課堂中教的都是比賽有限次的情形，而在此規則中，可能比賽永遠不會結束，而且每一場比賽之結果都會影響下一場比賽的陣容,所以無法用簡單的方法處理,所以我動手嘗試找出方法計算。

貳、 研究目的

在本研究中我們考慮賽程規則如下:

若有若干個人比賽，兩兩對決，對決時的彼此勝率均是$\frac{1}{2}$，勝者與順位中的下一人對決，直到有人連贏兩局，遊戲結束。

以4人對弈為例，如下圖，甲乙先比，勝者與丙比，再勝者與丁比，再勝者與甲比，依此類推，直到有人連贏兩場為止。



我們的目的是去討論在此特定賽程下勝者機率為何?以及選手先後順序不同所造成的影響，我們從最簡單的情況去討論，亦即從計算在此規則下三人比賽時獲勝的機率，推廣至一般情況機率為何。

參、 研究設備及器材

紙、筆、計算機、python

肆、 規則說明與定義

在本研究中我們考慮賽程規則如下:

情形一:若有若干個人比賽，兩兩對決，對決時的彼此勝率均是$\frac{1}{2}$，勝者與順位中的下一人對決，直到有人連贏兩局，遊戲結束。

以4人對弈為例，如下圖，甲乙先比，勝者與丙比，再勝者與丁比，再勝者與甲

比，依此類推，直到有人連贏兩場為止。

$$
\begin{array}{lll}
 & & \text{甲丙} \\
(\text{甲贏}) & \nearrow & \\
\text{甲乙} & & \\
(\text{乙贏}) & \searrow & \\
 & & \text{乙丙}
\end{array}
$$

情形二:若有若干個人比賽，兩兩對決，對決時的彼此勝率均是$\frac{1}{2}$，勝者與順位中的下一人對決，直到有人連贏k局，遊戲結束。

伍、 研究方法與過程

一、討論三人比賽，規定連贏兩場時獲勝，每人獲勝機率:

(一)假設三人分別為甲、乙、丙，且甲乙先對決

(二)討論：

1. 先假設甲贏了第一場，為求簡便，以表格表示。如比賽未結束，則須比下一場。在這裡以圖表表示可能的結果，並將可能讓比賽結束的結果之機率算出，如果衛冕者失利，則須舉行下一場比賽。

場次	比賽雙方	如何能使比賽結束	發生機率	結果
2	甲丙	甲贏	$\frac{1}{4}$	甲獲勝
3	甲丙	丙贏	$\frac{1}{8}$	丙獲勝
4	甲乙	甲贏	$\frac{1}{16}$	甲獲勝
5	乙丙	乙贏	$\frac{1}{32}$	乙獲勝
6	甲丙	丙贏	$\frac{1}{64}$	丙獲勝
7	甲乙	甲贏	$\frac{1}{128}$	甲獲勝
8	乙丙	乙贏	$\frac{1}{256}$	乙獲勝
9	甲丙	丙贏	$\frac{1}{512}$	丙獲勝
10	甲乙	甲贏	$\frac{1}{1024}$	甲獲勝

值得注意的一點是，如果第二場丙贏了，下一場是甲丙對決，而不是乙丙，因為我們的規則規定的「順位中的下一人」，指的是接著挑戰的順位，由於第二場丙加入，所以第三場需補甲，在此可以發現，三方會輪流得到勝利的機會，在得知此一規則後，我們就能用無窮等比級數的公式算出獲勝的機率了。

$$P(\text{甲勝})=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\cdots=\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{9}{28}.$$

$$P(\text{乙勝})=\frac{1}{32}+\frac{1}{256}+\frac{1}{2048}+\cdots=\frac{\frac{1}{32}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{28}.$$

$$P(\text{丙勝})=\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\frac{1}{512}+\cdots=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7}.$$

可是，這是在甲贏了第一場對決的前提下做出的計算，必須在考慮乙贏了第一場的情形。

2．若乙贏了第一場，則

場次	比賽雙方	如何能使比賽結束	發生機率	結果
2	乙丙	乙贏	$\frac{1}{4}$	乙獲勝
3	甲丙	丙贏	$\frac{1}{8}$	丙獲勝
4	甲乙	甲贏	$\frac{1}{16}$	甲獲勝
5	乙丙	乙贏	$\frac{1}{32}$	乙獲勝
6	甲丙	丙贏	$\frac{1}{64}$	丙獲勝
7	甲乙	甲贏	$\frac{1}{128}$	甲獲勝
8	乙丙	乙贏	$\frac{1}{256}$	乙獲勝
9	甲丙	丙贏	$\frac{1}{512}$	丙獲勝
10	甲乙	甲贏	$\frac{1}{1024}$	甲獲勝
11	乙丙	乙贏	$\frac{1}{2048}$	乙獲勝

同樣能找出規則

$$P(\text{甲勝})=\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{1024}\cdots=\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{14}.$$

$$P(\text{乙勝})=\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{256}\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7}.$$

$$P(\text{丙勝})=\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\frac{1}{512}\cdots=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7}.$$

3. 故

甲贏的機率 $\frac{9}{28}+\frac{1}{14}=\frac{11}{28}$，乙贏的機率 $\frac{1}{28}+\frac{2}{7}=\frac{9}{28}$，丙贏的機率 $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{2}{7}$.

二、討論n人比賽時的獲勝機率一般解：

假設有$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$這n個人，由a_1,a_2先比賽，贏的再與a_3比賽……，先完成連贏兩場的目標者獲得勝利。

1．假設a_1贏了第一場

場次	比賽雙方	如何能使比賽結束	發生機率	結果
2	$a_1\ a_3$	a_1贏	$\frac{1}{4}$	a_1獲勝
3	$a_3\ a_4$	a_3贏	$\frac{1}{8}$	a_3獲勝
4	$a_4\ a_5$	a_4贏	$\frac{1}{16}$	a_4獲勝
…				
$n-1$	$a_{n-1}\ a_n$	a_{n-1}贏	$\frac{1}{2^{n-1}}$	a_{n-1}獲勝
n	$a_n\ a_1$	a_n贏	$\frac{1}{2^n}$	a_n獲勝
$n+1$	$a_1\ a_2$	a_1贏	$\frac{1}{2^{n+1}}$	a_1獲勝
$n+2$	$a_2\ a_3$	a_2贏	$\frac{1}{2^{n+2}}$	a_2獲勝

可以找到規律，再以無窮等比級數的公式得到機率：

$$\boxed{P(a_1\text{勝})=\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2^{3n+1}}\cdots=\frac{2^n+1}{2^{n+2}-4}}$$

$$\boxed{P(a_2\text{勝})=\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{3n+1}}+\cdots=\frac{1}{2^{n+2}-4}}$$

$$\boxed{P(a_3\text{勝})=\frac{1}{8}+\frac{1}{2^{n+3}}+\frac{1}{2^{2n+3}}+\cdots+\frac{2^{n-3}}{2^n-1}}$$

$$\boxed{P(a_m\text{勝})=\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^{n+m}}+\frac{1}{2^{2n+m}}+\cdots=\frac{2^{n-m}}{2^n-1}\text{，}(2<m\le n)}$$

2．若a_2贏了第一場，則

$$\boxed{P(a_2\text{勝})=\frac{1}{4}+\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{3n+2}}\cdots=\frac{2^n}{2^{n+2}-4}}$$

$$\boxed{P(a_1\text{勝})=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2^{3n+1}}+\cdots=\frac{2}{2^{n+2}-4}}$$

$$\boxed{P(a_3\text{勝})=\frac{1}{8}+\frac{1}{2^{n+3}}+\frac{1}{2^{2n+3}}+\cdots+\frac{2^{n-3}}{2^n-1}}$$

$$\boxed{P(a_k\text{勝})=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{n+k}}+\frac{1}{2^{2n+k}}+\cdots=\frac{2^{n-k}}{2^n-1}\text{，}(2<k\leq n)}$$

3．故

$$\boxed{P(a_1\text{勝})=\frac{2^n+1}{2^{n+2}-4}+\frac{2}{2^{n+2}-4}=\frac{2^n+3}{2^{n+2}-4}}$$

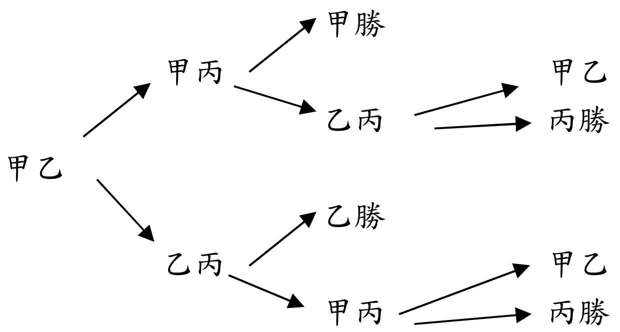
$$\boxed{P(a_2\text{勝})=\frac{1}{2^{n+2}-4}+\frac{2^n}{2^{n+2}-4}=\frac{2^n+1}{2^{n+2}-4}}$$

$$\boxed{P(a_m\text{勝})=\frac{2^{n-m}}{2^n-1}\times 2=\frac{2^{n-m+1}}{2^n-1}\text{，}(2<m\leq n)}$$

從以上結果得到，在$k>2$時，勝率與2^k成反比，也就是說，排在越後的人越不容易獲勝，這與直覺相符，因為排在後面的人必須要在前面的人失敗後才有機會，自然較不容易獲勝。

三、計算總場數之期望值及變異數:

假設隨機變數X表示所需比的總場數，我們能利用如上樹狀圖的方式來計算期望值，先從3人對弈，連贏兩場者獲勝為例:

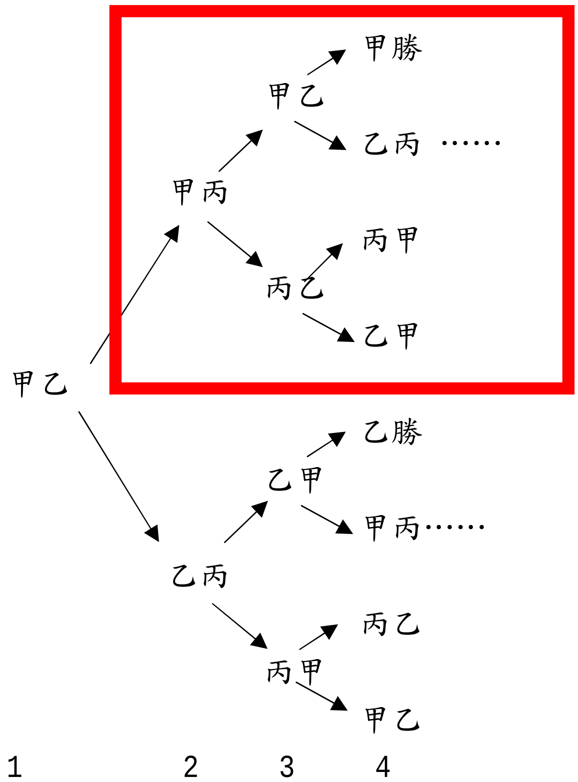


可看出每一輪的四種可能中，都會有兩種使比賽結束，且機率相等

需比場數之期望值:

$$2\cdot\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots\right)=2\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i+1}{2^{i+1}}\right)=2\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^{i+1}}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i+1}}\right)=3$$

可是當人數非常多的時候，或是勝利條件更嚴苛時，以上的方法便行不通，因為樹狀圖會變得非常複雜。為了計算期望值，我們試圖找出更好的方法。最後發現，在畫出樹狀圖後，只要注意勝者換人時的情形即可藉由尋找關係式算出期望值，如下圖，我們以三人，規定連贏3場者獲勝為例:



觀察紅框處，我們假設第二場開始時(甲贏一場)，場數的期望值為S，則能發現，第三場乙丙對決時開始，期望值亦為S，故可列出關係式並求得S:

$S=\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{4}(S+2)+\frac{1}{2}(S+1)=6$

但S是從第二場開始計算的答案，所以總場數之期望值為7場。我們可以發現用此種方法計算不須考慮總人數，因為我們只需判斷衛冕者有無換人即可，亦即，無論有幾人對弈，只要條件一樣，總場數的期望值便是固定的。在得知這個規則之後，我們就能計算出所有情況的期望值了。

假設需連贏k場，我們也是從有一人(假設為A)已贏一場開始，設期望值為S，則對每一場，A如果輸了，則衛冕者換人，如A贏，則再比下一場，如果再贏$k-1$場即勝利。由樹狀圖、上述規則和期望值定義可得:

$$S=\frac{1}{2}(S+1)+\frac{1}{4}(S+2)+...+\frac{1}{2^{k-1}}(S+k-1)+\frac{1}{2^{k-1}}(k-1)$$

移項得

$$\frac{1}{2^{k-1}}S=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...\frac{k-1}{2^{k-1}}+\frac{k-1}{2^{k-1}}$$ 同乘2^{k-1}：

$$S=2^{k-2}+2\times 2^{k-3}+3\times 2^{k-4}+...+(k-1)+(k-1)$$

將上式乘以2再減去原式即可得:

$S=2^{k}-2$.

同理，S是從第二場開始計算的答案，所以

總場數之期望值應為: $E(X)=S+1=2^{k}-1$

如上所述，此結果不需考慮總比賽人數，總場數的期望值只與k有關。

計算總場數之變異數，

首先，我們從$k=2$場開始，根據變異數之公式:

$Var(X)=E(X^{2})-E(X)^{2}$.

我們必須先計算出總場數平方的期望值，利用上頁的樹狀圖，我們可以得到:

$$E(X^{2})+2\cdot\frac{1}{2^{2}}\cdot 2^{2}+2\cdot\frac{1}{2^{3}}\cdot 3^{2}+...=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i}}(i+1)^{2}$$

$$2E(X^{2})=2\cdot\frac{1}{2^{1}}\cdot 2^{2}+2\cdot\frac{1}{2^{2}}\cdot 3^{2}+...$$

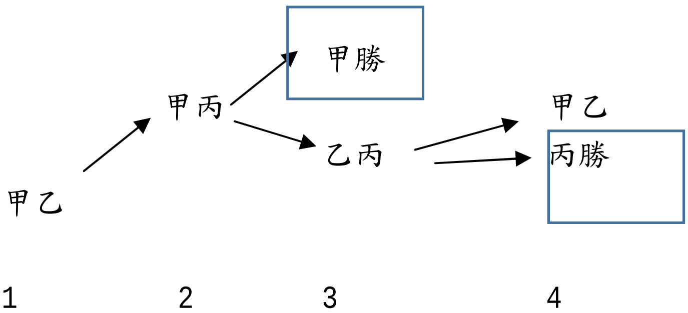
相減得:

$$E(X^{2})=4+\frac{5}{2}+\frac{7}{4}+\frac{9}{8}+...=4+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2i+3}{2^{i}}=4+2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^{i}}+3\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i}}=11$$

所以，變異數:

$Var(X)=11-3^{2}=2$.

當 $k=2$ 時，我們發現，當我們畫出樹狀圖後，如果只看半邊，當比了超過 k 場後，每一次比賽都會有一種可能會結束，如下圖：



因為如此，我們可以輕鬆計算變異數，但是當 $k=3$ 或更多時，我們必須先討論在比完第 m 場時比賽剛好結束的可能情形數，才能計算。於是我藉由樹狀圖畫出 $k=3$ 情形的半邊，發現勝利的可能數會有一巧妙的規則：

已比的場數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
比賽結束的可能數	0	0	1	1	2	3	5	8	13

們可以發現，當比超過三場後，之後比賽結束的可能數會隨場數遞增，而且每一項都會是前兩項的和，此即費波那契數列。那為什麼會有這樣的規律呢? 為了解釋這個現象，我們用表格來分析比賽剛好結束的可能情形數，我們以<一>、<二>…來代表比完後，衛冕者的連贏數(<三>指衛冕者連贏三場，根據規則，比賽結束)，列出各場次所有情形的可能數：

場次	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<一>	1	1	2	3	5	8	13	21	34
<二>	0	1	1	2	3	5	8	13	21
<三>	0	0	1	1	2	3	5	8	13

根據樹狀圖，每一場比賽結果都有兩種可能，如衛冕者獲勝，則連贏場數加一，如衛冕者輸了，則視為新衛冕者贏一場，故每一場<一>的數量會成為下場<二>的數量，<二>的數量會成為下場<三>的數量，而下場<一>的數量則為前場<二>和<三>的數量和，因此每一場的<三>都會是前兩場<三>的和。

知道了這個規律之後，我們就可以計算變異數了，我們以 F_n 表示費波那契數列的第 n 項，且 $F_1=1$，$F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \quad ,n\in N$，可得：

$$E(X^2)=2\cdot\frac{F_1}{2^3}\cdot 3^2+2\cdot\frac{F_2}{2^4}\cdot 4^2+2\cdot\frac{F_3}{2^5}\cdot 5^2+\ldots=\sum_{i=2}^{\infty}2\cdot\frac{F_{i-1}}{2^i}\cdot(i+1)^2$$

在此我們使用生成函數的方法來計算 $E(X^2)$，方法如下：

令 $f(x)=\sum_{i=2}^{\infty}F_{i-1}x^{i+1}$，則 $f'(x)=\sum_{i=2}^{\infty}F_{i-1}(i+1)x^i$

乘以 x 得：$xf'(x)=\sum_{i=2}^{\infty}F_{i-1}(i+1)x^{i+1}$，微分得：$f'(x)+xf''(x)=\sum_{i=2}^{\infty}F_{i-1}(i+1)^2x^i$

右式代入 $\frac{1}{2}$ 即為我們所求的 $E(X^2)$，即：$E(X^2)=f'(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})$

接著計算 $f(x)$ ，我們藉由 $f(x)$ 的定義以及 F_n 的性質，可以推出 $f(x)$：

$$(1-x-x^2)f(x)=F_1x^3+(F_2-F_1)x^4+(F_3-F_2-F_1)x^5=(F_4-F_3-F_2)x^6+...=x^3$$

$$f(x)=\frac{x^3}{1-x-x^2}=-x+1+\frac{2x-1}{1-x-x^2}$$

所以 $k=3$ 時總場數的變異數：

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=f'(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})-E(X)^2=7+64-49=22$$

接著我們求變異數的一般解，從上述的說明可以發現，如同期望值，總場數的變異數與人數無關，只與 k 有關。我們依然先計算比賽剛好結束的可能情形數，為了找尋像 $k=3$ 時巧妙的規則，我們設 $k=4$ ，照上述方法畫出表格：

場次	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<一>	1	1	2	4	7	13	24	44	81
<二>	0	1	1	2	4	7	13	24	44
<三>	0	0	1	1	2	4	7	13	24
<四>	0	0	0	1	1	2	4	7	13

我們可以再次運用剛剛的解釋，得到每項是前三項和的結論，也就是說，規定連贏 k 場獲勝時，每輪比賽剛好結束的可能情形數都是前 $k-1$ 輪的和。將此數列定為 a_n 我們就能計算出期望值了：

$$E(X^2)=2\cdot\frac{a_1}{2^k}\cdot(k+1)^2+2\cdot\frac{a_2}{2^{k+1}}\cdot(k+2)^2+2\cdot\frac{a_3}{2^{k+2}}\cdot(k+3)^2+...=\sum_{i=k-1}^{\infty}\frac{a_{i-k+2}}{2^i}\cdot(i+1)^2$$

運用生成函數：$f(x)=\sum_{i=k-1}^{\infty}a_{i-k+2}x^{i+1}$

同理得：$E(X^2)=f'(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})$

然後我們計算 $f(x)$ ，一樣藉由 $f(x)$ 的定義及 a_n 的性質，得到：

$$f(x)=\frac{x^k}{1-x-x^2-...-x^{k-1}}=-x+1+\frac{2x-1}{1-\sum_{i=1}^{k-1}x^i}$$

則： $f'(x)=-1+\dfrac{2(1-\sum_{i=1}^{k-1}x^i)-(2x-1)(-\sum_{i=1}^{k-1}ix^{i-1})}{(1-\sum_{i=1}^{k-1}x^i)^2}$

$$f''(x)=\frac{2(-\sum_{i=1}^{k-1} ix^{i-1})(1-\sum_{i=1}^{k-1} x^i)^2-2(-\sum_{i=1}^{k-1} x^i)2(1-\sum_{i=1}^{k-1} x^i)(-\sum_{i=1}^{k-1} ix^{i-1})}{(1-\sum_{i=1}^{k-1} x^i)^4}$$

$$-\frac{[2(-\sum_{i=1}^{k-1} ix^{i-1})+(2x-1)(-\sum_{i=1}^{k-1} i(i-1)x^{i-2})](1-\sum_{i=1}^{k-1} x^i)^2}{(1-\sum_{i=1}^{k-1} x^i)^4}$$

$$+\frac{(2x-1)(-\sum_{i=1}^{k-1} ix^{i-1})2(1-\sum_{i=1}^{k-1} x^i)(-\sum_{i=1}^{k-1} ix^{i-1})}{(1-\sum_{i=1}^{k-1} x^i)^4}$$

代入 $x=\frac{1}{2}$

$$f'(\frac{1}{2})=-1+\frac{2(2^{-k+1})}{2^{-2k+2}}=2^k-1$$

$$\frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})=2^{2k+1}-2^{k+2}-(k-1)2^{k+1}$$

$$E(X^2)=f'(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})=2^{2k+1}-(2k+1)2^k-1 \text{.}$$

所以我們得出以下結果,

變異數之一般解:

$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=2^{2k}-(2k-1)2^k-2$

此解與比賽人數無關。

四、計算每人獲勝機率的通式：

運用剛剛計算期望值及變異數時的發現的規則，我們就能計算勝率了，我們發現，給定 x，當比完 x 場時結束的所有可能，勝者都是同一個人(一開始就連贏得勝者除外)。接著我們就可以根據我們發現的規律及訂出的數列，來計算每一個人的勝率了。

因此，第一人獲勝的機率為：$\frac{a_1}{2^k}+\frac{2a_n}{2^{k+n-1}}+\frac{2a_{2n}}{2^{k+2n-1}}+\frac{2a_{3n}}{2^{k+3n-1}}+\ldots$

第二人獲勝的機率為：$\frac{a_1}{2^k}+\frac{2a_{n+1}}{2^{k+n}}+\frac{2a_{2n+1}}{2^{k+2n}}+\frac{2a_{3n+1}}{2^{k+3n}}+\ldots$

第 m 人 $(3\le m\le n)$ 獲勝的機率為：$\frac{2a_{n+m-11}}{2^{k+n+m-2}}+\frac{2a_{2n+m-1}}{2^{k+2n+m-2}}+\frac{2a_{3n+m-1}}{2^{k+3n+m-2}}$

當：$a_i=\sum_{l=1}^{k-1}a_{i-l}$ 且：$a_i=2^{i-2}$　$i=2,3,4,\ldots,k-1$，$a_1=1$

但這個規則只有在 $n>k$ 時成立，因為當 $k\ge n$ 時，會出現「自己對決自己」的情況，為了不要出現這種爭議，我們暫時假定 $n>k$。

這個無法用很直觀的方法解，但是我們發現可以運用 a_i 的定義來寫出關係式，並去解這一個多元一次方程組來求得每一人之勝率，我們以 4 人，規定連贏三場時勝為例：我們先列出各人的機率(假設第一人贏的機率為 P_1，依此類推)：

$$P_1=\frac{1}{2^3}+\frac{F_4}{2^5}+\frac{F_8}{2^9}+\frac{F_{12}}{2^{13}}+\ldots$$

$$P_2=\frac{1}{2^3}+\frac{F_5}{2^6}+\frac{F_9}{2^{10}}+\frac{F_{13}}{2^{14}}+\ldots$$

$$P_3=\frac{F_2}{2^3}+\frac{F_6}{2^7}+\frac{F_{10}}{2^{11}}+\frac{F_{14}}{2^{15}}+\ldots$$

$$P_4=\frac{F_3}{2^4}+\frac{F_7}{2^8}+\frac{F_{11}}{2^{12}}+\ldots$$

我們發現，因為費波納契數的規則，我們能將 P_2 乘以 2 再加上 P_1，第一項後面的部分就會等於 4 倍的 P_3，我們可以找出數組這樣的關係式：

$$(P_1-\frac{1}{8})+2(P_2-\frac{1}{8})=4(P_3-\frac{1}{8})$$

$$(P_2-\frac{1}{8})+2(P_3-\frac{1}{8})=4(P_4-\frac{1}{8})$$

$$P_3+2P_4=4(P_1-\frac{1}{8})$$

$$P_4+2(P_1-\frac{1}{8})=4(P_2-\frac{1}{8})$$

化簡得：

$$\begin{cases} P_1 + 2P_2 - 4P_3 + \frac{1}{8} = 0 \\ P_2 + 2P_3 - 4P_4 + \frac{1}{8} = 0 \\ P_3 + 2P_4 - 4P_1 + \frac{4}{8} = 0 \\ P_4 + 2P_1 - 4P_2 + \frac{2}{8} = 0 \end{cases}$$

解得：$(P_1, P_2, P_3, P_4) = (\frac{337}{1160}, \frac{303}{1160}, \frac{272}{1160}, \frac{248}{1160})$

在發現這樣的方法能成功後，我們於是試試$n = 5, k = 3$時，希望能找出規則：

列出各人的機率(假設第一人贏的機率為P_1，依此類推)：

$$P_1 = \frac{1}{2^3} + \frac{F_5}{2^6} + \frac{F_{10}}{2^{11}} + \frac{F_{15}}{2^{16}} + \dots$$

$$P_2 = \frac{1}{2^3} + \frac{F_6}{2^7} + \frac{F_{11}}{2^{12}} + \frac{F_{16}}{2^{17}} + \dots$$

$$P_3 = \frac{F_2}{2^3} + \frac{F_7}{2^8} + \frac{F_{12}}{2^{13}} + \dots$$

$$P_4 = \frac{F_3}{2^4} + \frac{F_8}{2^9} + \frac{F_{13}}{2^{14}} + \dots$$

$$P_5 = \frac{F_4}{2^5} + \frac{F_9}{2^{10}} + \frac{F_{14}}{2^{15}} + \dots$$

列出關係式：

$$(P_1 - \frac{1}{8}) + 2(P_2 - \frac{1}{8}) = 4(P_3 - \frac{1}{8})$$

$$(P_2 - \frac{1}{8}) + 2(P_3 - \frac{1}{8}) = 4(P_4 - \frac{1}{8})$$

$$P_3 + 2P_4 = 4P_5$$

$$P_4 + 2P_5 = 4(P_1 - \frac{1}{8})$$

$$P_5 + 2(P_1 - \frac{1}{8}) = 4(P_2 - \frac{1}{8})$$

化簡得：

$$\begin{cases} P_1 + 2P_2 - 4P_3 + \dfrac{1}{8} = 0 \\ P_2 + 2P_3 - 4P_4 + \dfrac{1}{8} = 0 \\ P_3 + 2P_4 - 4P_5 = 0 \\ P_4 + 2P_5 - 4P_1 + \dfrac{4}{8} = 0 \\ P_5 + 2P_1 - 4P_2 + \dfrac{2}{8} = 0 \end{cases}$$

我們發現，當 $n=4, k=3$ 時，4 式的常數項分別為 $\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{4}{8},\frac{2}{8}$；當 $n=5, k=3$ 時，5 式的常數項則為 $\frac{1}{8},\frac{1}{8},0,\frac{4}{8},\frac{2}{8}$，我們進而發現，當 $k=3$ 時，前兩式的常數項都是 $\frac{1}{8}$，後兩項則分別是 $\frac{4}{8},\frac{2}{8}$，中間幾項則是零，這個結果可以用一開始寫出的關係式解釋，因為 P_1 和 P_2 比其他式多了一項，故寫關係式時會有常數項，因而所有包含 P_1 或 P_2 的式子的常數項不為零，因此，從第 3 式到第 $k-2$ 式的常數項都是零($n=4$ 時除外)

接著我們討論 k 變大時的情形，我們看看 $k=4$ 時的情形，首先，a_i 的前幾項是 $1,1,2,4,7,13,24,44,81,\ldots$ 每一項是前三項相加。

我們先討論 $n=5$ 的情形，在寫出每個人的機率後我們可以得到關係式如下；

$$(P_1 - \frac{1}{16}) + 2(P_2 - \frac{1}{16}) + 4(P_3 - \frac{1}{16}) = 8(P_4 - \frac{1}{16})$$

$$(P_2 - \frac{1}{16}) + 2(P_3 - \frac{1}{16}) + 4(P_4 - \frac{1}{16}) = 8(P_5 - \frac{1}{16})$$

$$P_3 + 2P_4 + 4P_5 = 8(P_1 - \frac{1}{16})$$

$$P_4 + 2P_5 + 4(P_1 - \frac{1}{16}) = 8(P_2 - \frac{1}{16})$$

$$P_5 + 2(P_1 - \frac{1}{16}) + 4(P_2 - \frac{1}{16}) = 8(P_3 - \frac{1}{16})$$

我們將其化簡並聯立成一五元一次聯立方程式：

$$\begin{cases} P_1+2P_2+4P_3-\frac{1}{8}P_4+\frac{1}{16}=0 \\ P_2+2P_3+4P_4-8P_5+\frac{1}{16}=0 \\ P_3+2P_4+4P_5-8P_1+\frac{8}{16}=0 \\ P_4+2P_5+4P_1-8P_2+\frac{4}{16}=0 \\ P_5+2P_1+4P_2-8P_3+\frac{2}{16}=0 \end{cases}$$

我們之後又發現，$n=6,k=4$ 時的方程式則是：

$$\begin{cases} P_1+2P_2+4P_3-8P_4+\frac{1}{16}=0 \\ P_2+2P_3+4P_4-8P_5+\frac{1}{16}=0 \\ P_3+2P_4+4P_5-8P_6=0 \\ P_4+2P_5+4P_6-8P_1+\frac{8}{16}=0 \\ P_5+2P_6+4P_1-8P_2+\frac{4}{16}=0 \\ P_6+2P_1+4P_2-8P_3+\frac{2}{16}=0 \end{cases}$$

為了簡化運算，以及能更容易看出規則，我們運用係數矩陣來表達各情形中的聯立方程式：

1．若 $n=4,k=3$，則係數矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2．若 $n=5,k=3$，則係數矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3．若 $n=6,k=3$，則係數矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4．若 $n=5,k=4$，則係數矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -8 \\ -8 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & -8 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5．若 $n=6,k=4$，則係數矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -8 \\ -8 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & -8 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6．若 $n=6,k=5$，則係數矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & -16 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 8 & -16 \\ -16 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & -16 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & -16 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & -16 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

因為我們要求的變數有 n 個，所以我們需要 n 個方程式，因此係數矩陣會是一個 $n\times n$ 的矩陣，而第一列係數則是從1,2開始的2的乘冪，直到 2^{k-2} 為止，第 k 項則是 -2^{k-1}，其餘的項都是零。之後每一列都是前一列向右推移一項，所以對角線上的項都是1。這是因為數列 a_i 的性質，和我們找出關係式時需要乘上2的乘冪的關係。

在找到係數的規則後，我們只要將常數項的規律找出就可以運用列運算來求得所有可能中，每人的機率了。

在列出許多可能後，我們發現了一個奇妙的規律，就是前兩項的係數都是 2^{-k}，而從最後一項往上 $k-2$ 項的常數項依次為 $2^{-k+1},2^{-k+2},2^{-k+3},...,2^{-1}$，為了說明這個規則，我們利用上方列出的通式重新計算:

第一人獲勝的機率為 $\frac{a_1}{2^k}+\frac{a_n}{2^{k+n-2}}+\frac{a_{2n}}{2^{k+2n-2}}+\frac{a_{3n}}{2^{k+3n-2}}+\dots$

第二人獲勝的機率為 $\frac{a_1}{2^k}+\frac{a_{n+1}}{2^{k+n-1}}+\frac{a_{2n+1}}{2^{k+2n-1}}+\frac{a_{3n+1}}{2^{k+3n-1}}+\dots$

第 m 人 $(3\le m\le n)$ 獲勝的機率為 $\frac{a_{n+m-1}}{2^{k+n+m-3}}+\frac{a_{2n+m-1}}{2^{k+2n+m-3}}+\frac{a_{3n+m-1}}{2^{k+3n+m-3}}$

我們列出前兩行關係式($a_i=2^{i-2}, i=2,3,4,\dots,k-1$):

$$(P_1-\frac{1}{2^k})+2(P_2-\frac{1}{2^k})+\dots+2^{k-2}(P_{k-1}-\frac{1}{2^k})=2^{k-1}(P_k-\frac{1}{2^k})$$

$$(P_2-\frac{1}{2^k})+2(P_3-\frac{1}{2^k})+\dots+2^{k-2}(P_k-\frac{1}{2^k})=2^{k-1}(P_{k+1}-\frac{1}{2^k})$$

移項後可得前兩式的常數項皆為:

$$-\frac{1}{2^k}(1+2+2^2+\dots+2^{k-2}-2^{k-1})=\frac{1}{2^k}$$

而接下來的式子是:

$$P_3+2P_4+\dots+2^{k-2}P_{k+1}=2^{k-1}P_{k+2}$$

這類的式子共有 $n-k-1$ 個($n=k+1$ 時沒有),最後一個是:

$$P_{n-k+1}+2P_{n-k+2}+\dots+2^{k-2}P_{n-1}=2^{k-1}P_n$$

這些式子在寫出關係式時都沒有多餘的項,因此化簡後常數項皆為零。
我們接下來看最後幾個式子:
第 $n-k+2$ 式:

$$P_{n-k+2}+2P_{n-k+3}+\dots+2^{k-2}P_n=2^{k-1}(P_1-\frac{1}{2^k})$$

第 $n-k+3$ 式:

$$P_{n-k+3}+2P_{n-k+4}+\dots+2^{k-2}(P_1-\frac{1}{2^k})=2^{k-1}(P_2-\frac{1}{2^k})$$

一直到第 n 式:

$$P_n+2(P_1-\frac{1}{2^k})+\dots+2^{k-2}(P_{k-2}-\frac{1}{2^k})=2^{k-1}(P_{k-1}-\frac{1}{2^k})$$

我們計算常數項:

第 $n-k+2$ 式的常數項為 $\frac{1}{2^k}\times 2^{k-1}=\frac{1}{2}$

第 $n-k+3$ 式的常數項為 $\frac{1}{2^k}(2^{k-1}-2^{k-2})=\frac{1}{2^k}\times 2^{k-2}=\frac{1}{2^2}$

第 $n-k+s$ 式($2\le s\le k$)的常數項 $\frac{1}{2^k}(2^{k-1}-2^{k-2}-...-2^{k-s+1})=\frac{1}{2^k}\times 2^{k-s+1}=\frac{1}{2^{s-1}}$

最後第 n 式的常數項為 $\frac{1}{2^k}(2^{k-1}-2^{k-2}-...-2)=\frac{1}{2^k}\times 2=\frac{1}{2^{k-1}}$

我們還發現，全部 n 式的常數項的和為:

$$\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{k-1}}=1.$$

我們若將每一式相加，就得到: $P_1+P_2+...P_n=1$.

在知道常數項的規則後，我們就對所有可能，列出 n 元一次聯立方程式，可以解出每人的勝率了。

陸、 研究結果與結論

一、 三人比賽時，第一人贏的機率為 $\frac{11}{28}$ ，第二人贏的機率為 $\frac{9}{28}$ ，另一人贏的機率為 $\frac{2}{7}$.

我們藉由樹狀圖及無窮等比級數來計算 n 人比賽，規定連贏兩場時勝利之勝率，得到第一人贏的機率為 $\frac{2^n+3}{2^{n+2}-4}$ ，第二人贏的機率為 $\frac{2^n+1}{2^{n+2}-4}$ ，第 m 人（$2<m\le n$）贏的機率為 $\frac{2^{n-m+1}}{2^n-1}$.

二、 我們發現總場數的期望值和變異數與比賽人數無關，期望值為 2^k-1，變異數為 $2^{2k}-(2k-1)2^k-2$.

三、 我們得到每一個人的勝率如下：

第一人獲勝的機率為 $\frac{a_1}{2^k}+\frac{2a_n}{2^{k+n-1}}+\frac{2a_{2n}}{2^{k+2n-1}}+\frac{2a_{3n}}{2^{k+3n-1}}+\ldots$

第二人獲勝的機率為 $\frac{a_1}{2^k}+\frac{2a_{n+1}}{2^{k+1}}+\frac{2a_{2n+1}}{2^{k+2n}}+\frac{2a_{3n+1}}{2^{k+3n}}+\ldots$

第 m 人($3\le m\le n$)獲勝的機率為 $\frac{2a_{n++m-1}}{2^{k+n+m-2}}+\frac{2a_{2n++m-1}}{2^{k+2n+m-2}}+\frac{2a_{3n++m-1}}{2^{k+3n+m-2}}$

當：$a_i=\sum_{l=1}^{k-1}a_{i-l}$ 且 $a_i=2^{i-2}$ $i=2,3,4,\ldots,k-1$，$a_1=1$.

並藉由找出關係式的方式，寫出以 $P_1,P_2,\ldots,P_n$ 為未知數之 n 元一次聯立方程組，得到其係數矩陣為一 $n\times n$ 矩陣，第一列係數則是從1,2開始的2的乘冪，直到 2^{k-2} 為止，第 k 項則是 -2^{k-1}，其餘的項都是零。之後每一列都是前一列向右推移一項，所以對角線上的項都是1。如 $n=5,k=3$ 之係數矩陣如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

而其常數項符合下列規則：

前兩項的係數都是 2^{-k} ，而從最後一項往上 $k-2$ 項的常數項依次為 $2^{-k+1},2^{-k+2},2^{-k+3},\ldots,2^{-1}$ ，其餘的常數項為0 ，藉由此規則，我們可以計算出任何給定情形中每人的勝率，我們也從計算中得到，先比者的勝率比較高。

柒、 未來展望

在本研究討論中我們假設對弈者彼此互相獲勝機率為$\frac{1}{2}$時，比賽場次的期望值與變異數與人數無關，還有推導出若要連勝k場時每個人所獲勝機率一般結果，得出了相當漂亮結論，未來將考慮更貼近真實比賽狀況，彼此對弈獲勝機率可能不同，這可能會影響我們後面利用生成函數計算的複雜度，當然我們也可以考慮單淘汰、雙淘汰、甚至一般k淘汰的賽制中，每位對弈者所獲勝的機率與期望值，希望未來我們能夠得出更一般的結論。

捌、 參考文獻

1. 龍騰文化。普通高級中學數學第二冊。
2. 中央研究院數學研究所。數學傳播第 28 卷 2 期。
3. 中央研究院數學研究所。數學傳播第 33 卷 4 期。