投稿類別:數學組

篇名:縱橫刪變形版之各組解的機率

作者:
方嘉晉。市立高雄中學。高一 24 班
李宇玄。市立高雄中學。高一 24 班

指導老師:黃仁杰

壹●前言

在國小科展作品『當「月曆縱橫刪」遇上「八皇后棋」。』曾初次提到縱橫刪這種遊戲，而在國中獨立研究作品「從 2D 到 3D 行行列列刪」中又將這種遊戲推廣至長方形，並發現在長方形的情形中，他所選出數的總合不是一個定值，只是對於每組解出現的機率並沒有探討。所以我們利用數學建模的方式，將命題轉換成純數學符號，並找到解決這類問題的標準作業流程。

一、研究動機

之前曾在一本魔術書上介紹過簡化版的縱橫刪遊戲規則，他是在月曆上任選一個邊長為 4 的正方形，且每一格皆須包含月曆上的一個數字，接著請任一個路人選一個數字，並將其所在的行列刪除，刪除的數字不可再選，如此一來便可選到 4 個數字，接著將這 4 個數字相加，其和必會等於這個正方形 4 個角落的數字和。當時我們對這個神奇的事實有了莫大的興趣，並參閱了相關的參考資料，發現原來這個遊戲並不只這麼狹隘，他可以改成一個邊長為任意整數的正方形，甚至是長方形!只是對於不同的形狀，他的結果也都不盡相同，而長方形的多組可能值也引起剛學完機率的我們強烈的興趣。

二、研究目的

(一)每一組長方形圖可能解出現的機率

三、研究方法

到學校及市立圖書館參考相關書籍和資料，上網至各大科展網站搜尋相關作品，並經自己思考和詢問後歸納、整理出我們的結論。

四、名詞解釋

(一) F_{xy}（$a_1, a_2, \cdots, a_y$）:表示 x 列 × y 行（x ≧ y）的長方形圖所選出的所有數相加後得到的和，稱為此長方平面圖的解，a_y 表示在第 y 行所選的數。

(二) P(n)：表示此長方形圖解為 n 的機率，且在不同的長方形圖下，即使 n 相同，P(n)仍有可能不同。

(三) 三元表示法:將長方形圖中每一格的數皆以 $a_0 + md_1 + nd_2$ 表示，a_0 為平面圖左上角的數，d_1 為列公差，d_2 為行公差。

(四) b_i 的 i 代表其為由上往下數第 i 個沒被選到的列，而其值即代表該列所具之 d_1 個數

貳●正文

一、長方形圖的規則介紹和舉例

(一) 把數字填入格子中，且橫列間的公差稱「列公差」(記為 d_1)為相同固定值，直行間的公差稱「行公差」(記為 d_2)為相同固定值，所有公差都不得為 0。
(二) 選定格子中的一數，將其所在之行、列劃掉
(三) 劃掉的格子不可再選。
(四) 當所有的格子都被劃掉時，將所選的所有數字相加，稱為此圖形的解。

1.實例說明：(4×3 長方形， $a_0=3$， $d_1=2$， $d_2=3$)

表(一)

3	6	9
5	8	11
7	10	13
9	12	15

$F_{4\times3}(3，8，15)=26$，　　$a_1=3$　$a_2=8$　$a_3=15$

同樣的我們也發現，按照刪數規則，所得的 $F_{4\times3}(5，6，13)=24$ 如下表與上表結果並不相同，顯然除了選數有很多種外，長方平面圖的解也有很多種，但因數字有限，可見勢必長方平面圖的解會有極值產生。

表(二)

3	6	9
5	8	11
7	10	13
9	12	15

二、長方形圖的性質

(一) 性質一：在 x 列 y 行(x≧y)的長方平面圖中，每一行必有一數被選到，且有(x-y)列沒有數字被選到。

說明:

∵x≧y ∴在選到 y 個數時遊戲即結束(每一行都被刪完)

∵只有選到 y 個數即有 y 列被刪掉

∴有(x-y)列中的數字沒選到。

(二) 性質二：在 x 列 y 行(x≧y)的長方平面圖中，若將所有數以三元表示法表示，則同一橫列的數，其d_1項係數必相同；同一直行的數，其d_2項係數必相同。

說明:

根據規則，我們可得到:

每一行的數為

$a_0+md_1+kd_2$ ， $a_0+(m+1)d_1+kd_2,\cdots\cdots,$ $a_0+(m+x-1)d_1+kd_2$(都有kd_2)

每一列的數為

$a_0+md_1+kd_2$ ， $a_0+md_1+(k+1)d_2,\cdots\cdots,$ $a_0+md_1+(k+y-1)d_2$(都有md_1)

(三) 性質三：在 x 列 y 行(x≧y)的長方平面圖中，其解的可能值必成等差數列，且公差等於列公差

說明:

表(三)

a_0	a_0+1d_2	a_0+2d_2
a_0+1d_1	$a_0+1d_1+1d_2$	$a_0+1d_1+2d_2$
a_0+2d_1	$a_0+2d_1+1d_2$	$a_0+2d_1+2d_2$
a_0+3d_1	$a_0+3d_1+1d_2$	$a_0+3d_1+2d_2$

以表(三)為例，因為每個數都有a_0，所以可得到此長方平面圖的解必有 3a_0 ，又由性質一知，長方形圖每一行都會被選到，所以其解必有

$0d_2+1d_2+2d_2$。亦可知在 4 列 × 3 行的長方平面圖中必能扣除掉 1 列，所以可得到此長方平面圖的解必有 $0d_1+1d_1+2d_1+3d_1-(t-1)d_1$(t 為未被選到數那一列，從上算起) 。

如果我們扣除掉由上往下數第一列(t＝1)則此長方平面圖的解

$=3a_0+(0d_2+1d_2+2d_2)+(0d_1+1d_1+2d_1+3d_1)-0d_1=3a_0+6d_1+3d_2$

如果我們扣除掉由上往下數第二列(t＝2)則此長方平面圖的解

$=3a_0+(0d_2+1d_2+2d_2)+(0d_1+1d_1+2d_1+3d_1)-1d_1=3a_0+5d_1+3d_2$

如果我們扣除掉由上往下數第三列(t＝3)則此長方平面圖的解

$=3a_0+(0d_2+1d_2+2d_2)+(0d_1+1d_1+2d_1+3d_1)-2d_1=3a_0+4d_1+3d_2$

如果我們扣除掉由上往下數第四列(t＝4)則此長方平面圖的解

$=3a_0+(0d_2+1d_2+2d_2)+(0d_1+1d_1+2d_1+3d_1)-3d_1=3a_0+3d_2+3d_2$

換句話說，4x3 的長方平面圖的解有 4 種，由大到小為：

$3a_0+3d_2+6d_1$ 、 $3a_0+3d_2+5d_1$ 、 $3a_0+3d_2+4d_1$ 、 $3a_0+3d_2+3d_1$ ；

即有最大值與最小值，且成等差數列，公差為列公差 d_1。

三、長方形圖解之機率分布

在知道前述長方形圖的三個性質後即可開始進入我們的機率部分。

(一)引理 1

「在 x 列 y 行(x≧y)的長方平面圖中，每一列不被選到的機率都是一樣的」

說明:

首先我們先選定(x-y)列不被選到，則將這(x-y)列拿掉，剩下的 y 列 y 行即可組成一個邊長為 y 正方形圖，而對於每一個邊長相同的正方形圖其選法數皆相同，又每一個不被選到的列皆對應相同個數的邊長為 y 正方形圖

C_y^{x-1}

(　　)

因此對每一列，不論是位於底邊或中間，其不被選到的機率都是相同的。

(二)引理 1 所代表的意義

有了引理 1 後，我們即可脫離窮舉的框架，只須分析每一組長方形圖的解是由漏掉哪幾列組成而得即可。

(三)長方形圖解機率的標準流程

1、 對於任意解 n，分析此解是由扣掉多少列公差所組成(參考長方形圖的性質(三)之說明部分)，在此假設此解由扣掉 k 個 d_1 組成。

2、 將此問題轉換成以下命題:

(1) $k=b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{(x-y)}$

(2) $0\leqq b_1<b_2<b_3<\cdots\cdots<b_{(x-y)}\leqq(x-1)$

(3) $1\leqq i\leqq(x-y)$,b_i 為整數

此條件下解出$(b_1,b_2,b_3,\ldots\ldots,b_{(x-y)})$共有幾組，則此組數 λ 即事件個數

3、P(n)= $\dfrac{\lambda}{C^{x}_{x-y}}$

(四)範例(應用)(x=5,y=2)

表(四)

11	
	19
20	

表(四)是依照縱橫刪規則所做出的表格圖

求此長方形圖解可能值有哪些?且出現機率各為多少?

解： $a_0=11$

$a_0+3d_1=20$

$a_0+d_2+2d_1=19$

得 $d_1=3$， $d_2=2$

知道 d_1,d_2 的值後，可得到下列的表(五)

表(五)

11	13
14	16
17	19
20	22
23	25

最大值(即漏掉上 3 列不選)=20+25=45

最小值(即漏掉下 3 列不選)=11+16=27

此長方形圖的可能值有:27、30、33、36、39、42、45

標準流程:

1、對於任意解 n，分析此解是由扣掉多少個列公差所組成

$$2a_0+0d_2+1d_2+0d_1+1d_1+2d_1+3d_1+4d_1=54$$

27: (54-27)=$9d_1$
30: (54-30)=$8d_1$
33: (54-33)=$7d_1$
36: (54-36)=$6d_1$
39: (54-39)=$5d_1$
42: (54-42)=$4d_1$
45: (54-45)=$3d_1$

2、將此問題轉換成以下命題:

(1) $k=b_1+b_2+b_3$

(2) $0\leqq b_1<b_2<b_3\leqq 4$

(3) $1\leqq i\leqq 3$,b_i 為整數

此條件下解出(b_1,b_2,b_3)共有幾組，則此組數λ即為事件各數

9=2+3+4,y=1
8=1+3+4,y=1
7=0+3+4=1+2+4,y=2
6=0+2+4=1+2+3,y=2
5=0+1+4=0+2+3,y=2
4=0+1+3,y=1
3=0+1+2,y=1

3、P(n)= $\dfrac{\lambda}{C^{x}_{xly}}$

表(六)

可能值	27	30	33	36	39	42	45
對應機率	1/10	1/10	1/5	1/5	1/5	1/10	1/10

參●結論

在探討了長方形圖解的機率分布後，我們找到了一個標準流程使這個問題變得更為容易解決，但當(x-y)和 x 的值變得很大時，轉換的形式似乎也變得不容易解決，因為限制頗多，所以以公式來呈現整個結果並不簡單，不同的例子可能會適用於不同的情況，於是我們想如果能寫出適當的程式，以電腦代替我們，就能

應付(x-y)和 x 的值變得很大時的情形。

肆●引註資料

方嘉晉、蔡欣妤(2011)。**從 2d 到 3d 行行列列刪**。高雄市獨立研究
高雄市立高雄高級中學數學科(2012)。**高雄市立高雄高級中學一年級數學輔教**
葉名倉(編)(2013)。**普通高級中學一年級下學期數學課本**。南一書局