投稿類別：數學類

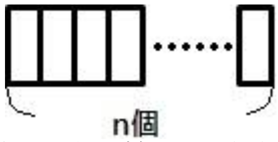
篇名：

費波那契與巴斯卡的羈絆
~費式數列與排列組合~

作者：
洪瑞隆。高雄市立高雄中學。高一 24 班
施宏儒。高雄市立高雄中學。高一 24 班

指導老師：
黃仁杰老師

壹●前言

有一次在解程式的題目的時候，解到一題題目是 

塗上白色和藍色，白色不能為首尾，且白色不相鄰(藍色可相鄰)，請問第 n 項的方法數，而我用組合級數解出來之後，赫然發現竟然巧合的與費式數列第 n 項相同，究竟組合級數和費式數列到底有什麼關連，因此我們想要研究看看。

研究之後發現竟然巧合的可以在巴斯卡三角形上畫出一個很整齊的圖案。

貳●正文：

一、費氏數列定義：

以 F_n 表示為費氏數列第 n 項，可將費氏數列一般項以遞迴式表示為：

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ n \in N, n \geq 1 \end{cases}$$

解遞迴式的通式，其特徵方程式：$t^2 = t + 1$，兩根分別為：$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$和$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$設$F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ ，解方程式後，A= $\frac{1}{\sqrt{5}}$ B=$-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

二、剛才前言所提到的題目的解法：

我們考慮題目的條件，然後分別以在 n-1 個藍色長方形中插入 1 個白色長方形、在 n-2 個藍色長方形中插入 2 個白色長方形、在 n-3 個藍色長方形中插入 3 個白色長方形……直至不能再插入更多長方形，將插入不同個數的長方形的方法數加總，即為所求。得到方程式如下：

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_k^{n-k-1}$$

而這條方程式又與費式數列有什麼關係呢？

三、兩者的關係：

我們要如何知道

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_k^{n-k-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

以下是證明：

$$\sum_{k=0}^{0} C_k^{1-k-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{0} C_k^{2-k-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = 1$$

若 n=2 x+1($x \in \mathrm{N}, x \geq 1$)

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} C_k^{n-3-k} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} C_k^{n-2-k} = \sum_{k=0}^{x-1} C_k^{2x-2-k} + \sum_{k=0}^{x-1} C_k^{2x-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{x-2} C_k^{2x-2-k} + \sum_{k=0}^{x-1} C_k^{2x-1-k} + C_{x-1}^{x-1} + C_0^{2x-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{x-1} C_{k-1}^{2x-1-k} + \sum_{k=1}^{x-1} C_k^{2x-1-k} + C_x^x + C_0^{2x}$$

$$= \sum_{k=1}^{x-1} C_k^{2x-k} + C_x^x + C_0^{2x}$$

$$= \sum_{k=0}^{x} C_k^{2x-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_k^{n-1-k}$$

若 n=2 x($x \in \mathrm{N}, x \geq 2$)

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} C_k^{n-3-k} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} C_k^{n-2-k} = \sum_{k=0}^{x-2} C_k^{2x-3-k} + \sum_{k=0}^{x-1} C_k^{2x-2-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{x-2} C_k^{2x-3-k} + \sum_{k=1}^{x-1} C_k^{2x-2-k} + C_0^{2x-2}$$

$$=\sum_{k=1}^{x-1} C_k^{2x-2-k}+\sum_{k=1}^{x-1} C_k^{2x-2-k}+C_0^{2x-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{x-1} C_k^{2x-1-k}+C_0^{2x-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{x-1} C_k^{2x-1-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_k^{n-1-k}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} C_k^{n-3-k}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} C_k^{n-2-k}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_k^{n-1-k}$$

又 $\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}}{\sqrt{5}}+\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_k^{n-k-1}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}$$

而為什麼會造成這種情況，難道只是單純的巧合？不，其實前言的題目本來就有遞迴關係，n 個長方形塗色的狀況($n \geq 3$)，因為條件的限制，所以最後兩個長方形僅有兩種塗法：藍色與藍色或是白色與藍色。

第一種塗色方法數會等於 n-1 個長方形的塗色方法數 (因為去掉最後一個藍色長方形即為 n-1 個長方形塗色的狀況)。

第二種塗色方法數會等於 n-2 個長方形的塗色方法數 (因為白色前面必為藍色，然後去掉最後的一個藍色長方形與一個白色即為 n-2 個長方形塗色的狀況)。

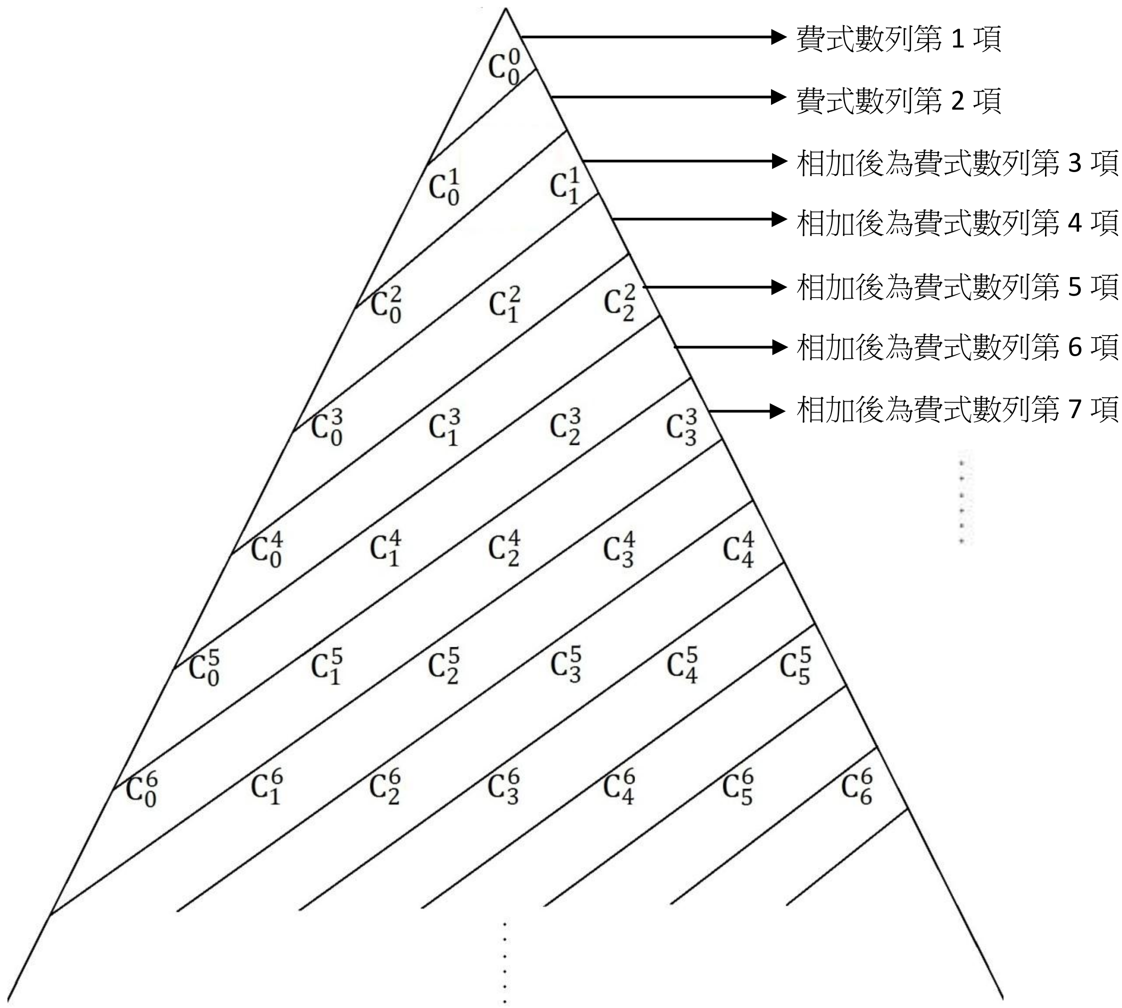
又因為一個長方形與兩個長方形時塗色方法數均為 1，所以此題目的答案會剛好是費式數列第 n 項。

四、巴斯卡三角形與費式數列：

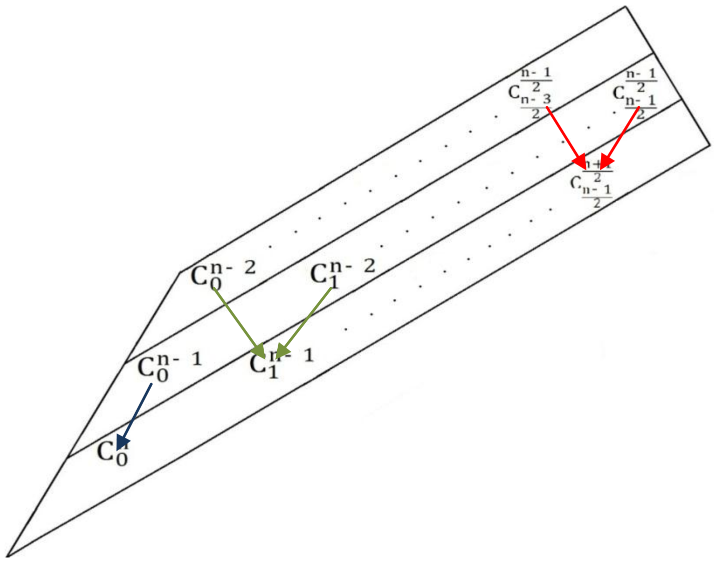
$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_k^{n-k-1}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}$$

由這條式子可以知道費式數列第一項可寫成C_0^0、費式數列第二項可寫成C_0^1、

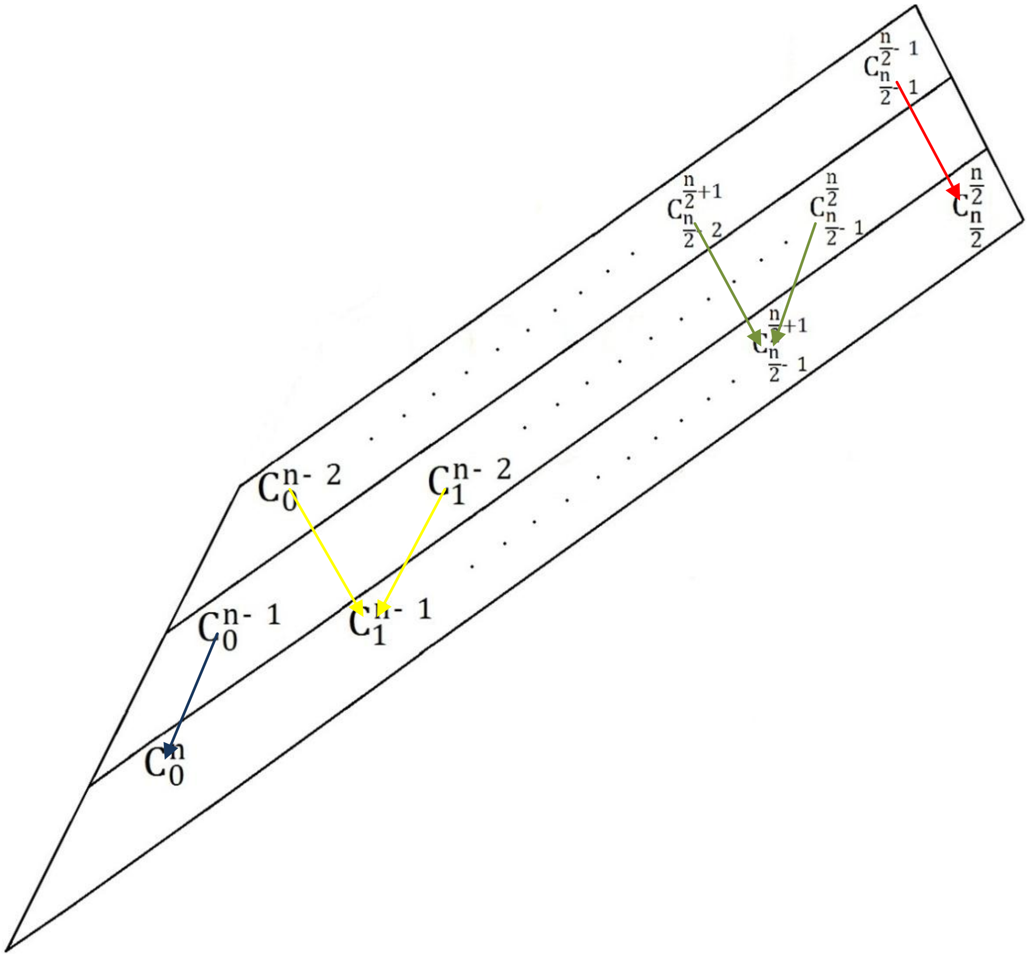
費式數列第三項可寫成$C_0^2+C_1^1$、費式數列第四項可寫成$C_0^3+C_1^2$、費式數列第五項可寫成$C_0^4+C_1^3+C_2^2$……而這些可以在巴斯卡三角形中可以畫出一個整齊的圖形，如下：



也可以把證明畫在圖上



若 n 為奇數時，除了最左邊的以外，其餘都用巴斯卡定理加起來，如上圖。



若 n 為偶數時，除了最左右兩邊的以外，其餘都用巴斯卡定理加起來，如上圖。

參●結論

我們發現到了一個組合級數：

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_k^{n-k} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

簡單的說，就是若n為偶數，則

$$C_0^n + C_1^{n-1} + C_2^{n-2} + \cdots \ldots + C_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

若n為奇數，則

$$C_0^n + C_1^{n-1} + C_2^{n-2} + \cdots \ldots + C_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

還發現了費式數列可以在巴斯卡三角形上畫出整齊的圖形。在這之前，我們都覺得費式數列和巴斯卡三角形或費式數列和排列組合沒什麼關係，而這次卻發現了他們之間的關連，雖然不知道這些東西何時能派上用場，不過數學上真的有好多有趣的巧合可以研究。

肆●引註資料

1. 維基百科：費氏數列
   http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%B2%BB%E6%B0%8F%E6%95%B8%E5%88%97
2. 李虎雄(主編)(2012)。高中數學 2。臺北市：康熹文化
3. 斐波那契數列 九章出版 民82