著色問題推廣討論

劉奎佑、郭孟修

高雄市立高雄高級中學

指導老師：黃仁杰老師

摘要

我們知道排列組合在高中數學課程中屬於很重要的一門課，常常出現的著色問題，即相鄰兩塊區域不得同色，然而題目卻往往最多只出現到 2×4 格而已，於是我們就把此題往更深入去推廣，希望能夠求得出一個完整的公式，並且嘗試要推廣到 $n\times n$ 格，並且運用了 Mathematica 試用版程式來完成我們的公式推導。

關鍵字: Mathematica 試用版程式

1. 前言

1.1、 研究動機

老師在教排列組合單元的時候，教到一題 2×4 格的著色問題，即相鄰兩塊區域不得同色，於是我們就索性在台下算了起來，待老師講解之後，我們便想說這個題目會不會有一個公式解或是一個歸納，於是我們便開始這個小論文討論。

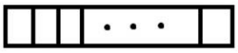
1.2、研究目的

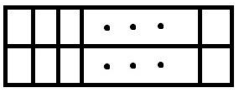
考慮著色問題中的公式解問題，並希望能夠推導到 $n\times n$ 格的著色問題的公式解

2. 主要內容

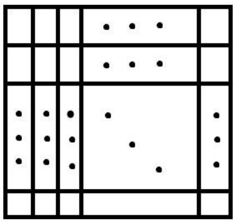
2.1 定義

我們所謂的定義其實就是說明我們所謂的的格子


為 $1\times n$ 格


為 $2\times n$ 格

依此類推


為 $n\times n$ 格

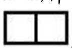
我們都假設有 m 種顏色要填入這些格子內，並且相鄰兩個區域顏色不得相同

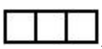
2.2 公式推導

2.2.1 $1\times n$ 格公式推導

首先我們先考慮較少格數的狀況

(1)所有的方法數為 m 種

(2)所有的方法數為 $m\times(m-1)$ 種

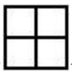
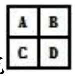
(3)所有的方法數為 $m\times(m-1)\times(m-1)$

證明:在 $1\times n$ 格的狀況中，每一格的顏色皆須與前一格不相同，所以須乘上 $m-1$ 種，而第一格所可以填的顏色為 m 種，所以在 $1\times n$ 的狀況中，公式解為 $m\times(m-1)^{n-1}$ 種

2.2.2 2×1 、 2×2 格探討

同樣地，我們先從較少格數的部分著手

(1)所有的方法數為 $m\times(m-1)$ 種

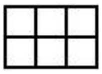
(2)便須進行討論:因此我們先把格子編上編號

，並且分成 A、D 同色與 A、D 異色進行討論→

【1】A、D 同色:A 有 m 種填色方法，D 有 1 種填色方法(與 A 相同的顏色)，而 B、C 則分別有 m-1 種著色方法，因此相乘之後為 $m\times(m-1)^2$ 種方法

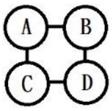
【2】A、D 異色:A 有 m 種填色方法，D 有 m-1 種填色方法(與 A 不同的顏色)，而 B、C 則分別有 m-2 種方法，因此相乘之後為 $m\times(m-1)\times(m-2)^2$ 種方法

因此當我們把兩個式子合併時，所得出的結果為 $m\times(m-1)\times(m^2-3m+3)$ 種方法

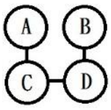
我們發現如此討論的方法速度非常緩慢，而且在的時候，討論便變得非常複雜。因此我們便想說是否有一個方法可以把它進行簡化。

2.2.2 著色問題的另外一種想法

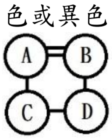
再進行另外一種想法之前，我們必須先將這些格子進行編號，並且先進行說明，ex:

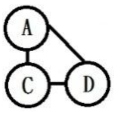


以線相連的兩個區域不得同色

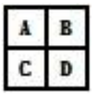
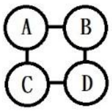


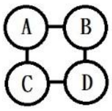
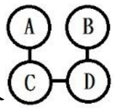
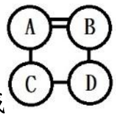
此時 A、B 未直接以線相連，代表其可同色或異色

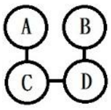
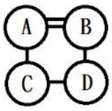


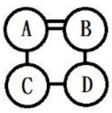
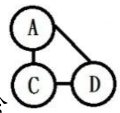
此時 A、B 兩區域以兩直線直接相連，代表 A、B 必須同色，因為 A、B 同色，因此便可以把它合併成為

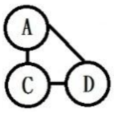
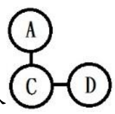
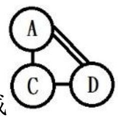
以下將介紹我們的另一種想法:

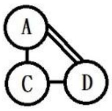
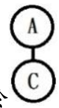
【1】當我們將它進行編號時，我們便可以把它想成，其中以線相連的兩個區域不得同色，並且又可以把它想成:

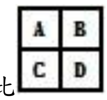
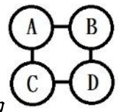
等於減

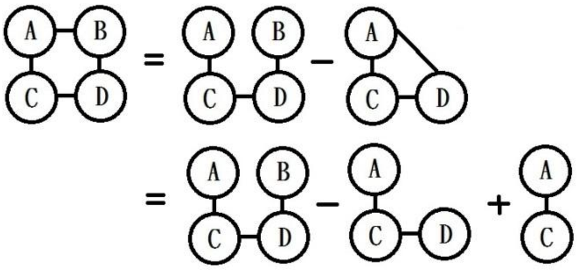
(因為狀況下，A、B 有可能同色，因此將把這些狀況扣除)

而又等於

等於減

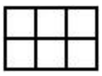
而又等於

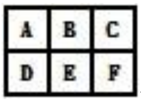
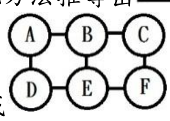
因此著色的總方法數為

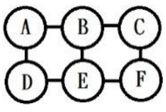
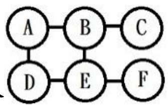
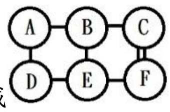


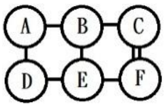
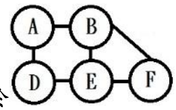
$$m\times(m-1)^3-m\times(m-1)^2+m\times(m-1)$$
$$=m\times(m-1)(m^2-3m+3)$$

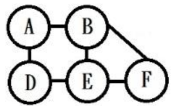
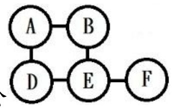
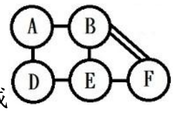
與我們討論出的公式相同

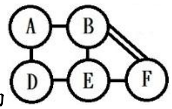
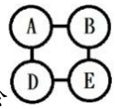
因此我們便可以利用此方法推導出的解

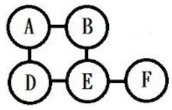
便可以想成

等於減

而又等於

等於減

而等於

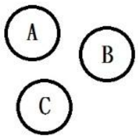
可是現在又出現一個問題了，那就是要怎麼計算它的方法呢?

為了解決這個問題，我們先進入定理部分

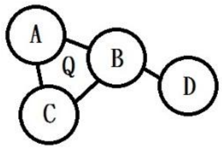
2.2.3 定理

以下定理，我們都以 m 種顏色進行討論

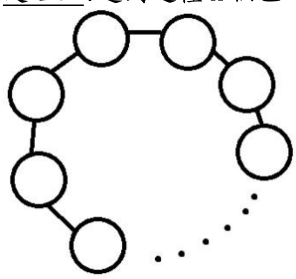
定理一:如果每個區域都是獨立，如下圖



有三個獨立區域 A、B、C，會有 m^3 種方法，在 n 個獨立區域中，會有 m^n 種著色法

定理二:如果某種封閉圖形又外接了另一個部分，如右圖，那麼總著色法就是原來 A、B、C 區域(即 Q 區域)的總方法數再乘上 D 的著色數 m-1(與 B 不同色)，如果原來的圖形已經有 x 種著色法，那麼再外接 n 個區域，總著色數便會變成 $x\times(m-1)^n$ 種

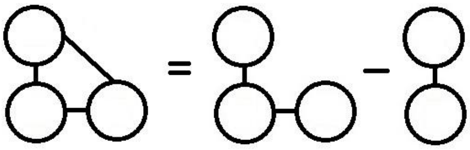
定理三:遇到這種 n 個區域環狀的著色數如下圖



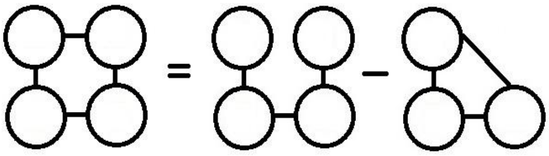
有 $(m-1)^n+(-1)^n(m-1)$ 種方法

為了使式子更加簡潔，令 m-1=k

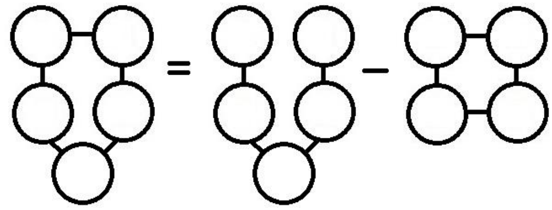
推論:



$(k^3+k^2)-(k^2+k)=k^3-k$



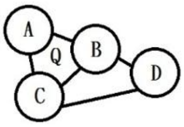
$(k^4+k^3)-(k^3-k)=k^4+k$



$(k^5+k^4)-(k^4+k)=k^5-k$

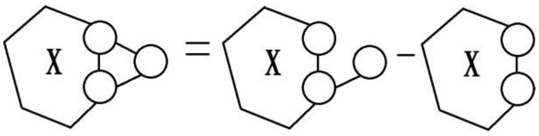
由上述我們可以推論 n 個區域環狀(n>2)的著色數
$(m-1)^n+(-1)^n(m-1)$

<u>定理四</u>:如果一個封閉圖形又外接了一個封閉圖形，如右圖

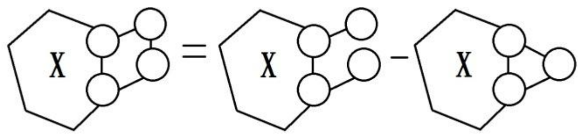


，此時我們可以進行一個推論

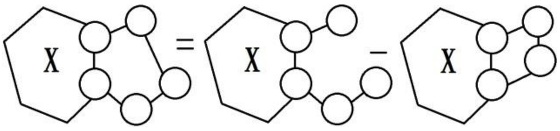
推論:假設原本的區域有 x 種方法



$xk-x=x(k-1)$

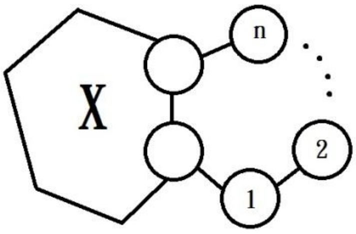


$xk^2-x(k-1)=x(k^2-k+1)$



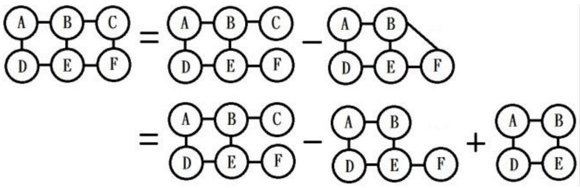
$xk^3-x(k^2-k+1)=x(k^3-k^2+k-1)$

由上述我們可以推論假設一個封閉圖形已經有 x 種著色方法,某個節點延伸出去形成一個有 n 個節點的圖形並連回某一點隔壁之另一點



那麼總著色數為
$x(k^n-k^{n-1}+k^{n-2}-......+(-1)^n)$

由以上幾個定理,我們便可以把 2.2.2 最後的部份解決掉



$(k^4+k)(k^2-k+1)$
$=((m-1)^4+m-1)(m^2-3m+3)$
$=m\times(m-1)(m^2-3m+3)(m^2-3m+3)$
$=m\times(m-1)(m^2-3m+3)^2$

而由定理四，我們可以推論出 $2\times n$ 格的公式解

推論:每次向右邊增加 2 格，便可視為一個封閉圖形又延伸出去形成一個有 2 個節點的圖形，因此
$k^2-k^1+1=m^2-3m+3$
而 2×1 格的方法數為 $m\times(m-1)$，所以 $2\times n$ 格的公式解為:
$m\times(m-1)\times(m^2-3m+3)^{n-1}$

2.2.3 進階公式

當我們探討完 $1\times n$ 格以及 $2\times n$ 格的公式解後，我們將更深一步地去探討 $3\times n$ 格的公式解，不過由於有時當圖形過於複雜,利用公式來計算還是太費時了，這時我們就不得不借助電腦的幫忙。引此我們使用 Mathematica 計算程式的試用版來協助我們計算複雜的圖形