

巴斯卡三角形性質的探討

投稿類別：數學類

篇名：

巴斯卡三角形性質的探討

作者：

梅家豪。高雄市立高雄中學。高一24班

陳嫻云。高雄市立高雄中學。高一24班

指導老師：

黃仁杰

巴斯卡三角形性質的探討

壹●前言

一、研究動機

第一次看到巴斯卡三角形是在國中背乘法公式的時候，那時候還不了解這個圖形的意義，純粹是作為背公式的方法。直到高中時才了解這個圖形的原型，並且對於這個圖形擁有多種作用而驚奇，也因此十分好奇是否還有其他的功能。

二、研究目的與方法

我們從書中以及網路上蒐集各種和巴斯卡三角形有關的圖形與公式，並將其整理、歸納，以彙整出有系統的資料。

貳●正文

(一)巴斯卡三角形：

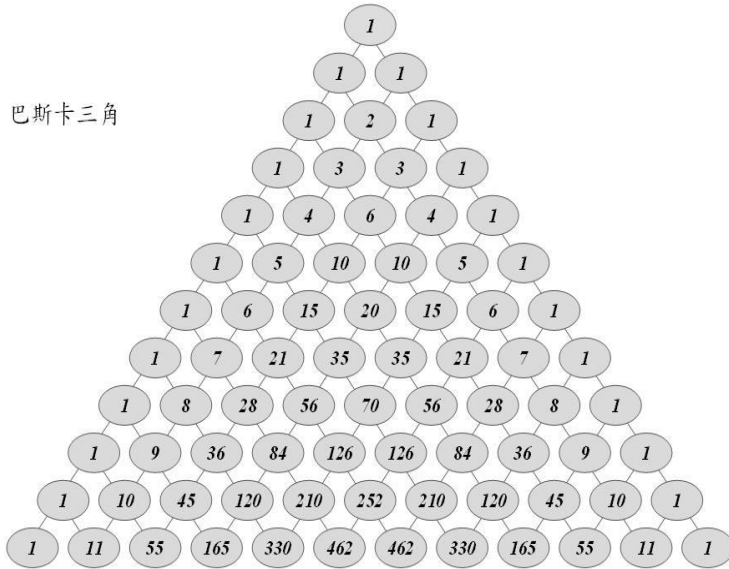
1. 巴斯卡三角形以正整數構成，數字左右對稱，每行由1開始逐漸變大，然後變小，回到1。
2. 第 n 行的數字個數為 n 個。
3. 第 n 行的第 k 個數字為組合數 C_{k-1}^{n-1} 。
4. 第 n 行數字和為 2^{n-1} 。
5. 除每行最左側與最右側的數字以外，每個數字等於它的左上方與右上方兩個數字之和（也就是說，第 n 行第 k 個數字等於第 $n-1$ 行的第 $k-1$ 個數字與第 k 個數字的和）。這是因為有組合恆等式：

$$C_n^i = C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}。可用此性質寫出整個巴斯卡三角形。$$

6. 除了1之外，所有正整數都出現有限次。

巴斯卡三角形性質的探討

巴斯卡三角



(二) 巴斯卡定理：

1. 定理敘述： $C_n^i = C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}$

2. 此定理為巴斯卡三角形組成的基礎，根據此定理可寫出巴斯卡三角

3. 證明：

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = \\ & \frac{(n-k+1)n!}{(n-k+1)k!(n-k)!} + \frac{kn!}{k(k-1)!(n-k+1)!} = \\ & \frac{(n-k+1)n! + kn!}{k!(n-k+1)!} \\ & = \frac{(n+1)n!}{k!((n+1)-k)!} \\ & = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} \\ & = \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

巴斯卡三角形性質的探討

(三)二項式定理：

1. 定理敘述：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

2. 定理與巴斯卡三角形的關係：

- (1) 當 $y=1$ 時， $(x+1)^n$ 中 x 係數等於巴斯卡三角形的第 $n+1$ 行
- (2) 2^n 等於第 $n+1$ 行所有數之和

(四)費波那西數列 (Fibonacci Sequence)：

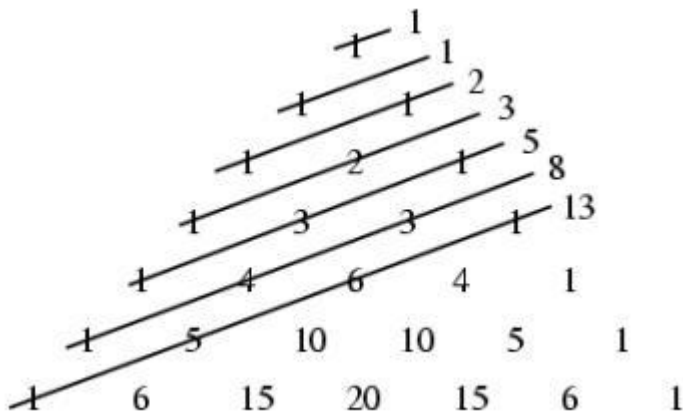
1. 定義：

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

2. 費氏數列與巴斯卡三角形的關係：

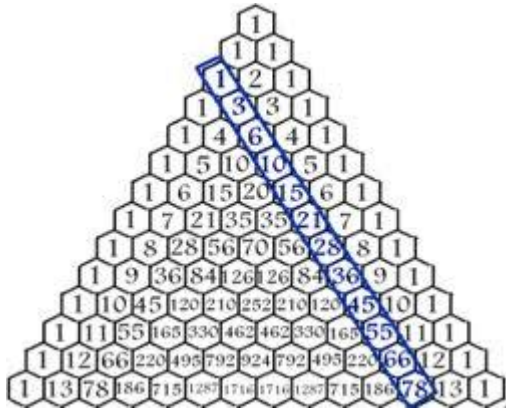


(五)藏在巴斯卡三角形中的數列：

以斜的方向看(以下稱列)，巴斯卡三角形中更是蘊含有趣的數列

1. 第一列：第一列有無限多個1
2. 第二列： $a_n=n$
3. 第三列： $a_1=1, a_{n+1}=a_n+(n+1)$ ，為三角形數(如下圖)

巴斯卡三角形性質的探討



(六)同一行中的因數：

某些行中，除頭尾的1之外，皆能整除於同一數(第 $n+1$ 行的數可整除於 n)
後經統計發現，當 n 為質數時發生此現象

(七)巴斯卡三角形中的幾何：

將巴斯卡三角形第一列去掉後，可表示圓上 n 點會產生的幾何圖形(如

Placing Points Around a Circle

Image	Points	Segments	Triangles	Quadrilaterals	Pentagons	Hexagons	Heptagons
	1						
	2	1					
	3	3	1				
	4	6	4	1			
	5	10	10	5	1		
	6	15	20	15	6	1	
	7	21	35	35	21	7	1

Look for patterns in the chart.

Do you see Pascal's Triangle within the chart? Where? What is missing?

下)

巴斯卡三角形性質的探討

參●結論

巴斯卡三角形是一個存在已久的圖形中,但許許多多隱藏在其中的性質往往會被我們忽略,然而在發現時總是有一股喜悅之情,我們也只是列出其中一小部分的性質而其他有趣的性質正等待我們發現。

肆●引註資料

1. 巴斯卡三角形的應用 II (國立蘭陽女中數學科陳敏皓老師/國立台灣師範大學數學系許志農教授責任編輯)
<http://case.ntu.edu.tw/hs/wordpress/?p=39091>
2. 巴斯卡三角形的幾個性質]
[www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/93\(266-275\)/275/3.pdf](http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/93(266-275)/275/3.pdf)
3. 南一版 高中數學課本第二冊