投稿類別:數學組

篇名: 上大坡下小坡　終能回到山下?
3x+1 角谷猜想

作者:
林威成。市立高雄中學。高一 24 班
許博崴。市立高雄中學。高一 24 班

指導老師:黃仁杰

壹、　　前言

一、研究動機

在高一上做數學題目時曾做過一種題目，是一個函數是在不同條件下有不同的運算方式，藉由重覆的代回發現有循環解或出現規律性的現象，以此可以獲得解答，因為不能一次看出答案，而是要耐心地代式子才能得解，當下覺得這種題目很有意思。後來基於好奇心在網路上看了一些尚未被解決的數學問題，發現了一個像這樣子的世界難題，叫作角谷猜想，是一種在奇偶不同情況下有不同運算，卻能在反覆的代入下最後得到 1 的答案，然而目前雖然以被數學家們驗證到了一個極大數仍沒有反例，但還沒有被完全證實，因此我們針對此猜想進行一些討論與分析。

二、研究目的

(1)收集別人對角谷猜想使用的證明方法，並整理出來進行討論。

(2)討論哪些數符合角谷猜想，在哪種情況下擁有此特性的數在角谷運算下能得到 1 的解，而在哪種條件下又可能造成角谷猜想不成立。

(3)藉由進行 1 到 30 的角谷猜想，試著找出角谷猜想的規律。

貳、正文

一、定義解釋

(1)角谷猜想

對任意給定的正整數 n，按照以下法則反覆進行運算：

1.若 n 為偶數，則將 n 除 2

2.若 n 為奇數，則將 n 乘 3 後加 1

則在反覆運算後，最終都會得到 1 這個答案，

而經此過程成立者，我們定義為角谷數。

(2)運算定義

我們定義一個偶數除 2 的過程稱之為「偶運算」；

而一個奇數乘 3 加 1 的過程則稱之為「奇運算」。

二、角谷猜想介紹

這是一個連小學生都會運算的式子，卻成為難倒了世上所有數學家的一大難題，這個由日本學者角谷靜夫提出的猜想目前雖在超級電腦的運算下仍無反例，但目前為止還沒有人能證實它是對的，儘管網路上有對此各種不同的證法，依舊是被數學家們反駁說能證明到的只是幾乎所有數，而非所有。有趣的是，還有人指出這是日本想讓美國數學界停滯不前所設計的陰謀題目，但不可否認的是，它真的是目前世界上的一大難題。

三、研究過程

(1)資料收集：在網站上及幾篇報告中看了一些有關其的證明，真的是眼花撩亂，相關的證明方法有下面幾種，由於有些我們程度尚不能及，只能做幾種方法簡單的說明：

1.簡單的非正式證明：

由於偶數能表示為,在經過數次偶運算後會成為 1 或非 1 的正奇數，故以奇數來討論之。

假設一正奇數 a，當它進行奇運算時會變成 3a+1，若此猜想是錯誤的，則會有一正奇數 $a = \frac{3a+1}{2^m}$ ，$m \in N$ 且 $a \neq 1$

$m = 1 \Vert 2a = 3a + 1 \quad a = |1 \ (\Vert)$

當

$m = 2 \Vert 4a = 3a + 1 \quad a = 1 \ (\Vert)$

當

當

當

如此一來，a 越來越小，所以能推翻角谷猜想之數並不存在，故得證。

網路資料：角谷猜想。百度百科

2.機率法證明：

設一奇數為 a，經一次奇運算後必為偶數，而再經一次偶運算後，所得

為奇數的機率為 /__________ ；三次偶運算後所得奇數機率為

......，把所有減半後的奇數再乘以各自的機率後再相加即得奇數

最可能的大小。

由上式得奇數 a，每經過一次循環，即增加 1/3，所以漲幅是非常緩慢的。但在循環過程中，一旦它成為可以回歸的奇數，那麼它將必然回歸到 1 。

網路資料：馬國梁。我用機率法證明了"角谷猜想"

(2)由上述資料獲得的想法:必定符合角谷猜想的數會具有的特徵

1. 則 x 符合角谷猜想

例子： ，得知 8 成立

2. ， n≥ 2

且若 $y = x \times 2^k, k \in N$ ^ ^_D_

例子①：，由 1.得知 5 成立

例子②：$10 = 5 \times 2^1$ ， ，由例子①得知 10 成立

3.建立一個集合 S，將 2.中例子①獲得之角谷數為其元素，則任意挑選 S 中一個元素 x，若 $\exists\, y \in N \ni 3y + 1 = x \times 2^m, m \in N$ ^

D_Dd______ ^ ^ /

例子①： 由 2.中例子②得知 3 成立

例子②：$12 = 3 \times 2^2$ ， $\frac{12}{2} = 6$， $\frac{6}{2} = 3$ ^ ①得知 12 成立

4. 確認 3.中所獲得的角谷數與集合 S 中所有元素沒有重覆，若無誤的話，將獲得的角谷數加入集合 S 之中，重覆 3.的動作。

(3) 由上述資料獲得的想法：哪些情況下代表角谷猜想不成立

1.假設若有一個奇數在進行一次奇運算後所得為偶數，再進行一次偶運算後所得為奇數，因為此運算後得到的奇數比原奇數大，且可能又剛好能再進行一次一奇一偶運算，使之越來越大，固可能存在一個數有一特性，能在角谷運算後有不斷增大的情形，結果無法得到 1 這個解，則角谷猜

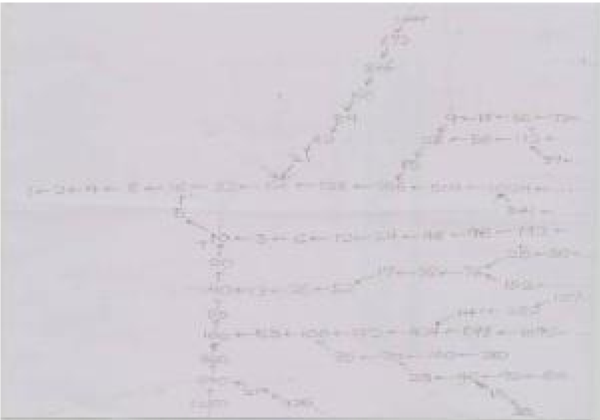
想就不會成立。

2.在想法(2)之 4.中，若所得之角谷數與已建立的集合 S 中的元素有重覆，則可能會造成無限循環地在這些數中運算的結果，導致角谷猜想不成立。

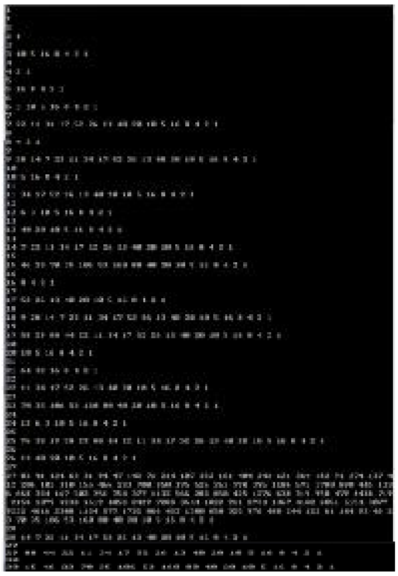
(4) 我們使用 DEVC ++程式碼來幫我們進行角谷運算，輸入以下程式方便我們更快速獲得運算過程與結果。

(5) 規律尋找：

1.根據我們使用 DEVC++程式碼(見附錄一)運算結果，我們發現了第一個有別前數需經大量運算才能得到 1 的角谷數 27，除此之外，在進行 1 到 100 的運算時，還出現了 41、31、47、71、91 等小於 100 的數，進行這些數的角谷運算時，也出現了大量運算。所以我們先運用樹狀圖結構來呈現角谷猜想的概念(如圖一)。



圖一：角谷運算樹狀圖



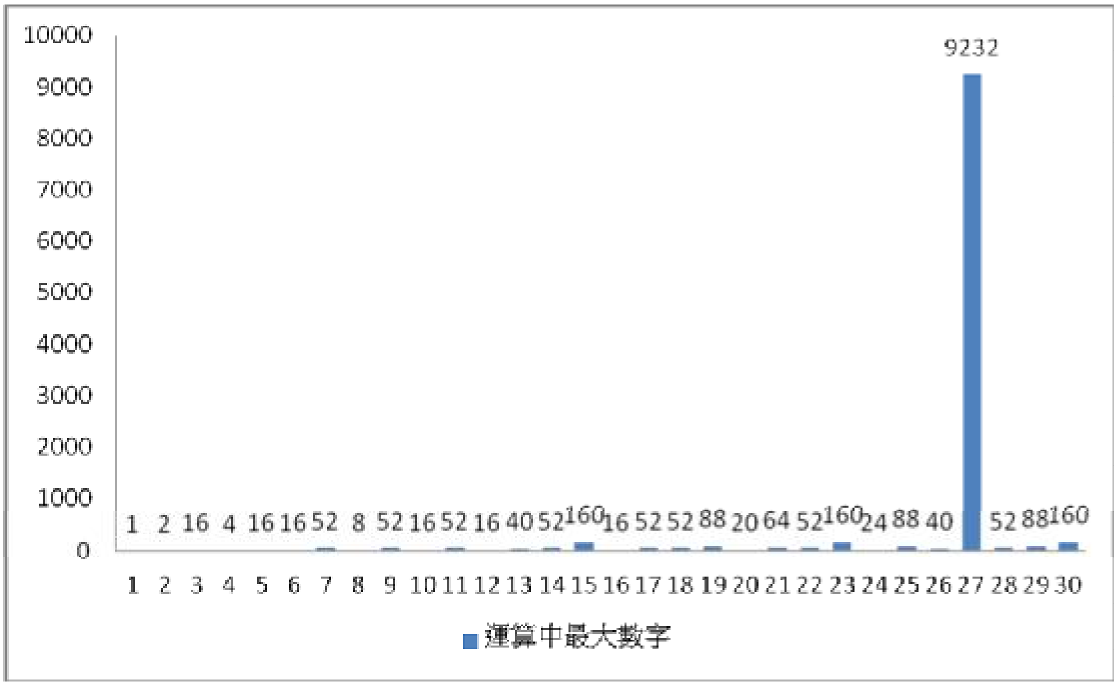
圖二：DEVC++程式運算結果

2.根據 DEVC ++所獲得的結果，我們將 1 到 30 的資料加以統計計算，並製繪成圖表(如表一、圖三、圖四)。

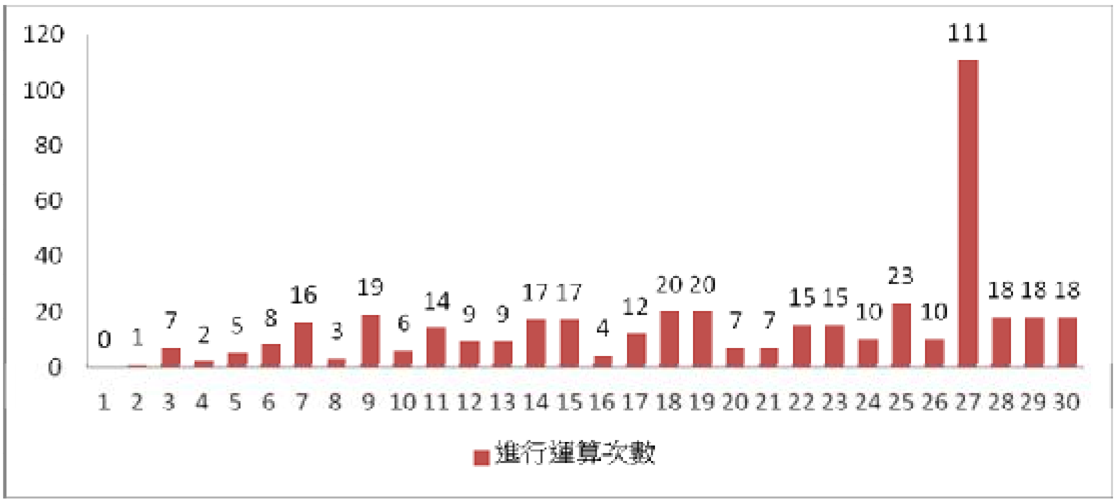
運算的數	進行運算次數	運算中最大的數	運算的數	進行運算次數	運算中最大的數
1	0	1	16	4	16
2	1	2	17	12	52
3	7	16	18	20	52
4	2	4	19	20	88
5	5	16	20	7	20
6	8	16	21	7	64
7	16	52	22	15	52
8	3	8	23	15	160
9	19	52	24	10	24
10	6	16	25	23	88

11	14	52	26	10	40
12	9	16	27	111	9232
13	9	40	28	18	52
14	17	52	29	18	88
15	17	160	30	18	160

表一：1 到 30 的角谷運算



圖三：數對運算中最大數字的長條圖



圖四：數對進行運算次數的長條圖

3.我們針對所獲得的資料進行了一些探討：

①1 到 30 的所有數字都符合角谷猜想。

②我們可以由運算中最大的數發現擁有相同最大數的兩數必為樹狀圖上同一條分支上的數。

③若最大數是數自己本身，那此數必為偶數，(因為若為奇數，再進行一次奇運算後獲得的數必大於本身。) 將此數再除以 /_D_Dd__________´Ā

④運算次數相同的兩數，它們必在不同分支上，也就是不會出現在彼此的運算過程內，藉此可以由運算次數來進一步獲得不同的分支。

⑤此過程中，可以發現到一個詭異且與眾不同的數「27」，此數不但經過了 111 次的運算，得到的最大的數是它的 342 倍左右，做個簡單的譬喻吧：27 號同學在爬山時，上大坡(3x+1)並下小坡($\frac{x}{2}$)，從海拔高度 27 公尺爬起，圖中他會上下坡 111 次，到達海拔 9232 公尺的高度(滿嚇人的，快爬出生物圈了)，最後方能回到山下。這也不禁讓人對這個數字產生好奇，為什麼角谷猜想會對 27 產生巨大的波動，27 又究竟有什麼樣的特性存在，下面我們將進行一點點的討論。

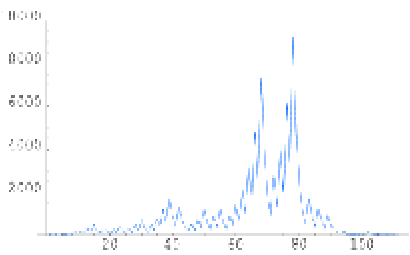
(6)「27」的運算

由於 27 的角谷運算是一個很漫長的過程，是滿方便我們觀察角谷運算的例子，藉由分析 27 這個數，我們發現了以下幾點角谷數共有的特性。

1.由 3 的倍數討論之：$27 = 3 \times 9$ D_Dd__________

故$27 \neq 3x + 1$, $x \in R$ ，也就是說沒有數能經由奇運算來獲得 27，27

必為 27 的兩倍 54 所變來，而 54 是 3k$\times$n



^____

2 右圖為 27 角谷運算的過程，先花了 77 個步驟到達頂峰 9232，再經過了 32 個步驟來回到 1，有趣的是我們發現在它以過程中最大的幅度成長到 9232 後，又立刻以最長的連續 5 次偶運算跌下，且下跌的量為整個過程中最大，於是我們立刻以 DEVC ++試了一下其他的

奇數，果然發現其他奇數也有這個性質，不

圖片來源：維基百科

圖五：27 的角谷運算過程折線圖

圖片來源：維基百科

過僅限奇數，若一偶數為 8D8
當別論了。

參、結果

我們藉由收集別人對於角谷猜想的證明整理並討論後，討論出符合角谷猜想的數所應該有的性質，最後使用 DEVC ++來進行 1 到 30 的角谷猜想運算，發現了 27 這個數的異常，藉此過程經過分析討論後，額外發現了其他角谷數共有的特性。

肆、討論

角谷猜想充滿無限的可能性，目前數學家無法以有限的方法證明，但是我們經過了這次研究得到了不少結論，然而，我們還發現了網路上有人在討論角谷猜想所衍生出的推廣，包括 3X+1 的負數討論、5X+1 問題、反 3X+1 猜想等等，另外原猜想也還未有人能有力的證明之，這些也都是我們未來值得深入探討的課題。

伍、引註資料

1.百度百科。角谷猜想。http://baike.baidu.com/view/287632.htm

2.馬國梁(2010)。我用機率法證明了"角谷猜想"。
http://club.xilu.com/hongbin/msgview-950451-220705.html?PHPSESSID=3ba509c7abf991f04976e003e83b0529

3. 360doc 個人圖書館。**角谷猜想(3x+1 猜想)** 。
http://www.360doc.com/content/11/0108/17/778052_85028630.shtml

4.張宏馬(?)。**角谷猜想的初等證明**。

5.淡祥柏。**《數：上帝的寵物》第 88 頁：西方寶樹**。上海教育出版社。

6.**數學的神秘與奇趣** Mysteries & Amusement in Mathematics 。凡異出版。

7.George G. Szpiro 。 **數學的秘密生命—頂尖數學家如何工作和思考的 50 則有趣故事** 。譯 敦婷瑋。三言社出版。

8.李毓佩 。 **快樂學習方程式—數學的傳奇與遊戲** 。國際村文庫書店。