投稿類別：數學類

篇名：

一路領先問題之推廣討論

作者：

錢柏均。高雄市立高雄高級中學。高一 24 班

黃佑平。高雄市立高雄高級中學。高一 24 班

指導老師：黃仁杰老師

寒假數學小論文

一路領先問題之推廣討論

黃佑平 錢柏均

高雄市立高雄高級中學

指導老師：黃仁杰老師

摘要

自民國 76 年，蔣經國總統宣布解嚴後，台灣成為一個民主的國家，政黨及各種人民團體如雨後春筍般，在近幾十年來紛紛成立。其中，選舉是落實民主最重要的一環，而開票是其中非常緊張且關鍵的過程之一，當然大家都希望自己所支持的政黨能夠當選，甚至瀟灑一點，遙遙領先其對手，而這個問題也不禁令人感到好奇，到底要一路領先他的對手有幾種方法？而兩個候選人與三個候選人的情況會有什麼不同之處，也是值得去探討的。在此我們將以數學的方式去討論一路領先的問題。

壹、前言

一、 研究動機

在高一第二冊的課程中學到了排列組合，其中包含一路領先問題(e. g. 甲乙兩者競選，最終甲勝利且開票過程中乙的得票數恆不大於甲之方法數)，此時所用到的方法可視為依據題目條件切割過後的二維捷徑問題。而對於此，我們進而思考：如果推廣到兩人以上的三人、四人或更多，並且有不同的限制條件，其算法將為如何？於是我們決定推廣並探討一路領先問題。

二、 研究目的

(一) 簡化問題：複習二人基本一路領先問題各種情況，並找出規則。

(二) 探討三人一路領先問題各種不同情況，求解並試著找出規則。

(三) 延伸問題至四人以上各種不同情況探討，並試著找出規則。

貳、主要內容

一、複習二人基本一路領先問題

(一) 二人基本一路領先問題

從課本中最基本的兩人一路領先問題可視為：有 m 個甲、n 個乙排成一列，且從第一個依序任意取 k 個($m, n, k \in N$ 且 $k \leqq m+n$)，其中甲之總數必大於(或不小於)乙之總數，求其總方法數。

對於此問題，我們可以先舉簡單例：當 $m=3$, $n=3$, 且前 k 項甲總數大於等於乙 之方法數？

先以窮舉法解之：其解為

1.甲甲甲乙乙乙

2.甲甲乙甲乙乙

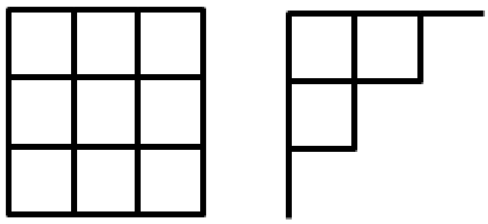
3.甲甲乙乙甲乙

4.甲乙甲甲乙乙

5.甲乙甲乙甲乙

得 共五種方法數

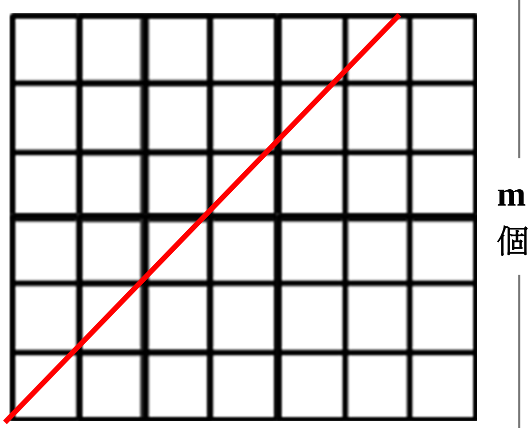
另外，因我們學過，走格子的捷徑問題，在此情況下相似處為：皆只為兩相同物的排列，而我們可將上題視為下(圖一)，以向上為甲，向右為乙，對格子切割後(圖二)，做走捷徑方法。



圖一　　圖二

亦可得 共五種方法數

故我們可推廣回一般解法：對於二人基本一路領先問題，我們可以將其視為切割過後的走格子捷徑問題，其一般解如下(圖三)，(以下皆同上例以向上為甲，向右為乙)，將其以圖中紅線處切割，走紅線以上(包括紅線所經之格子點)之捷徑方法數。其一開始必先為甲(向上)，而往後所有步法畫出後恰會形成此結果，探討其因為紅線通過之格子點區域即為甲(向上)之總數等於乙(向右)之總數，故取其以上區域則皆為甲(向上)總數必大於等於乙(向右)總數，故可以捷徑方法計算方法數。

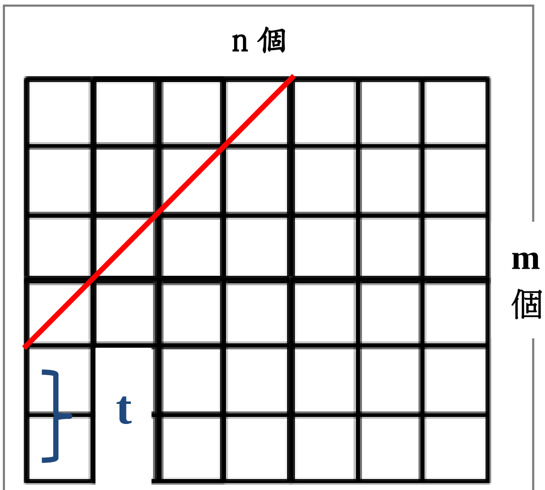


圖三

(二) 條件加以限制之二人一路領先

若上述一路領先再加以限制，針對原題敘述「有 m 個甲、n 個乙排成一列，且從第一個依序任意取 k 個(m, n, k ϵN 且 k≦m+n)，其中甲之總數必大於(或不小於)乙之總數」追加條件為"甲之總數必大於等於乙之總數加 t"，意即甲對於乙不但一路領先且保持差距，求其總方法數。

對於此條件的追加，我們亦可思考從上(圖三)加以修正，想法為做出一條新基準線，其可滿足此線以上或以下之甲、乙保持一定差距，故可將此線設定為甲(向上)與乙(向右)之差距恰為 t，而此線以上區域做走捷徑方法數即為所求。修正後如下(圖四)，計算後即可得完整擴充條件之解。



圖四

二、 三人一路領先問題

(一) 三人基本一路領先問題

最基本的三人一路領先問題可視為：有 x 個甲、y 個乙，z 個丙排成一列，且從第一個依序任意取 k 個(x, y, z, k ϵN 且 k≦x+y+z)，其中甲之總數必大於(或不小於)乙之總數**且**乙之總數必大於(或不小於)丙之總數，求其總方法數。

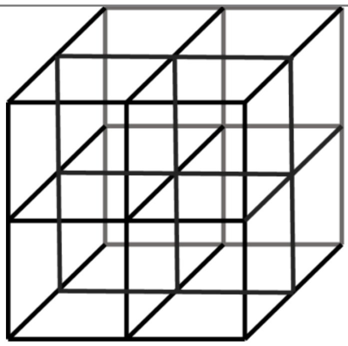
對於此問題，我們可以先舉簡單例：當 x=2 , y=2, z=2 且前 k 項甲總數大於等於乙，乙總數大於等於丙之方法數？

先以窮舉法解之：其解為

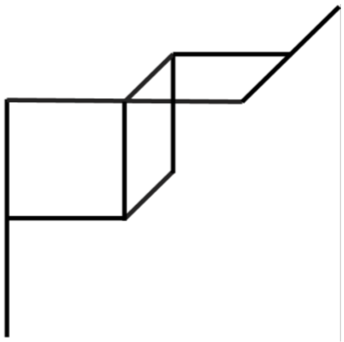
1.甲甲乙乙丙丙
2.甲甲乙丙乙丙
3.甲乙甲乙丙丙
4.甲乙甲丙乙丙
5.甲乙丙甲乙丙

得 共五種方法數

另外，我們從二人一路領先問題中，可以同方法，將其視為走立體格子的捷徑問題，在此情況下相似處同樣為：皆只為三相同物的排列，而我們可將上題視為下(圖四)，以向上為甲，向右為乙，向前為丙，對此方塊切割後(圖五)，做走捷徑方法。



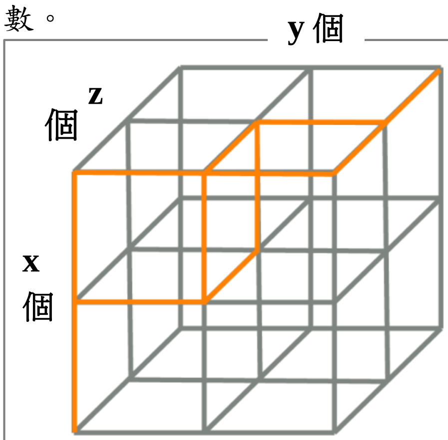
圖四



圖五

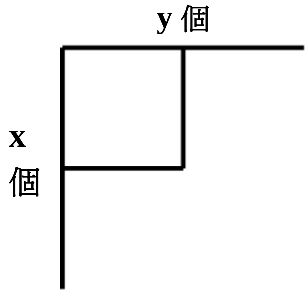
亦可得 共五種方法數

故我們可推廣回一般解法：對於三人基本一路領先問題，我們可以將其視為切割過後的走方塊格線捷徑問題，其一般解如下(圖六)，(以下皆同上例以向上為甲，向右為乙，向前為丙)，將其以圖中紅線處切割，走橘線部分線之捷徑方法數。其一開始必先為甲(向上)，而往後所有步法畫出後恰會形成此結果，探討其因為紅線通過之格子點區域即為甲(向上)之總數等於乙(向右)之總數，故取其以上區域則皆為甲(向上)總數必大於等於乙(向右)總數，而丙同理，故可以捷徑方法計算方法數。

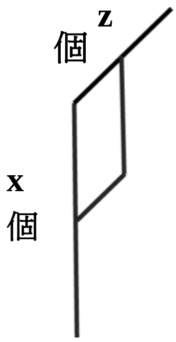


圖六

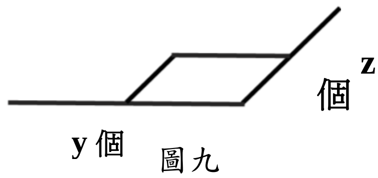
亦或，可將其視為簡單的二人問題再將其合併，若依前題之敘述，分解成「甲之總數必大於(或不小於)乙之總數(圖七)，甲之總數必大於(或不小於)丙之總數(圖八)，乙之總數必大於(或不小於)丙之總數(圖九)」三種狀況一一討論，最後再將其圖形合併成三維(圖十)，即可得所有可能之情況。



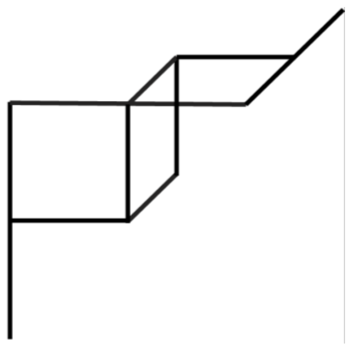
圖七



圖八



圖九

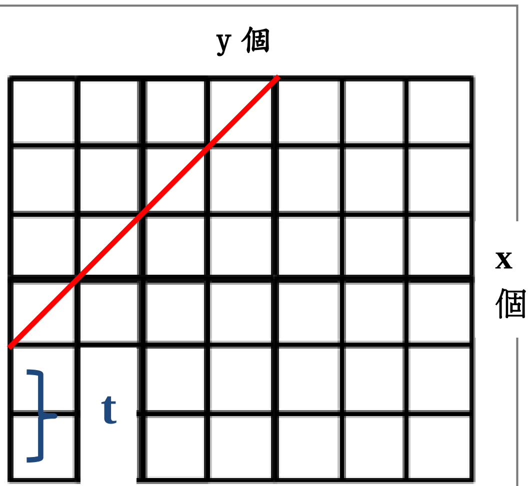


圖十

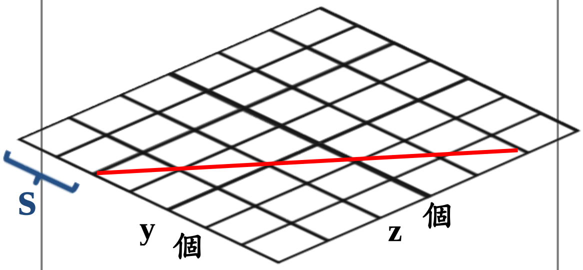
(二) 條件加以限制之三人一路領先

若上述一路領先再加以限制，針對原題敘述「有 x 個甲、y 個乙，z 個丙排成一列，且從第一個依序任意取 k 個($x, y, z, k \in N$ 且 $k \leqq x+y+z$)，其中甲之總數必大於(或不小於)乙之總數且乙之總數必大於(或不小於)丙之總數」追加條件為”甲之總數必大於等於乙之總數加 t，乙之總數必大於等於餅之總數加 s”，意即甲對於乙、乙對於丙不但一路領先且保持差距，求其總方法數。

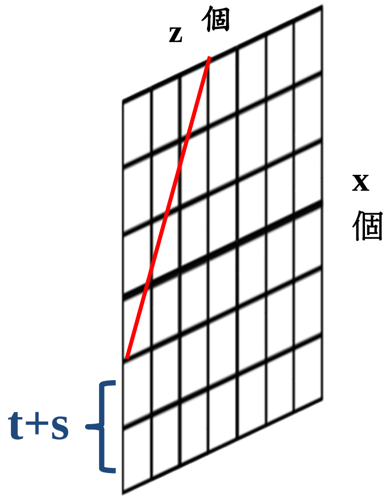
對於此條件的追加，我們亦可思考從上(圖六)加以修正，想法為在各方向上做出新的切割，使此線以上或以下之甲乙、乙丙，甲丙之間皆保持一定差距，故可將此線設定為甲(向上)與乙(向右)之差距恰為 t，乙(向右)與丙(向前)之差距為 s，而甲(向上)與丙(向前)之差距則為 t+s，而在各面向做出切割後，再將其組合之解答即為所求。修正後如下，於甲乙方向切割面(圖十一)、於乙丙方向切割面(圖十二)、於甲丙方向切割面(圖十三)，計算後即可得完整擴充條件之解。



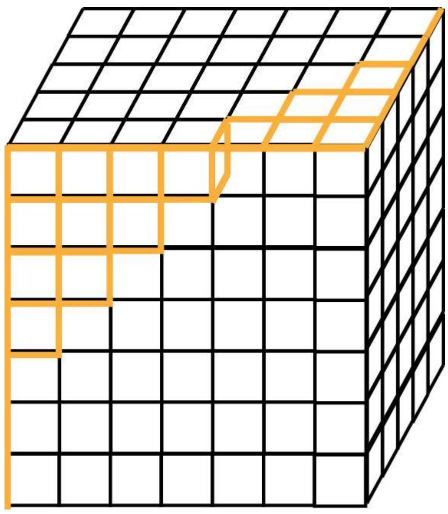
圖十一



圖十二



圖十三



圖十四

三、討論四人或以上一路領先問題

(一) 四人一路領先舉例

對於以上所討論之兩人及三人之一路領先問題，我們可將其視為切割過後的走捷徑方法，至於二人問題我們可以平面格子之走捷徑方法，三人問題可對於各方向平面(x-y 軸、x-z 軸、y-z 軸)先做平面格子，再將三方向之結果組合起來之走捷徑方法。

然而，我們知道一般情況下，要畫出四維以上的結構較少見，故可能較無法使用前述(二人、三人)之一般情況下能理解之走捷徑方法完成，我們先以下例觀察之：有 2 個甲、2 個乙，2 個丙，2 排成一列，且從第一個依序任意取 k 個(k ϵN 且 k≦8)，其中甲之總數必不小於乙之總數、乙之總數必不小於丙之總數、丙之總數必不小於丁之總數，求其總方法數。

以窮舉方法解如下：

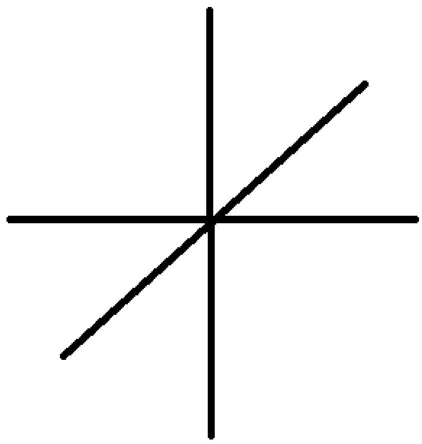
1. 甲甲乙乙丙丙丁丁
2. 甲甲乙乙丙丁丙丁
3. 甲甲乙丙乙丙丁丁
4. 甲甲乙丙乙丁丙丁
5. 甲甲乙丙丁乙丙丁
6. 甲乙甲乙丙丙丁丁
7. 甲乙甲乙丙丁丙丁
8. 甲乙甲丙乙丁丙丁
9. 甲乙甲丙乙丙丁丁
10. 甲乙甲丙丁乙丙丁
11. 甲乙丙丁甲乙丙丁
12. 甲乙丙甲乙丙丁丁
13. 甲乙丙甲乙丁丙丁
14. 甲乙丙甲丁乙丙丁

共 14 種方法數

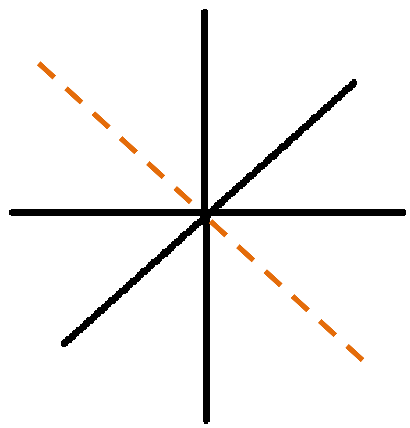
(二) 四維圖形結構介紹

從空間的維度來看，從最簡單的一維結構，即是一條直線。而二維結構為兩直線垂直做出兩座標軸，構成一個可表現於平面上的結構。三維則可加一座標軸垂直於原先二維結構之兩座標軸，三相互垂直之直線構成可表現於立體上的結構。故每多一個維度，可視為在與原先 n 維度各方向之座標軸上增加一新的座標軸，其與原維度各方向任一座標軸垂直，表現於此所有座標軸間的結構，即可視為維度為 n+1 的結構。

而這裡簡單介紹四維結構，則如上述可視為三維結構的衍伸，以下(圖十五)三維結構中的座標軸，加上一新座標軸垂直於此三軸(圖十六)，圖中橘色虛線，一般生活常稱時間軸，然而對於討論，我們以下皆以”第四維空間座標軸”稱之。而如此，便建構出了四維結構。



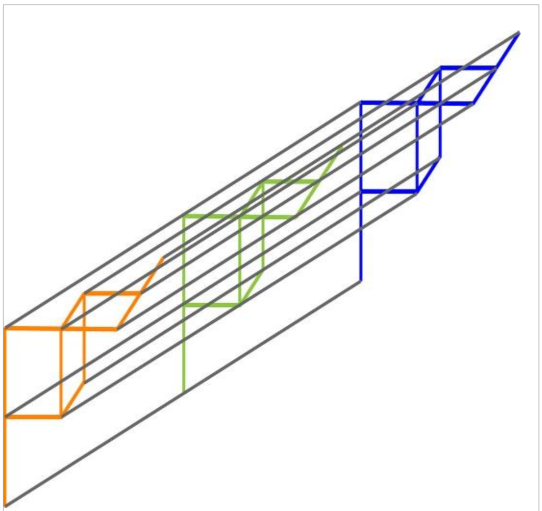
圖十五



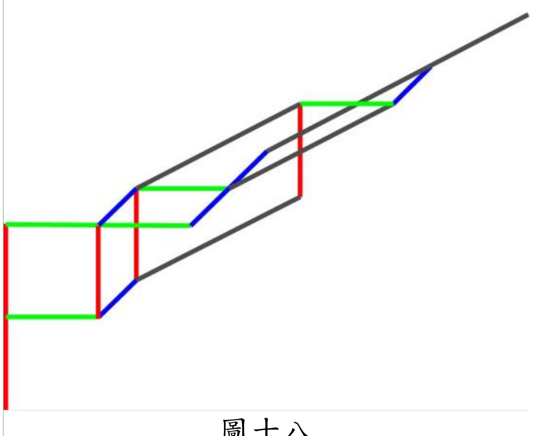
圖十六

(三) 四人一路領先圖形套用

依前所述之方法，可將四人依領先問題分解為三人一路領先問題之圖形結構再加上第四維空間座標軸串聯起來(少為出現在一般情況下，但可想像為類似時間軸)，再將其與原先三人的圖形合併，即可得圖十七，加以簡化後得到清楚的圖形為圖十八，(灰色軸即為第四維方向軸)，藉以計算出所有可能之情況。並且以例子驗證後得答案確實正確，故此方法確實可行，依此可不斷推廣圖形維度皆會為正確。



圖十七



圖十八

參、結論

由上述的推導我們可知，一路領先問題可轉換成圖形之路徑問題，可藉由較簡單的方法推導出其總方法數，而較高維度的圖形(也就是較多候選人)，則可簡化成維度較低的圖形再加以合成，三維立體圖就是由二維平面所合成，而四維圖形則是由三維所合成。至於五維，對於我們所討論的，我們先從四維來看，若簡單來看可視為立體空間結構加上直線時間軸，加以連結，故五維亦不難想像，思考成把時間軸擴張到”平面”再將三維結構加以連結，如此即可將其推展至更高維度，且以簡單圖形累加上去會較為容易。故可推廣至ｎ人的一路領先問題。

然而，一般高維度圖形較為複雜不易計算，若能以程式讀入數據並直接給出答案，將會是更理想的情況，未來有機會將繼續著手於此。

肆、參考資料

1. 教育部 普通高級中學 數學課本（第二冊）
2. 高雄中學數學高一輔助教材（第六章 排列組合）
3. 莉莉安・李伯。**啟發每個人的數學小書**。究竟出版社。
4. 侯宗誠、許德瑋(2010)。**由蟲子問題衍生一路領先與Motzkin路徑之對應及推廣**。科展作品。