投稿類別：數學類

篇名：
二次曲線換一半公式探討

作者：
林威成。高雄中學。高二 24 班。
許博崴。高雄中學。高二 24 班。

指導老師：
黃仁杰老師

壹●前言

在上學期數學課上到圓錐曲線時，學到了有關切線在圓錐圖形上的表示方式有這麼一條公式，叫「換一半」公式。經由老師的引導討論後，發現此公式不論用在圓、橢圓、拋物線和雙曲線上都可以適用，而且似乎沒什麼瑕疵。於是我們想對此進行探討，並驗證其在這四種圖形的外、上、內等位子上又會有什麼變化。

貳●正文

一、定義解釋：

(一)、換一半公式：

對任意給定的圓錐曲線

則對於任意點 P(i , j),定義以下方程式為其換一半公式：

$$aix+b\left(\frac{iy+jx}{2}\right)+cjy+d\left(\frac{x+i}{2}\right)+e\left(\frac{y+j}{2}\right)+f=0$$

(二)、極軸：

圓錐曲線的換一半公式是一次方程式，也就是一條直線。根據資料，點 P 被稱為極點(pole)，換完得到的直線稱為極軸。以下我們仍然以換一半公式稱呼。

二、基本型探討：

(一)、圓：

圓形是最基本的二次曲線，先以其探討之。

令一圓 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$,則對於點 P(i , j)，其換一半公式為

下：

$$\mathbf{ix + jy + d\left(\frac{x+i}{2}\right) + e\left(\frac{y+j}{2}\right) + f}$$

接下來我們將點 P 分成三類：

1、若點 P 使得二次式 $i^2 + j^2 + di + ej + f = 0$ (()/)(()/)D

為通過該點之圓切線(如圖一)。

2、若點 P 使得二次式 $i^2 + j^2 + di + ej + f > 0$ (()/)(()/)_

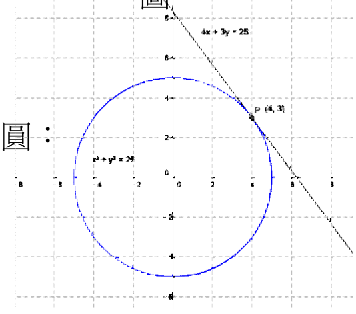
$$\mathbf{ix + jy + d\left(\frac{x+i}{2}\right) + e\left(\frac{y+j}{2}\right) + f = 0}$$

為通過點 P 之圓的兩條切線的切點連線(如圖二)。

3、若點 P 使得二次式 $i^2 + j^2 + di + ej + f < 0$ (()/)(()/)

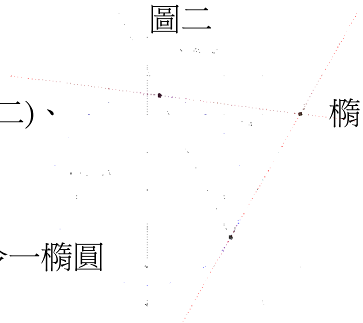
為垂直圓心與點 P 連線的直線，且與其平行且過點 P 的直線與圓交於兩點，這兩點形成的切線交於該直線(如圖三)。

圖一



圓：

圖二

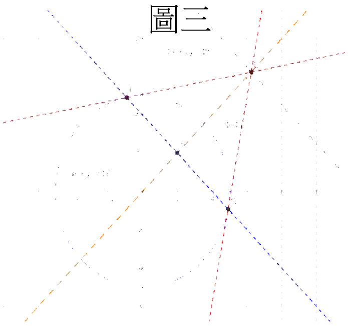


(二)、

橢

令一橢圓

圖三



$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (()/)(()/)(()/)__________

接下來我們將點 P 分成三類：

1、若點 P 使得二次式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (()/)(()/)((

為通過該點之橢圓切線(如圖四)。

2、若點 P 使得二次式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f > 0$

(()/)(()/)D_

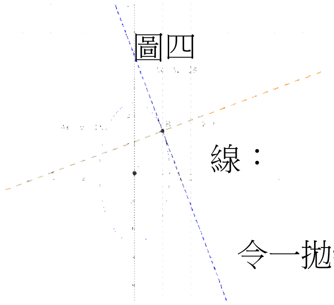
為通過點 P 之橢圓的兩條切線的切點連線(如圖五)。

3、若點 P 使得二次式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f < 0$

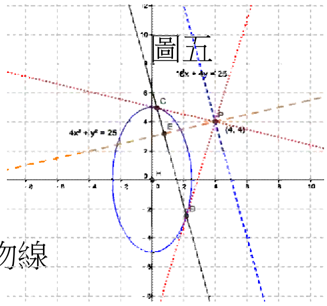
(()/)(()/)__

為平行以點 P 為中點之中點弦的直線，且與過點 P 中點弦交於橢圓的兩點，這兩點形成的切線交於該直線(如圖六)。

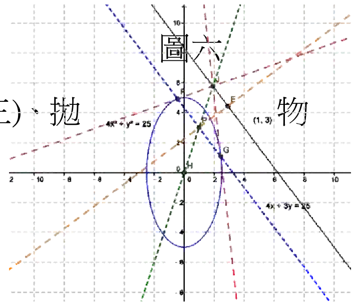
圖四



圖五



圖六



(三)、拋物線：

令一拋物線 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (()/)(()/)(()/)_D_Dd____

接下來我們將點 P 分成三類：

1、若點 P 使得二次式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

(()/)(()/)(()/)

為通過該點之拋物線切線(如圖七)。

2、若點 P 使得二次式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f > 0$

(()/)(()/)D_D

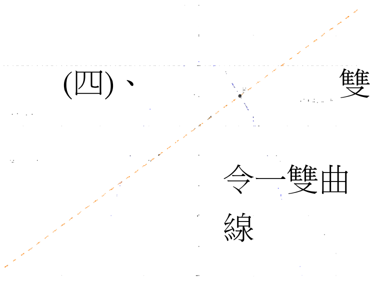
為通過點 P 之拋物線的兩條切線的切點連線(如圖八)。

3、若點 P 使得二次式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f < 0$

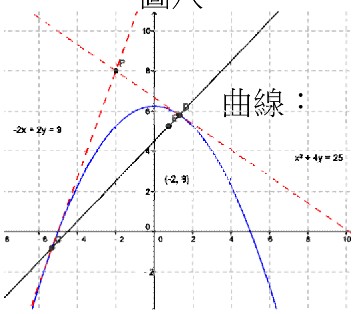
(()/)(()/)D_D

為平行以點 P 為中點之中點弦的直線，且與過點 P 中點弦交於拋物線的兩點，這兩點形成的切線交於該直線(如圖九)。

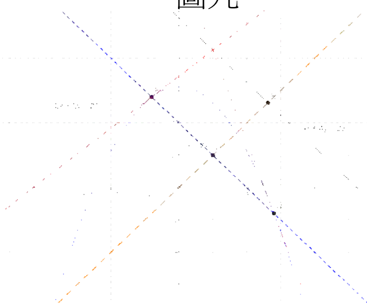
圖七



圖八



圖九



(四)、雙曲線：

令一雙曲線 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (()/)(()/)(()/)__________

接下來我們將點 P 分成三類：

1、若點 P 使得二次式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

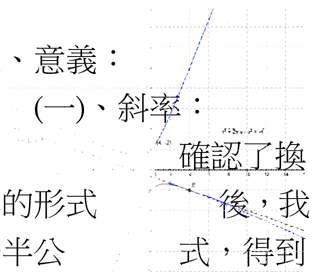
(()/)(()/)(()/⁄)
為通過該點之雙曲線切線(如圖十)。

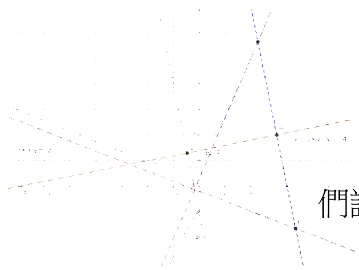
2、若點 P 使得二次式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f>0$

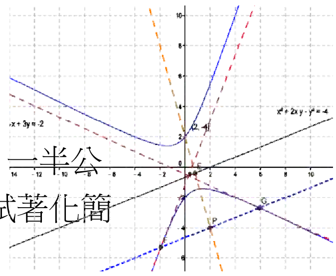
$(()/)[()[(x+i)/2)+e((y+j)/2)+f=0$
為平行以點 P 為中點之中點弦的直線，且與過點 P 中點弦交於雙曲線的異側兩點，這兩點形成的切線交於該直線(如圖十一)。

3、若點 P 使得二次式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f<0$

$(()/)[()[(x+i)/2)+e((y+j)/2)+f=0$
為平行以點 P 為中點之中點弦的直線，且與過點 P 中點弦交於雙曲線的同側兩點，這兩點形成的切線交於該直線(如圖十二)。







三、意義：

(一)、斜率：

確認了換一半公式的形式後，我們試著化簡換一半公式，得到

十二

$(2ai+bj+d)x+(2cj+bi+e)y+di+ej+2f=0$

於是我們得到換一半公式的斜率：

(其中$2cj+bi+e\neq 0$)

我們將二次式$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ / () / ()_

$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\neq 2ax+bx+d=0$，　　$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\neq 2cy+by+e=0$

則得到

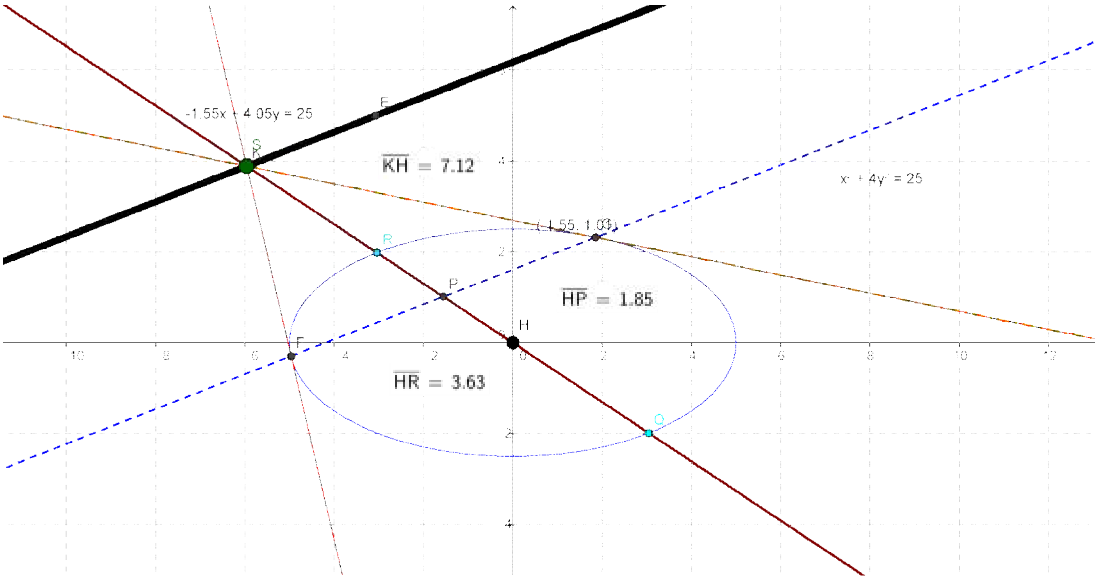
$$m = \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)}{\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)}$$

(二)、廣義反演：

反演定義：反演是種幾何變換。給定點 O 為圓心、常數 r 為圓半徑，則點 P 的變換對應點就是在以 O 開始的射線 OP 上的一點 Q 使得

$$|\overline{OP}||\overline{OQ}| = r^2$$

以橢圓為例，我們藉由作圖得到下面結論：



如圖所示，令一橢圓 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

()/()____ 。

中點弦延長線分別交橢圓中心、橢圓、極軸於 H、R、S，則得到：

$$|\overline{HP}||\overline{HS}| = \overline{HR}^2$$

我們稱以下現象為廣義反演，所以換一半公式其實就是過點之直線之廣義反演。

參●結論

在圓與圓錐曲線的應用題目上，換一半公式的用途廣泛且方便好記，處理直線方程與二次曲線的關係上又佔有極重要的地位，透過本次分析與整理，不僅僅歸納出此公式在圖形內、外、中各長什麼樣子，有什麼性質，更得到此公式在幾何上的意義，發現其為過點之直線之廣義反演，有助於我們能完全熟悉此公式並靈活運用於此類題型中。

肆●引註資料

1.黃友訓(譯者) (1987)。解析幾何學(上)、(下)。 徐式基金會。
2.蔣聲(編著) (1994)。幾何變換。 凡異出版社。