投稿類別:數學組

篇名:尤拉公式在火柴拼圖中的應用

作者:
方嘉晉。市立高雄中學。高二 24 班
李宇玄。市立高雄中學。高二 24 班

指導老師:黃仁杰

壹●前言

現在，隨著智慧型手機逐漸發展成熟，越來越多的應用程式也因此孕育而出，而這些應用程式中，有很多的益智遊戲能讓我們運用零碎時間鍛鍊自己的腦力。在這篇小論文中，我們將介紹一個頗為熱門的手機益智遊戲—「火柴拼圖」，運用尤拉公式，我們使這個看似毫無頭緒的遊戲，有了一個 SOP(Standard Operation Procedure,標準作業流程)

一、 研究動機

最近剛開始接觸手機遊戲，因此常常在網路上尋找好玩的 APP，而其中最讓我們印象深刻的，就是這個遊戲「火柴拼圖」。它的規則很簡單好懂，可是任務內容卻是變化萬千，因為我常常看到某些任務時毫無頭緒，因此我們想如果能找到一個 SOP 的話，應該就能解決這個問題。

二、 研究目的

(一)了解尤拉公式的定理內容及證明過程
(二)找出最簡單連續型任務的標準作業流程

三、 研究方法

從同儕的切磋中，找到靈感，並藉由網路上的資料及圖書館中的書面紙本找到可用的定理及想法，經我們自己歸納、整理後，得到我們想要知道的結論。

貳●正文

一、 尤拉公式的簡介

(一)尤拉公式的種類:
因為尤拉畢生提出了很多著名的公式，因此廣泛的尤拉公式其實是好幾種不同的公式，不只是我們熟悉的用來連接邊、點、線關係的尤拉公式，甚至連在複數方面，尤拉也有很重大的貢獻，複數方面的尤拉公式甚至被譽為最美的公式之一。但因為在我們的研究中，只有用到平面的尤拉公式，因此我們僅就平面的尤拉公式進行介紹

(二)平面尤拉公式定理內容:

假設任意封閉的平面連通圖頂點數為 V，邊數為 E，區域數為 R，則 V+R-E=1

(二)平面尤拉公式的證明:

設此封閉的連通平面圖共有 n 個區域,分別為 $R_1,R_2,\ldots..,R_n$

取此平面圖的第一個區域 R_1，則此時邊數 E_1 必等於頂點數 V_1，因此這時的 $R+V_1-E_1=1(R=1)$。接著取其一相鄰區域 R_2，此時多出的邊數為 E_2，多出的頂點數 V_2，因為 R_1、R_2 間有 1 個公共邊和 2 個公共頂點，因此這時的 $E_2-V_1=1$，接著取其一相鄰區域 R_3，此時多出的邊數為 E_3，多出的頂點數 V_3，則 $E_3-V_3=1$。

說明:

若 R_3 與 $R_1\cup R_2$ 有一個公共邊則 R_3 與 $R_1\cup R_2$ 有 2 個共同頂點。若 R_3 與 $R_1\cup R_2$ 有二個公共邊則 R_3 與 $R_1\cup R_2$ 有 3 個共同頂點。其餘依此類推。

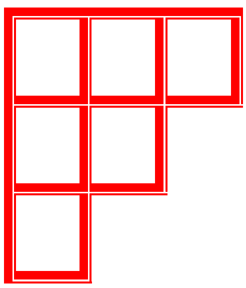
接著取其一相鄰區域 R_n，此時多出的邊數為 E_n，多出的頂點數 V_n，則必有 $E_n-V_n=1$，此時的 $R=n$，$V=V_1+\ldots\ldots+V_n$，$E=E_1+\ldots\ldots.+E_n$，而且對於所有 $1<i<n+1$，i 為正整數，$E_i-V_i=1$，因此這時的 $R+V-E=n+(1-n)=1$ 證畢

二、 找出最簡單連續型任務的標準作業流程

(一)火柴拼圖規則

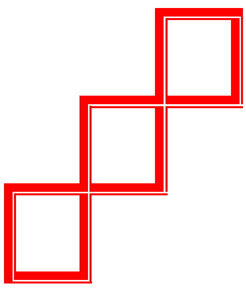
1. 一開始系統會給玩家一個用火柴拼成的初始形狀，接著會告訴玩家任務
2. 任務有分 2 種，一種是「移除」指定根數的火柴，使剩下來的火柴圍成特定個數的正方形，另一種則是「移動」指定根數的火柴，使剩下來的火柴圍成特定個數的正方形，且不可有多餘的火柴。

範例:



任務:移除 6 根火柴，使之成為 3 正方型

解答:

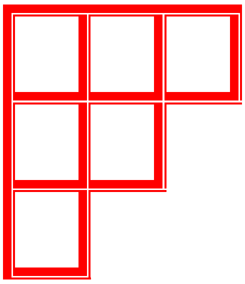


(二)解答型態的分類

由於火柴拼圖的任務有好幾種可能性，而每一種型態是用的解法也不盡相同，因此我們將解答型態分為 4 型。其中，我們將只探討最簡單連續型的部分。

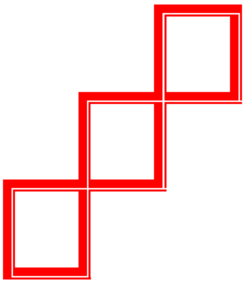
1.連續型:答案是屬於一體成型者

例子:



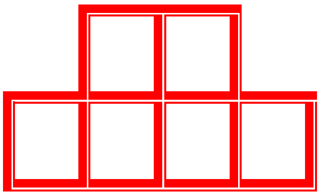
任務:移除 6 根火柴，使之成為 3 正方型

解答:



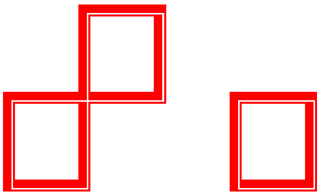
2.非連續型:答案是屬於非一體成型者

例子:



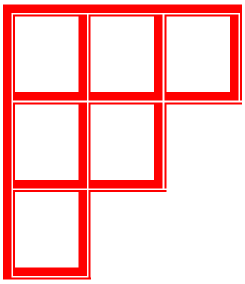
任務:移除 6 根火柴，使之成為 3 正方型

解答:



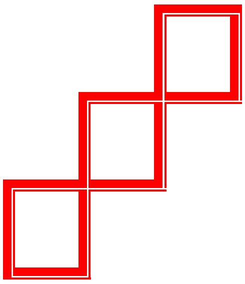
3.最簡單型:解答中的正方形邊長皆為 1 根火柴

例子:



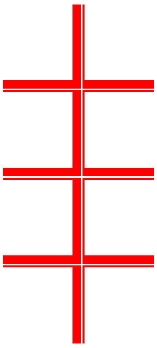
任務:移除 6 根火柴，使之成為 3 正方型

解答:



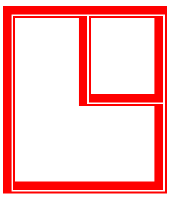
4.非最簡單型: 解答中的正方形有邊長不為 1 根火柴者

例子:



任務:移動 4 根火柴使之成為 2 正方形

解答:



(三)最簡單連續型任務的標準作業流程和說明

1.流程

(1) 算出最後結果的總火柴數

(2) 將總火柴數當作邊數，而欲作出的正方形個數則當作面數，最後用平面尤拉公式算出解答的頂點個數

(3) 算出原題目頂點數，並想辦法將頂點數改變成在步驟(2)算出的數值

2.說明

(1)由於我們只討論最簡單型，因此最後的圖形，必會是由一群邊長為一根火柴的正方形所形成的圖形，而且根據規則知道不可剩餘火柴，因此我們可以大膽推測面數即為所求的正方形個數。

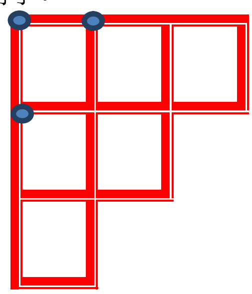
(2)由於我們只討論最簡單型，因此不會出現邊長超過 1 的圖形，因此我們可以推測每一根火柴都要當成一個邊，因此邊數便等於最後的火柴個數。

()由於我們只討論連續型，所以最後的圖形必會連通，故可使用尤拉公式

3. 例子

(1)

例子:



任務:移除 6 根火柴，使之成為 3 正方型

分析:

邊數:18(原題目)-6(任務)=12

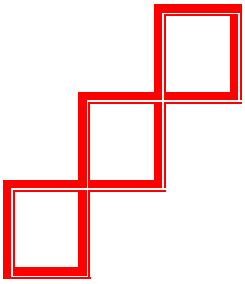
面數:3(最後要有三個正方形)

頂點數:邊數+1-面數=12+1-3=10

目標:移除 6 根火柴，且減掉 3 個頂點

接著我們只要依序檢察看消除各頂點的火柴數是否和題目要求的吻合即可。不難發現若要在 6 根時消除 3 頂點，且使原圖形保持封閉的話，只能選擇上圖標了藍色的那三點

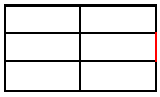
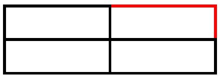
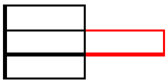
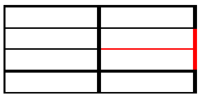
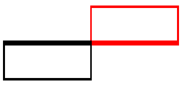
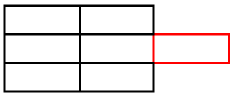
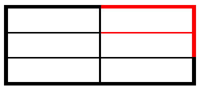
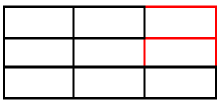
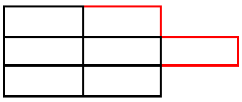
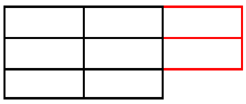
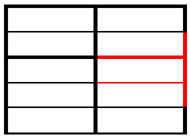
解答:



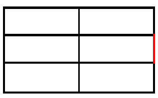
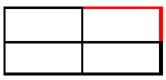
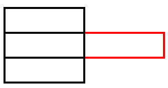
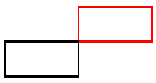
然而當移動火柴棒之數量太大時，便無法直觀看出解答，因此我們統整出一些小規則以輔助計算。

原理：因為不可能拿了又放回，所以經過拿掉(或放入)的處理後，新圖形必須保持封閉。

以此整理出：拿掉(或放入)連續 n 根火柴棒(以紅色代表)之可行方法(下表)

n=1				
n=2				
n=3				
n=4				
n=5				

由上表可發現，當 n=5 時，所有的解法皆可拆解為之前的解法，而 n=4 時也有部分可再拆解，我們統整後將真正最基本的解法重製為一張圖表，並分別算出其在尤拉公式上運用時所需的數值。

				
增減線數	1	2	3	4
增減點數	0	1	2	3
增減面數	1	1	1	1

如此只需運用這四種方式，再搭配題目給的限制及尤拉公式求得之解，便可極為快速有效的得出解答了。

参●結論

在探討了最簡單連續型任務的特徵後，我們運用尤拉公式找到了一個標準流程使這個問題變得更為容易解決，即使圖形變得較為複雜，也不至於陷入毫無頭緒的窘境，但當遇上了不屬於最簡單連續型任務的關卡時，可能還是會陷入毫無頭緒的狀態，因此我們希望在之後能找出一些判斷依據，判斷每一題的型態，並運用修正過後的 SOP 去解出這些關卡。

肆●引註資料

1.宋秉信。從尤拉公式到空間的平面分割。中研院數學研究所

2. D.希爾伯特和康福森合著。直觀幾何。北京高教出版社。王聯芳譯, 84 年。

3.儲嘉康, 歐拉, 四川出版社, 84 年, p.58-59 。