投稿類別：數學類

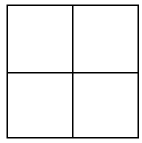
篇名：
立體著色問題

作者：
郭庭佑。市立高雄中學。高一 24 班
郭澄宇。市立高雄中學。高一 24 班

指導老師：
黃仁杰 老師

壹●前言

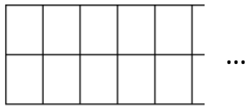
老師之前教排列組合時講到圖形(圖一)的著色問題，同色不相鄰的方法數，並且將其推廣成多個圖形相連(圖二)的著色問題，所以我們突然想到，若是將圖一的圖形往上方堆疊起來，則方法數會是多少？而如何將其推廣？於是就開始進行這方面的研究。



圖一

貳●正文

將圖一的圖型往上方堆疊應如圖三的圖形，但避免其在推廣時造成混淆，所以可將圖形簡化成由８個小正方體，堆疊成一個大正方體（圖四），並將其分別編碼



圖二

先進行一些假設，假設有ｍ種顏色(ｍ≥４)，而每個小正方體都帶有一種顏色，且相鄰的小正方體不同色，先假使其不可轉動，故可以進行如下的討論：

一、固定 a 為第一個著色的地方，有 m 種選擇

二、則之後能依據ｂ．ｃ．ｄ彼此之著色關係進行討論

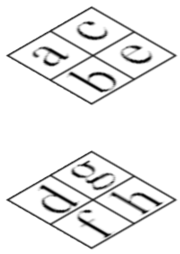
（一）ｂ．ｃ．ｄ皆同色：（ｍ－１）×1×1

（二）ｂ．ｃ同色：（ｍ－１）×1×（ｍ－２）

（三）ｂ．ｄ同色：（ｍ－１）×1×（ｍ－２）

（四）ｃ．ｄ同色：（ｍ－１）×1×（ｍ－２）

（五）ｂ．ｃ．ｄ皆異色：（ｍ－１）×（ｍ－２）×（ｍ－３）



圖三

三、之後可依據前面所討論的ｂ．ｃ．ｄ之間的關係，再對ｅ．ｆ．ｇ．ｈ進行討論

（一）ｂ．ｃ．ｄ皆同色

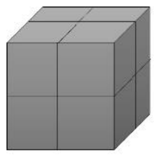
１、ｅ．ｆ．ｇ皆同色：(ｍ－１)×1×1×（ｍ－1)

２、ｅ．ｆ同色：（ｍ－１）×1×（ｍ－２）×（ｍ－２）

３、ｆ．ｇ同色：（ｍ－１）×1×（ｍ－２）×（ｍ－２）

４、ｅ．ｇ同色：（ｍ－１）×1×（ｍ－２）×（ｍ－２）

５、ｅ．ｆ．ｇ皆異色：（ｍ－１）×（ｍ－２）×（ｍ－３）×（ｍ－３）



圖四

（二）ｂ．ｃ同色

１、ｅ．ｆ．ｇ皆同色：（ｍ－２）×1×1×（ｍ－１）

(ｂ．ｃ．ｄ以用了 2 種顏色，所以只剩 m-2 種顏色)

２、ｅ．ｆ同色：（ｍ－２）×1×（ｍ－３）×（ｍ－２）

(ｅ可選ｍ－１種顏色，而ｆ可選ｍ－２種顏色，而ｆ可選的顏色ｅ都可選，而ｇ與ｂ．ｄ不同色而且需跟ｅ．ｆ不同色)

３、ｅ．ｇ同色：（ｍ－２）×1×（ｍ－３）×（ｍ－２）

４、ｆ．ｇ同色：（ｍ－２）×1×（ｍ－３）×（ｍ－２）

5、e．f．g皆異色：（e和d同色）＋（e和d不同色）
＝1×（m－2）×（m－3）×（m－3）＋（m－2）×（m－3）×（m－4）×（m－3）

（三）b．d同色：可由第（二）點的討論獲得相同結果

（四）c．d同色：可由第（二）點的討論獲得相同結果

（五）b．c．d皆異色

1、e．f．g皆同色：（m－3）×1×1×（m－1）

2、e．f同色：（m－3）×1×（m－3）×（m－2）

3、e．g同色：（m－3）×1×（m－3）×（m－2）

4、f．g同色：（m－3）×1×（m－3）×（m－2）

5、e．f．g皆異色：（e和d同色&b和f同色）＋（e和d同色&b和f不同色）＋（e和d不同色&b和f同色）＋（e和d不同色&b和f不同色）＝1×1×（m－2）×（m－3）＋1×（m－2）×（m－3）×（m－3）＋1×（m－2）×（m－3）×（m－3）＋（m－3）×（m－4）×（m－4）×（m－3）

四、展開並化簡

（一）分開化簡

1、b．c．d皆同色＝m×（m－1）×1×1×〔(m－1)×1×1×(m－1)+（m－1）×1×（m－2）×（m－2）＋（m－1）×1×（m－2）×（m－2）＋（m－1）×1×（m－2）×（m－2）＋（m－1）×（m－2）×（m－3）×（m－3）〕
＝（m^2－m）×〔m^4－6m^3＋15m^2－17m＋7]
＝m^6－7m^5+21m^4－32m^3＋24m^2－7m

2、b．c同色＝m×（m－1）×1×（m－2）×{（m－2）×1×1×（m－1）＋（m－2）×1×（m－3）×（m－2）＋（m－2）×1×（m－3）×（m－2）＋（m－2）×1×（m－3）×（m－2）＋〔1×（m－2）×（m－3）×（m－3）＋（m－2）×（m－3）×（m－4）×（m－3）〕}
＝（m^3－3m^2＋2m）×〔m^4－8m^3＋25m^2

$-36m+20$〕

$=m^7-11m^6+51m^5-127m^4+178m^3-132m^2+40m$

3、b．d同色$=m^7-11m^6+51m^5-127m^4+178m^3-132m^2+40m$

4、f．g同色$=m^7-11m^6+51m^5-127m^4+178m^3-132m^2+40m$

5、b．c．d皆異色$=m\times(m-1)\times(m-2)\times(m-3)\times\{(m-3)\times1\times1\times(m-1)+(m-3)\times1\times(m-3)\times(m-2)+(m-3)\times1\times(m-3)\times(m-2)+(m-3)\times1\times(m-3)\times(m-2)+〔1\times1\times(m-2)\times(m-3)+1\times(m-2)\times(m-3)\times(m-3)+1\times(m-2)\times(m-3)\times(m-3)+(m-3)\times(m-4)\times(m-4)\times(m-3)〕\}$

$=(m^4-6m^3+11m^2-6m)\times〔m^4-11m^3+51m^2-131m+99〕$

$=m^8-15m^7+100m^6-387m^5+934m^4-1380m^3+1125m^2-378m$

（二）全部合併$=m^8-12m^7+68m^6-241m^5+574m^4-878m^3+753m^2-265m$

參●結論

一、當m＝4代入，我們得到一個結論，其值計算出來為２４１２，發現其與樹狀圖列出之方法符合

二、當m＝5代入，我們得到一個結論，其值計算出來為２９０００，發現其與樹狀圖列出之方法符合，所以推斷此式成立

三、其實我們發現生活中到處都充滿著數學，只是我們常常缺乏發現，我們相信只要我們用心觀察，處處皆可以為一新觀點，到處都可以是一篇小論文的主題，可以等待我們去發現並討論之，雖然可能會很辛苦，但其中的過程是我們需要學習的

四、如果做成$2\times2\times n$的長方條，而這可從$2\times2\times2$的正立方體相接去推廣，而相接面的種類歸類如下：

（一）a．b．c．e皆異色

（二）a．e同色，b．c異色

（三）a．e異色，b．c同色

（四）ａ．ｅ同色，ｂ．ｃ也同色

肆●引註資料

一、高雄市立高學中學數學科科學研究會（２０１２）。《高一數學　輔助教材》。高雄：高雄市立高學中學數學科科學研究會

二、林來福（主編）２０１３。數學　第二冊。台北市：南一書局

三、鍾國亮（２００６）。《離散數學》。臺北：東華書局

四、吳世弘（２０１１）。《離散數學》。臺北：華泰文化