投稿類別：數學類

篇名：

兩交圓內接最大圖形面積探討

作者：

錢柏均。高雄市立高雄高級中學。高二 24 班

黃佑平。高雄市立高雄高級中學。高二 24 班

指導老師：黃仁杰老師

數學小論文

兩交圓內接最大圖形面積探討

黃佑平 錢柏均

高雄市立高雄高級中學

指導老師：黃仁杰老師

摘要

圓，存在於我們生活中美一個角落，它是世界上最美的一種圖形，但他所蘊含的，卻不只如此。人們常說「月圓人團圓」，可見它在我們的心中，是代表著一種圓滿、和諧的意思；而中國古代的圓，則與天象的觀察息息相關，古人發現日月星辰會周而復始地流轉，因此認為「天」是一個往復循環、無始無終的整體，稱這種狀態為「圓」。相對的，地上的萬事萬物各有其類，都有自己的分職，因此形容這種狀態為「方」，因而產生了「天圓地方」這種想法；人與天地自然是一個完整的整體，自然的法則就是為人處事的道理，因此，圓雖然只是一個幾何圖形，卻也蘊藏了天地運行、節令變化，乃至聖王之道在內。 圓是一種多麼神奇的圖形阿！之前看到了奧運的五環旗，變萌生了一個想法，若是把兩個圓交在一塊兒，會發生什麼事呢？因此在之後的研究中，我們以數學方式探討在兩交圓內的圖形面積。

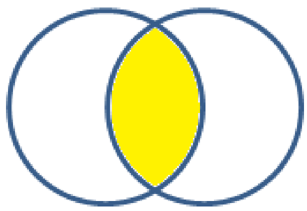
壹、前言

一、研究動機

在高二第四冊的課程中學到了圓錐曲線，其中包含圓、橢圓、拋物線、雙曲線，探究其中有許多有趣的性質，(e.g.圓系的組合、根軸、雙曲線的漸進線性質……)，我們在其中思考之中，從其中較為簡單明瞭的圓中想到了一個有趣的問題：如果有兩個圓相交(形成交圓)，在其相交部分中置入一多邊形，則要如何做出最大值，於是我們從最簡單的三角形開始探討，並延伸到四邊形。

二、研究目的

在直角座標平面上存在兩相交於兩點的圓，半徑相同，其交集如右圖所示黃色區塊，為一類似橄欖球型的區塊，而在其邊上任取頂點，則可形成一多邊形，而我們將在之後探討此內接多邊形之面積最大值。



(一) 簡化問題：探討普通圓內接多邊形的最大面積。

(二) 探討交圓內的最大三角形面積。

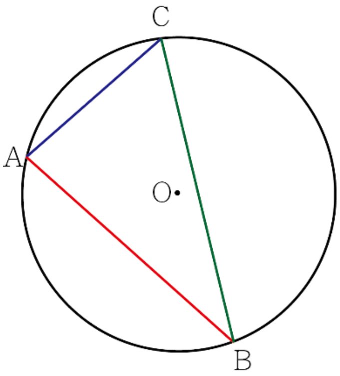
(三) 延伸：探討最大內接四邊形面積。

貳、主要內容

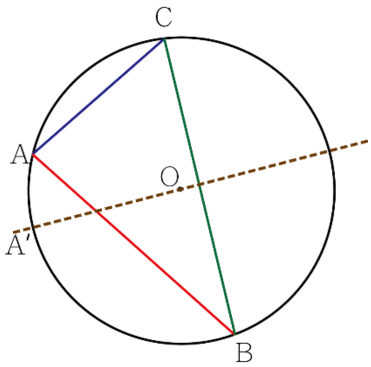
一、探討普通圓內接多邊形的最大面積

(一) 圓內接三角形最大面積

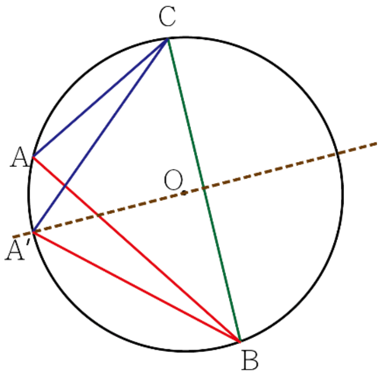
現有一圓 O，在圓周上任取三點 A、B、C，形成一封閉三角形(如圖一)。在 $\overline{BC}$ 上做一條中垂線交 BAC 於 A’(如圖二)，則 $d(\text{A}'，\overline{BC}) \geq \text{d}(\text{A}，\overline{BC})$，使得三角形面積 $\triangle A'BC \geq \triangle ABC$(如圖三)。



（圖一）

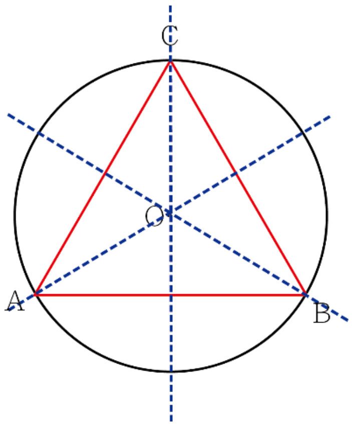


（圖二）

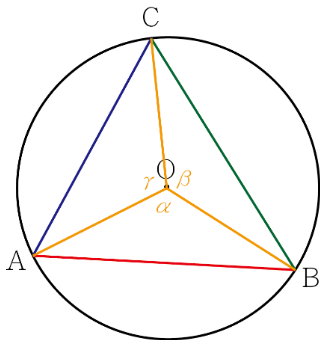


（圖三）

利用上述手法反覆操作後，使各邊上的高達到最大值，我們會發現此三角形會趨向一個正三角形；而達到最理想狀態，也就是面積最大時，我們可推測此 $\triangle ABC$，A 點會在 BAC 之中點，B 點會在 ABC 之中點，C 點會在 ACB 之中點，形成一正三角形(如圖四)。此方法也將會用於證明交圓內的最大三角形面積。



（圖四）

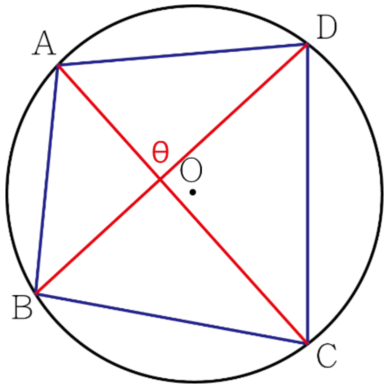


（圖五）

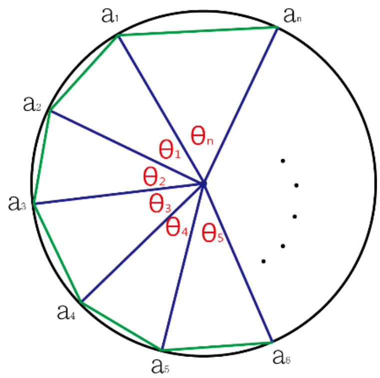
另證：一圓半徑為 R，圓心為 O，圓內接一 $\triangle ABC$，$\angle AOB = \alpha$，$\angle BOC = \beta$，$\angle COA = \gamma$(如圖五)，$\alpha + \beta + \gamma = 360°$，此時 $\triangle ABC$ 面積 $= \frac{1}{2}\text{R}^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \leq \frac{1}{2}R^2 \times 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$(根據琴森不等式)，而等號成立條件為 $\alpha = \beta = \gamma$，得證 $\triangle ABC$ 面積最大時為一正三角形，此時面積為 $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$。

(二) 推廣至圓內接多邊形最大面積

首先證明四邊形，考慮一圓，圓心 O，半徑為 R，在圓周上任取四點 A、B、C、D 形成一四邊形(如圖六)，此時四邊形 ABCD 面積$=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BD}\sin\theta$ $\le\frac{1}{2}\times 2R\times 2R=2R^2$，等號成立條件：$\overline{AC}=\overline{BD}=2R$、$\theta=90°$，可得四邊形 ABCD 面積最大時為一正方形。



(圖六)



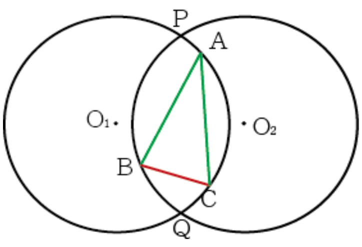
(圖七)

至於其餘多邊形之證法，基本上與上述三角形的第二證法相似，利用琴森不等式。考慮一圓，圓心 O，半徑為 R，在圓周上任取 n 個點 a_1、a_2、a_3 …… a_{n-1}、a_n 形成一 n 邊形(如圖七)，$\angle a_1Oa_2=\theta_1$、$\angle a_2Oa_3=\theta_2$、$\angle a_3Oa_4=\theta_3$、…… $\angle a_{n-1}Oa_n=\theta_{n-1}$、$\angle a_nOa_1=\theta_n$，此 n 邊形的面積可寫成$\frac{1}{2}R^2(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3+\cdots+\sin\theta_{n-1}+\sin\theta_n)\le\frac{1}{2}R^2 n\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_{n-1}+\theta_n}{n}=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360°}{n}$，等號成立時$\theta_1=\theta_2=\theta_3=\ldots=\theta_{n-1}=\theta_n$，故此圖形為一正多邊形。

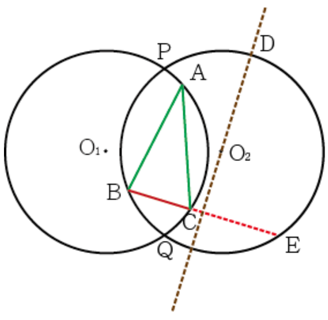
二、探討交圓內的最大三角形面積

(一) 觀察內接三角形面積變化情形

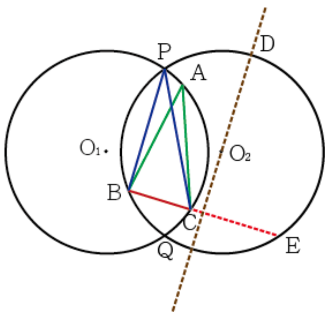
現有兩圓，圓心分別為 O_1、O_2，半徑皆為 R，此兩圓相交於 2 點 P、Q，在其交集的部分，任取三點 A、B、C 形成一三角形(如圖八)，而我們將後頭討論其面積之最大值。



（圖八）



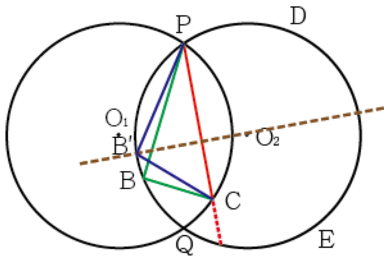
（圖九）



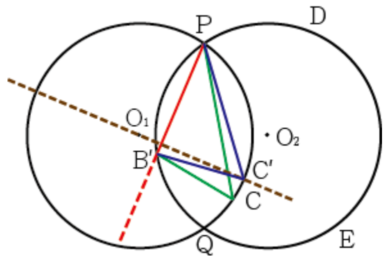
（圖十）

觀察此三角形的三邊，我們將$\overline{BC}$交圓 O2 於 E，並做線段 BE 中垂線交圓 O2 於 D(如圖九)，此時優弧BDE上 D 點距離$\overline{BE}$最長，但 D 點並不畏於此兩圓的交集上，因此我們取 P 點，使得$\overline{BC}$邊上的高能最大，進而使三角形面積能加大，$\triangle PBC \geq \triangle ABC$（如圖十）。

同樣地，我們延長$\overline{PC}$並作中垂線，交圓 O2 於點 B'，此時$\triangle PB'C \geq \triangle PBC$（如圖十一），接著再延長$\overline{PB'}$並作中垂線，交圓 O1 於點 C'，此時$\triangle PB'C' \geq \triangle PB'C$（如圖十二）。

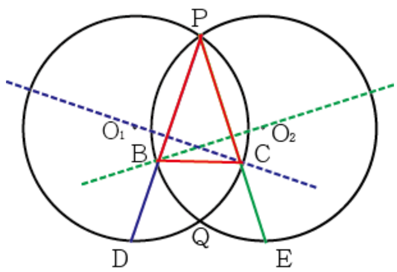


（圖十一）



（圖十二）

如此反覆操作之後，我們可以發現，此三角形會變成一個以$\angle P$為頂角，$\overline{BC}$為底邊的一個等腰三角形(如圖十三)，且 B 點會落在PBE之中點，C 點會落在PCD之中點，及代表著$\overline{PB}$及$\overline{PC}$邊上的高均已達到最大值，此時$\triangle PBC$的面積會最大。



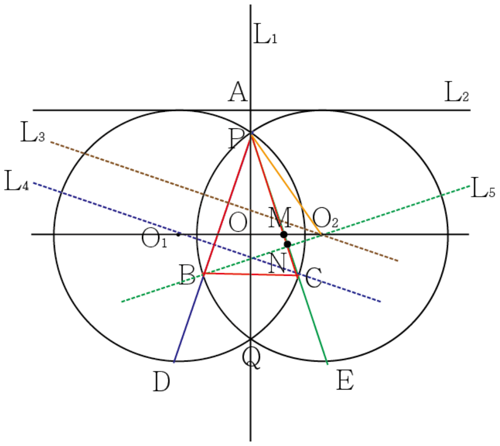
（圖十三）

證明方法十分簡單，利用反證法，假設我們剛找到的$\triangle PBC$不是最大的三角形，此時我們隨意移動其中任一個頂點(當然它必須要在圖形交集上)，可以發現到三角形的高會變小，面積也會變小，故不存在比$\triangle PBC$大的內接三角形，得證。

(二) 最大內接三角形面積公式

接著我們將推導此三角形的面積通式，如圖十四，首先我們作出$\overleftrightarrow{O_1O_2}$和 O1 、O2 之中垂線 L1，以及其中一條外公切線 L2，接著再作幾條輔助線，$\overline{PB}$之中垂線

L_3、$\overline{PD}$之中垂線L_4、$\overline{PE}$之中垂線L_5，其中L_1、L_2交於A點，$\overleftrightarrow{PE}$與$\overleftrightarrow{O_1O_2}$交於M點，$\overleftrightarrow{PE}$與$L_5$交於N點、$L_1$與$\overleftrightarrow{O_1O_2}$交於O點。



公式推導：

設$\overline{AP}=d$（$0\le d\le R$）、$\angle BPC=\theta$，令$\angle O_1CB=\angle 1$、$\angle CO_1O_2=\angle 2$、$\angle O_2BC=\angle 3$、$\angle O_1O_2B=\angle 4$、$\overleftrightarrow{O_1O_2}$與$L_3$夾角$=\angle 5$。

1. $\because \overleftrightarrow{O_1O_2}//\overline{BC}$ $\therefore \angle 1=\angle 2$ 又 $\because L_3//L_4$ $\therefore \angle 2=\angle 5$，依對稱原理可得 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=\angle 5$
2. 考慮$\triangle POM$與$\triangle O_2NM$，$\because \angle PMO=\angle O_2MN$且$\angle POM=\angle O_2NM=90°$ $\because \triangle POM\sim\angle O_2NM$（AA相似），故$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=\angle 5=\dfrac{\theta}{2}$
3. $\because PB=BE=2\theta$ $\therefore \angle PO_2B=PB=2\theta$，考慮$\triangle POO_2$，$\angle PO_2O=2\theta-\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3\theta}{2}$，$\overline{PO}=R-d$、$\overline{PO_2}=R$，$\therefore \sin\dfrac{3\theta}{2}=\dfrac{R-d}{R}$
4. 設$\overline{PB}=a$，$\angle PO_2B=2\theta$，根據餘弦定理得$a^2=2R^2-2R^2\cos 2\theta$
5. $\triangle PBC=\dfrac{1}{2}a^2\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times 2R^2(1-\cos 2\theta)\sin\theta=2R^2\sin^3\theta$，其中 $\sin\dfrac{3\theta}{2}=\dfrac{R-d}{R}$

特別地：

1. d=0時，意即兩圓重合，可視為一圓，此時$\sin\dfrac{3\theta}{2}=\dfrac{R-0}{R}=1$，$\therefore\theta=60°$，面積為$\triangle PBC=2R^2\sin^3 60°=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$，與之前結論相同。
2. d=R時，意即兩圓互相外切，此時$\sin\dfrac{3\theta}{2}=\sin\theta=0$，三角形面積為0，無法形成三角形。

3. d=$(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$R 時，意即兩圓互相通過彼此圓心，此時 $\sin\frac{3\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\theta=40°$，

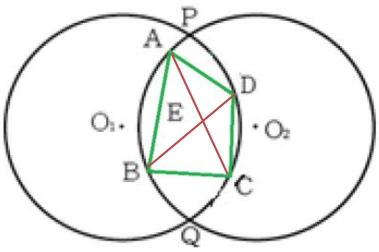
面積為 $\triangle PBC=2R^2\sin^3 40°\approx 0.5312R^2$

三、延伸：探討最大內接四邊形面積

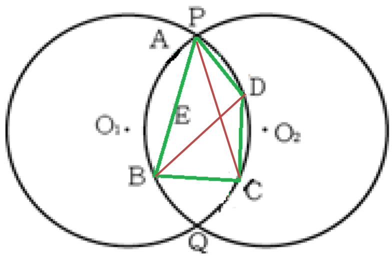
(一) 內接任意四邊形最大面積

對於內接四邊形的最大面積，我們可將其考慮成四塊三角形進行觀察(如圖十四)，將四邊形 ABCD 劃分成△AEB、△BEC、△CED、△AED，如同尋找內接最大三角形時的作法，若能使三角形的面積盡量放大，則便可找到最大的內接四邊形。

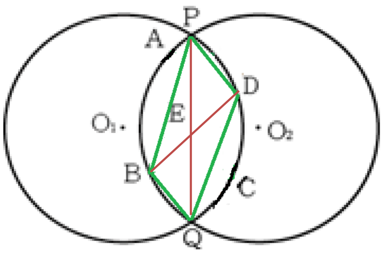
如同觀察三角形的規律，我們先從△ABD 來看，則可發現當 A 逐漸向 P 點移動時，其面積會有變大的趨勢，故形成較大四邊形 ABC，找到最大時 A 與 P 點重疊(如圖十五)，對於△BCD，則在 C 點與 Q 點重疊時找到最大值(如圖十六)。



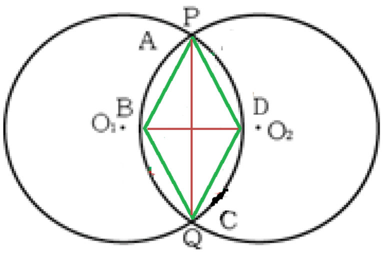
(圖十四)



(圖十五)



(圖十六)

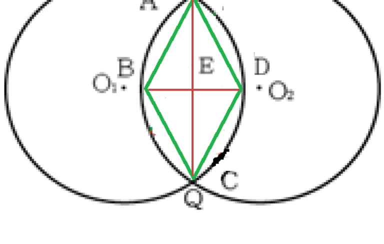


(圖十七)

接著在分別看△PBQ 及△PDQ，則會得到最大圖形發生在$\widehat{AB}=\widehat{BQ}$且$\widehat{PD}=\widehat{DQ}$的情況下，此時為一菱形(如圖十七)。觀察各點若移動皆會使得面積縮小，故兩交圓內接最大四邊形為一菱形，四點落在兩交點及其等分兩交點之間弧的點上面。

面積公式推導：

令兩圓心$\overline{O_1O_2}=d$，圓半徑= R

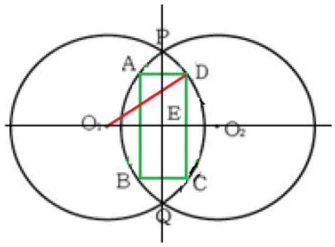


1. $\because \overline{O_1D}+\overline{O_2B}=\overline{O_1D}+\overline{O_2D}+\overline{BD}$
$=\overline{O_1O_2}+\overline{BD}=2R$
又$\because \overline{O_1O_2}=d$
$\therefore \overline{\mathrm{BD}}=\overline{O_1O_2}+\overline{BD}-\overline{BD}=2R-d$
2. $\because \overline{O_1P}=R$ 且 $\overline{O_1E}=\frac{d}{2}$ $\quad\therefore \overline{\mathrm{PE}}=\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}$

3. 故$\Diamond \mathrm{ABCD} = (2\mathrm{R} - \mathrm{d})\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}$

(二) 內接矩形最大面積探討

因為限制了四邊形的形狀(矩形)，故可以加以探討其面積，而因為對於內銜矩形來講，變數較三角形及菱形更為廣泛，在不同的長寬之間皆會影響面積的大小變化，並非單一乘積的結果。故我們以下直接以平面座標系代入代數試驗：令兩圓心$\overline{O_1O_2} = d$ ，圓半徑$= \mathrm{R}, \angle \mathrm{D}O_1O_2 = \theta$

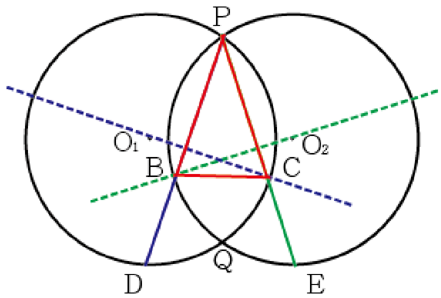


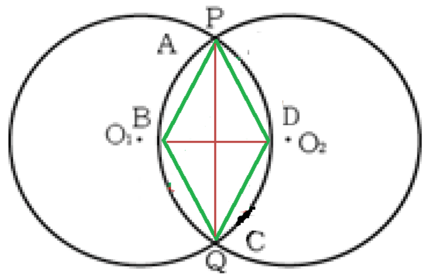
1. $\because \overline{O_1E} = \overline{O_1D} \times \cos\theta = R\cos\theta$
   $\therefore \overline{\mathrm{AD}} = \overline{O_1E} \times 2 - \overline{O_1O_2} = 2\mathrm{R}\cos\theta - d$
2. $\overline{\mathrm{CD}} = 2 \times \overline{DE} = 2 \times \overline{O_1D}\sin\theta = 2R\sin\theta$
3. $\therefore \square\mathrm{ABCD} = 2R\sin\theta\,(2\mathrm{R}\cos\theta - d)$

結果相當的不規律，發現不是正方形，目前亦也找不到可循的規律所在。

參、結論

從我們的研究結果中得出：兩大小相同的圓交集中，其會構成最大的三角形為等腰三角形(如下左圖)，且頂角在兩交點的其中之一，其面積為$\boldsymbol{2R^2 sin^3\theta}$(其中 R 為圓半徑、$\boldsymbol{\theta}$為頂角角度)。而交集中的最大四邊形則是菱形(如下右圖)，其中兩頂點為兩圓交點，另外兩點則落在兩交弧的中間點。





至於兩交圓中最大的矩形我們還無法想出一個較佳的辦法計算出最大面積及發生的情況，未來有機會將著手於此區塊，更希望將情況推廣到不一定相同的兩圓相交所產生的圖形。

肆、參考資料

1. 普通高級中學數學課本第三、四冊
2. 岡部恒治，本丸諒(2013)。3 小時讀通幾何。台灣。世茂。
3. 基礎幾何學，2013.8.24。
   http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/ar/ar_wy_geo_toc.htm