

投稿類別：數學類

篇名：倒水問題

作者：

郭澄宇。高雄市立高雄高級中學。高二 24 班

謝承翰。高雄市立高雄高級中學。高二 24 班

指導老師：黃仁杰老師

## 壹●前言

古時候，人們還沒有現代的高科技，沒有自來水的供應，開挖很多口井，以水桶來裝水，而當取水回家時，需要的水量不同，卻又沒有每一種容量的桶子，人們就開始思考著如何用固定的幾個大小不一桶子，取得某些特定量的水，衍生出了倒水問題。現在這個問題被視為一種益智遊戲，現在手機的發達，在益智遊戲的應用程式中，也有這個問題，而經過一番的思考，使我們想探討數種解決此問題的方法。



## 貳●正文

問題一：

若有兩水杯 A 容量  $a$  升、B 容量  $b$  升，但都沒有刻度，水無限量供應，只能將水倒掉或倒進另一個杯子至裝滿或倒完，如何在這些水杯中創造出  $c$  升的水？

(且  $c < a, b$ )

確認题目的可行性，檢查  $c$  是否為  $a, b$  最大公因數的整數倍，若否，則題目無解；如果可以，則進一步討論接下來的狀況。

<解一：萬用解> 不失一般性，假設的情況下：

法一)

- 步驟1. 將 A 水杯裝滿水
- 步驟2. 將 A 水杯中的水倒入 B 水杯中
- 步驟3. 將 B 水杯中的水倒完
- 步驟4. 將 A 水杯中的水倒入 B 水杯中
- 步驟5. 重複以上步驟

法二)

- 步驟1. 將 B 水杯裝滿水
- 步驟2. 將 B 水杯中的水倒入 A 水杯中
- 步驟3. 重複至 A 水杯裝滿水
- 步驟4. 將 A 水杯中的水倒完
- 步驟5. 重複以上步驟

<解二：最大公因數法>

先利用輾轉相除法找出 a、b 的最大公因數，型如： $(a, b) = \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha, \beta \in \mathbb{I}$

/( )  $\frac{c}{(a, b)}$

$\frac{c}{(a, b)}$  次達到目標。

問題二：

若有三水杯 A 容量 a 升、B 容量 b 升、C 容量 c 升，但都沒有刻度，水無限量供應，只能將水倒掉或倒進另一個杯子至裝滿或倒完，如何在這些水杯中創造出 d 升的水？（且  $d \leq a, b, c$ ）

首先先確認题目的可行性，如同問題一，檢查 d 是否為 a, b, c 最大公因數的整數倍，若否，則題目無解，如果可以，則進一步討論接下來狀況

<解一：最大公因數法>

先利用輾轉相除法找出 a, b, c 的最大公因數，型如： $(a, b, c) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma$

$x_3, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{I}$  / ( )  $\frac{d}{(a, b, c)}$  次達到目標

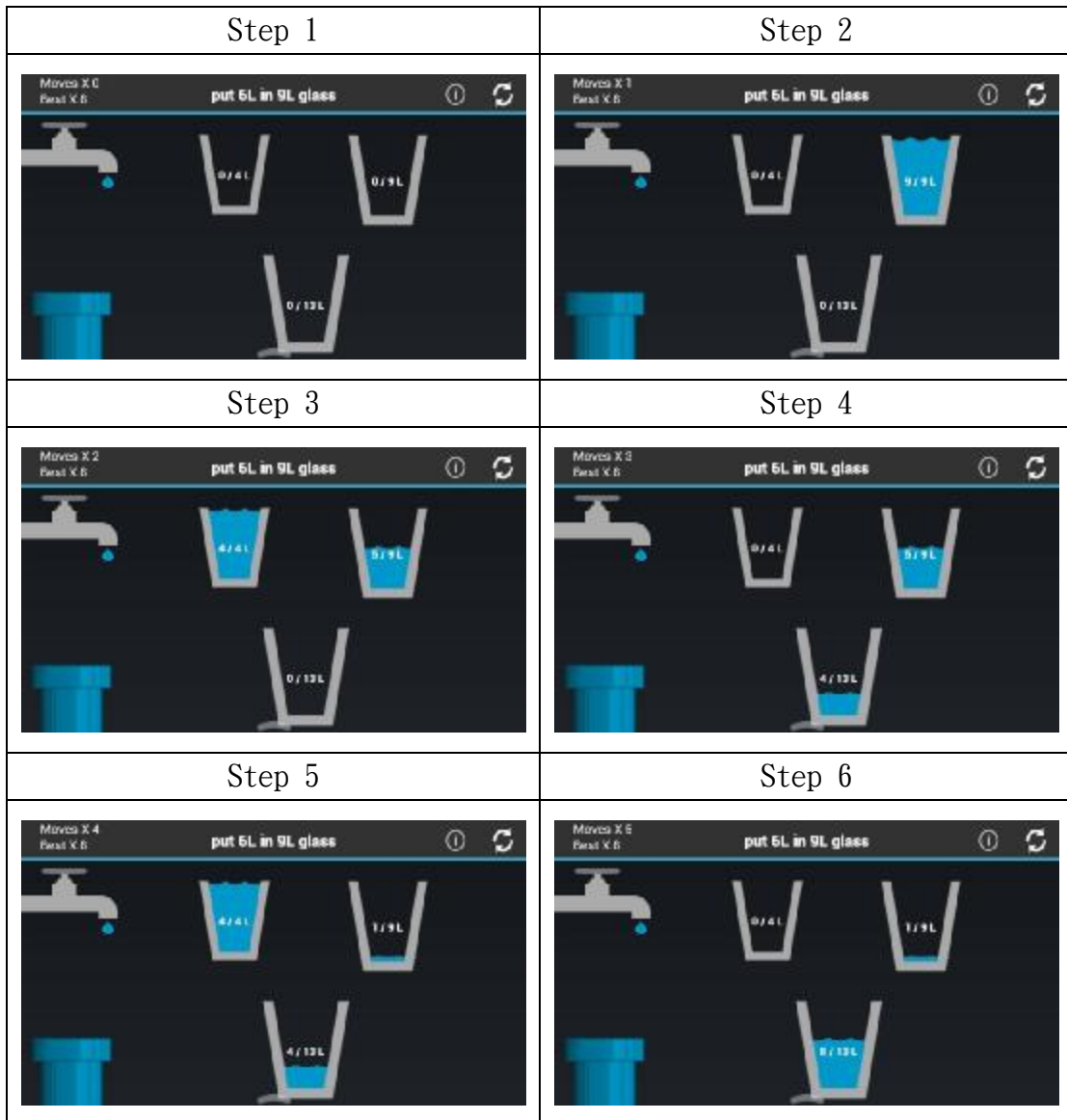
<解二：快速解>

先利用 a, b, c 倒出接近 d 但小於 d 的數，剩餘的差額再用 a, b, c 的最大公因數補齊，

例子：有 4、9、13 的水杯，將 6L 的水倒入 9L 的水杯內

<解一：萬用解>






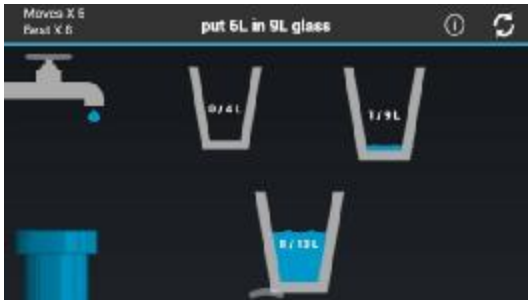


先利用輾轉相除法求出(4, 9, 13)的最大公因數，再放大其倍數達到目標

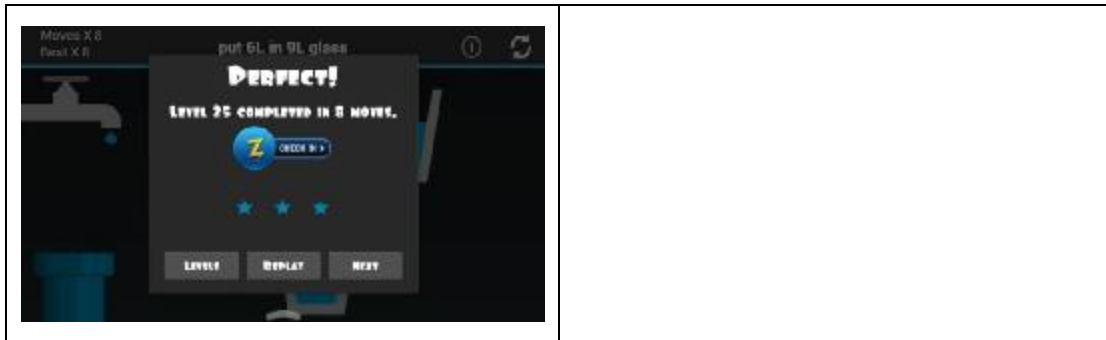


重複上述步驟 6 次即可獲得 6L 之溶液

<解二：快速解>

先利用  $9-4=5$  湊出最接近 6 的數字，再利用解一求出 (4, 9, 13) 的最大公因數 1，及可算出最少步數

<p style="text-align: center;">Step 1</p> 	<p style="text-align: center;">Step 2</p> 
<p style="text-align: center;">Step 3</p> 	<p style="text-align: center;">Step 4</p> 
<p style="text-align: center;">Step 5</p> 	<p style="text-align: center;">Step 6</p> 
<p style="text-align: center;">Step 7</p> 	<p style="text-align: center;">Step 8</p> 
<p style="text-align: center;">Step 9</p>	



### 參●結論

先判斷目標是否可被水杯的最大公因數整除

1. 不可被整除→此題無解
2. 可被整除→開始解題

### 肆●參考資料

1. [http://oskaliang.blog.hexun.com.tw/9105681\\_d.html](http://oskaliang.blog.hexun.com.tw/9105681_d.html)