投稿類別：數學類

篇名：拿圈圈遊戲中的數學問題

作者：
曾子芸。市立高雄中學。高二 24 組
胡寶鈺。市立高雄中學。高二 24 組

指導老師：
黃仁杰老師

壹●前言

一、研究動機

網路上有這樣的遊戲，有固定的圈圈個數，兩方玩家一次可以拿 1-3 個圈圈，一直下去，拿掉最後一個圈圈的人就輸了。我們發現，遊戲進行中，兩人依次所拿的圈圈數會直接反映到這場遊戲的輸贏，也就是說，可以經由推算的結果來取得勝利。因此，我們想對這方面有進一步的研究，也希望推廣至將圈圈依特殊形狀排列，所拿圈圈必須相互連接時的情形。

二、研究目的

(一)在有限個圈圈(設定數目:1,2,3…)內，找出獲得勝利時的取走圈圈方法。
(二)推廣至 n 個圈圈時的方法。
(三)再推廣至有 n 個圈圈，且一次可拿走 1-m 個圈圈時的方法(1<m<n)。
(四)將圈圈排成特殊形狀，並限制拿取條件，找出獲得勝利時的取走圈圈方法。

貳●正文

一、討論有限個圈圈，且 1 次可拿 1-3 個

(設定 A 先拿，試算 A 贏的方法，且以表格代替圈圈)

(一)4 個圈圈
以下列舉出所有可能情形

A	A	A	B

若 A 只先拿走 1 個或 2 個，則 B 下一次可以拿走 2 個或 1 個，如此一來就變成 A 輸了。所以如果有 4 個圈圈時，A 要一次拿走 3 個才會贏。可以發現，AAAB 是唯一的一種可能。而我們可知，只要是先拿的人，必贏。

(二)5 個圈圈

A	B	B	B	A

A	A	B	B	A

A	A	A	B	A

從上圖可知，當圈圈數為 5 時，不論 A 先拿的是 1 或 2 或 3 個，B 可根據 A 拿的圈數拿 3 或 2 或 1 個，使圈圈剩下最後一個，則 A 必輸。故我們可發現，當圈圈是 5 個時，先拿的那個人必輸。

(三)6 個圈圈

A	B	A	A	A	B

A	B	B	A	A	B

A	B	B	B	A	B

經以上列舉，我們可以發現，只要 A 是第一個拿，且拿的個數為 1 個圈圈，不論 B 接下來拿的是 1 或 2 或 3，A 依照 B 的圈數再行拿取，就必會是贏家。

A	A	B	B	B	A

A	A	A	B	B	A

但是，我們又進一步的發現，若 A 第一次拿了 2 或 3 個，B 只要再拿 3 或 2 個，就可以製造出剩下最後一個的情況，因此，A 必輸。

(四)7 個圈圈

A	B					

當 A 先下，B 只下 1 個時，狀況回到 5 個圈圈 A 先下時，因此 A 必輸

A	B	B				

當 A 先下，B 只下 2 個時，狀況回到 4 個圈圈 A 先下時，因此 A 必贏

A	B	B	B			

當 A 先下，B 只下 3 個時，狀況回到 3 個圈圈 A 先下時，因此 A 必贏

A	A					

當 A 先下，且 A 下 2 個時，狀況回到 5 個圈圈時，先拿的必輸，因此 A 必贏

A	A	A				

當 A 先下，且 A 下 3 個時，狀況回到 4 個圈圈時，因此 A 必輸

因此，當 A 先拿時，A 有主控權可以選擇要拿 1 或 2 或 3 個，只要 A 選擇第一次拿 2 個，使狀況變回 5 個圈圈且 B 先拿時，則 A 必贏(當圈圈數為 5 時，先拿的人必輸)。

二、有 n 個圈圈，限定一次拿取數

(一)一次可拿 1-3 個圈圈

從第一點的討論可以看出，其實在 6 個圈圈及 7 個圈圈時，討論都可以回到先前 4 個圈圈和 5 個圈圈的方法，意即只要 A 有主控權時，只需要控制在剩下 5 個圈圈時，不要當先拿的那個人，就可以保證會獲得勝利。

(二)一次可拿 1-4 個圈圈

A	A	A	A	B

A	B	B	B	B	A

經過上面的討論後，我們發現，真正需要討論的只有 5 個圈圈和 6 個圈圈的情況，其他繼續延伸的都可以藉由 A 的控制回到 5 或 6 個圈圈的情形。因此，只要先拿的 A 拿到剩下 6 個時，則 A 必勝利(6 個圈圈時，先拿的人必輸)。

(三)一次可拿 1-m 個圈圈

由上述可知，若全部共有 m+1 個圈圈時，A 只要將前面 m 個圈圈拿完，則 B 必輸。若全部共有 m+2 個圈圈，只要 A 拿 k 個，則 B 只要拿 m+1-k 個即可使 A 拿到最後一個，則 A 必輸。而若總共有 n 個圈圈時，皆可以藉由 A 的控制回到 m+1 或 m+2 個圈圈的情形。因此，只要先拿的 A 將圈圈拿到剩下 m+2 個時，則 A 必勝利(m+2 個圈圈時，先拿的人必輸)。

三、遊戲中的等差數列

在討論的過程中，我們又發現了一個有趣的規律

(一)例子：當總共有 15 個圈圈時

若 A 先拿走 2 個，接下來只要 B 拿 1 個、A 就拿 3 個；B 拿 2 個、A 就拿 2 個；B 拿 3 個、A 就拿 1 個，則最後會由 B 拿走最後一個，即 A 贏。

(二)說明

當圈圈數有 $n=a(m+1)+b$，$0<b\leqq m+1$，$b\neq 1$，先拿走 b-1 個後，只要對方拿 k 個，自己只要拿 m+1-k 個($k\leqq m$)，不斷的進行 a 次，最後就會剩下 1 個，且輪到的是

對方，則可獲得勝利。
其中，若 b=1 時(前提建立在雙方都曉得此規律)，先拿的人必輸。

(三)讓我們換個說法(以數字舉例)

1.當有 15 個圈圈，一次可拿 1-3 個時。我們可以知道 15=3(3+1)+3，所以，先拿走 2(3-1)個圈圈後，就可以依照上述做法進行拿取。這時候我們會發現，不論是什麼樣的組合，贏家所拿的圈圈編號數(第一個圈圈為編號 1)一定會有 1,2,6,10,14。若我們撇開 1 不計算，會發現，所拿圈圈的編號數呈現一等差數列的形式，且公差為 3+1。

2.當有 22 個圈圈，一次可拿 1-4 個時。我們可以知道 22=4(4+1)+2，所以，先拿走 1(2-1)個圈圈後，就可以依照上述做法進行拿取。這時候我們會發現，不論是什麼樣的組合，贏家所拿的圈圈編號數(第一個圈圈為編號 1)一定會有 1,6,11,16,21。若我們撇開 1 不計算，會發現，所拿圈圈的編號數呈現一等差數列的形式，且公差為 4+1。

3.當有 21 個圈圈，一次可拿 1-4 個時。我們可以知道 21=4(4+1)+1，這時，因為餘數已經是 1 了，不論先拿的人拿了幾個，只要對方也知道這樣的方法，則控制權就會變成在對方手上，則對方所拿的圈圈編號數(第一個圈圈為編號 1)一定會有 5,10,15,20。因此第 21 個(最後一個)必會被先拿的人拿到，因此先拿的人必輸。

(四)總結上述討論

1.有 N 個圈圈，最少取圈數=1，最多取圈數=M，只要 N／M 的餘數≠1，則先拿的人在遵守規律的方法下會獲得勝利。且我們可知道，他所拿的圈圈編號為一等差數列 N-1, N-1-(M+1), N-1-2(M+1), ……，公差為 M+1。

2.當遊戲規則改變，最少取圈數不為 1 時，也可以利用此規律去推估。

叁●結論

一、不論圈圈數為何，其實勝利與否的關鍵在於，能不能控制使得玩家拿走倒數第二個圈圈，也就是說，留下最後一個圈圈給對方。
二、若總圈圈數 n<一次可拿得最多圈圈數 m，則只要 A 第一次拿時拿 n-1 個圈圈，則 A 必勝。
三、若總共有 n 個圈圈，一次可拿 1-m 個圈圈時，皆可以藉由先拿的人的控制回到 m+1 或 m+2 個圈圈的情形。因此，只要先拿的人將圈圈拿到剩下 m+2

個且接下來拿的人是對方時，則必勝利。

四、當圈圈數有 $n=a(m+1)+b$，$0<b\leqq m+1$，$b\neq 1$，先拿走 b-1 個後，只要對方拿 k 個，自己只要拿 m+1-k 個($k\leqq m$)，不斷的進行 a 次，最後就會剩下 1 個，且輪到的是對方，則可獲得勝利。其中，若 b=1 時，先拿的人必輸。

五、有 N 個圈圈，最少取圈數=1，最多取圈數=M，只要 N／M 的餘數≠1，則先拿的人在遵守規律的方法下會獲得勝利。且我們可知道，他所拿的圈圈編號為一等差數列 N-1, N-1-(M+1), N-1-2(M+1), ……，公差為 M+1。而當 N／M 的餘數=1 時，先拿的人必輸。

肆●參考資料

一、深藍論壇 http://www.student.tw/forum397/thread143897.html

二、金門地區第 50 屆中小學科學展覽會 數學遊戲—搶 21
http://passport.tc.edu.tw/contest/file/98_kinmen/b102/b102_00120.pdf