投稿類別：數學類

篇名：
排班問題的模型討論

作者：
尤子瑄。市立高雄中學。高一 24 組
王宣淳。市立高雄中學。高一 24 組

指導老師：
黃仁杰老師

壹、前言

(一) 研究動機

寒假的到來是中學生一年中難得閒暇的時光，我們趁寒假去書局逛逛，偶然翻到一個問題：如何替百貨公司安排執勤的保全？10 點鐘剛營業，11 點鐘吃飯時間開始，12 點鐘尖峰時間……，每個時段所需人數不同，似乎就是我們曾在網路上看過的「排程問題」。查了資料後，我們發現值班問題只是排程問題眾多類型的其中一種。由於排程問題的種類五花八門，受到限制條件也不盡相同，在我們的能力下，我們挑選其中一個深入，因此我們選了排班問題，並想試著用更多元的思考模式來看待高中數學，不只是紙上談兵，而是日常生活中處處都可應用的討論結果。

(二) 研究目的

1、設定一個可以解決排班問題的基本模型

2、透過模型探究排班問題需具備的條件，進而擁有解決執班問題的能力

貳、正文

本研究探討的排程問題鎖定在「員工排班問題」，希望以最少人數完成目標工作，題目會依據尖峰時段的忙碌程度指定每個時段所需的員工人數。為求公平，每個員工一天中上班的總時數一樣。我們從最基本的情況，也就是每個時段時間相同開始討論。

先簡述基本模型及符號定義，以每天有 6 個時段，每個時段所需要人數分別是 1、3、2、6、4、5 人為例，我們定義總時段數為 n，每個時段所需人數為 b，時段 i 所需人數 b_i，而每個人所需負責的時段數量為 k，為方便說明先以Ⓐ、Ⓑ、Ⓒ……分別表示員工。整理如右表一。

表一

時段	員工值班表	每時段員工量
一	Ⓐ	1
二	Ⓐ Ⓑ Ⓒ	3
三	Ⓑ Ⓒ	2
四	Ⓑ Ⓒ Ⓓ Ⓔ Ⓕ Ⓖ	6
五	Ⓓ Ⓔ Ⓕ Ⓖ	4
六	Ⓐ Ⓓ Ⓔ Ⓕ Ⓖ	5

為求方便，我們把每個員工所需負責的 k 個時段排在一起，並且發現排成表格後員工就如同被分組一般，分別是第一組Ⓐ、第二組ⒷⒸ、

第三組ⒹⒺⒻⒼ，如此一來我們變成探討如何分配每組人數，第一組稱為 a_1，第二組稱為 a_2，以此類推，所有符號整理如右表二。

由表一發現，每 k 個時段為一循環，時段一和時段(k+1)、(2k+1)…(n-k+1)相加後會等於時段二和時段(k+2)、(2k+2)…(n-k+2)的和，以此類推。

而分組只是手法，所以一組的人數可以是 0，如表一之例，我們還可以明顯看出可透過更動時段排列以符合模型，如右圖表三之排法。

換句話說，模型只需考慮每時段員工數及如何分組，求出任一解即是解決所有「每時段員工量」相同但不同順序之題目之所有解，舉例如右表四是我們的初始想法，第一組就是在第一時段出現。

後來透過更動時段的排列的方式，產生表三，最後以數據化套用模型方式呈現，如表五。而表五和表六算是相同的情況，表示此模型具有一般性，換個方向思考，解題時只需透過模型計算即可，算得一種就能同時代表其調換順序後所有情況。

有了模型之後，我們開始找當中的基本性質，即判斷是否能找到符合模型的方法。

定理一：$k \mid \sum_{i=1}^{n} b_i$，為滿足最少人數的最基本條件，而 $\sum_{i=1}^{n} b_i$ 除以 k 之商為最小人數。

表二

時段	員工值班表						每時段員工量
1	a_1	a_2	a_3	…	a_{m-1}	a_m	b_1
2	a_2	a_3	a_4	…	a_m	a_{m+1}	b_2
⋮			⋮				⋮
m	a_m	a_{m+1}	a_{m+2}	…	a_{2m-2}	a_{2m-1}	b_m
⋮			⋮				⋮
n-m+1	a_{n-m+1}	a_{n-m+2}	a_{n-m+3}	…	a_{n-1}	a_n	b_{n-m+1}
n-m+2	a_{n-m+2}		⋮	…	a_n	a_1	b_{n-m+2}
⋮							⋮
n	a_n	a_1	a_2	…	a_{m-2}	a_{m-1}	b_n

表三

時段	員工值班表			每時段員工量
二	Ⓐ	0	ⒷⒸ	3
三	0	0	ⒷⒸ	2
四	0	ⒹⒺⒻⒼ	ⒷⒸ	6
五	0	ⒹⒺⒻⒼ	0	4
六	Ⓐ	ⒹⒺⒻⒼ	0	5
一	Ⓐ	0	0	1

表四

時段	員工值班表						每時段員工量
二	Ⓐ	0	ⒷⒸ				3
三		0	ⒷⒸ	0			2
四			ⒷⒸ	0	ⒹⒺⒻⒼ		6
五				0	ⒹⒺⒻⒼ	0	4
六	Ⓐ				ⒹⒺⒻⒼ	0	5
一	Ⓐ	0				0	1

證明：

因時段 i 所需人數＝b_i，其中 $i\in N$，故 $\sum_{i=1}^{n} b_i$ 為不同時段員工在不重複工作的情況下所需的人數。然而從分組的角度看的話，每組都負責 k 個時段，而在這 k 個時段內員工皆不重複工作，此時共需 $k(a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n)=k\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n} b_i$，因 $k\sum_{i=1}^{n} a_i \in N$，故 $k \mid \sum_{i=1}^{n} b_i$。

根據上述需 $k(a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n)=k\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n} b_i$，$\sum_{i=1}^{n} b_i$ 除以 $k=a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n$，即為本題所求最小人數。

表五

時段	員工值班表			每時段員工量
二	1	0	2	3
三	0	0	2	2
四	0	4	2	6
五	0	4	0	4
六	1	4	0	5
一	1	0	0	1

表六

時段	員工值班表			每時段員工量
三	0	0	2	2
五	0	4	0	4
六	1	4	0	5
二	1	0	2	3
一	1	0	0	1
四	0	4	2	6

定理二：可透過每一組的人數調動來達到指定人數，即 $a_i \pm z$，其中 $i\in N$，$z\in Z$。

證明：

因為各組之間相互獨立，互不影響，所以只要是同一組便可逕自加減人數。

舉例：

設 m=3，n=6（表七）

表七

時段	員工值班表			每時段員工量
一	$0(a_1)$	$1(a_2)$	$0(a_3)$	1
二	$1(a_2)$	$0(a_3)$	$2(a_4)$	3
三	$0(a_3)$	$2(a_4)$	$0(a_5)$	2
四	$2(a_4)$	$0(a_5)$	$4(a_6)$	6
五	$0(a_5)$	$4(a_6)$	$0(a_1)$	4
六	$4(a_6)$	$0(a_1)$	$1(a_2)$	5

我們可以透過 a 同加減讓每組的人數更接近，來達到我們的目標。

例如我們先將 a_1 同加 5（表八），當然我們也可以將 a_6 同減 4（表九）或者是同時將 a_1 加 6、a_6 減 3（表十）。

如此一來，所需考量的量變少，在考慮上會變得比較輕鬆，而透過這種看似簡

單的同加減無形中也把很多情況都算成同一種了。

由於變數太多，我們開始思考其中的關聯性，從大小、因倍數關係等等，最後我們決定先著手減少變數，從 k＝m 開始作考慮。

定理三：當 k＝m 時，無論 n 多少皆可達到最少人數(數量符合且排列不重複)。

證明：

(1)從表二看，總共 m×n 個格子，假設每一格就是一組的話即代表共 m×n 組。

(2)但其實每 k 組實際上才算一組，所以總共只需要 $\frac{mn}{k}$ 組，又 m＝k，故只需 $\frac{mn}{k}=\frac{kn}{k}$＝n 組員工。

(3)當 m＝k 時，照表二排法剛好排入 n 組且填滿表格，因為 n 組可分別置入 n 時段。

定理四

當 k＝m 時，若 m｜n，則須滿足

$b_1+b_{m+1}+b_{2m+1}+\cdots+b_{n-m+1}=b_2+b_{m+2}+\cdots+b_{n-m+2}=\cdots=b_m+b_{2m}+\cdots+b_n=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} b_i$ 才有最少人數解。

證明：

(1)由定義知：

$a_1+a_2+\cdots+a_m=b_1$

$a_2+a_3+\cdots+a_{m+1}=b_2$

$a_{n-m+1}+a_{n-m+2}+\cdots+a_n=b_{n-m+1}$

即 $a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+m-1}=b_i$

表八

時段	員工值班表			每時段員工量
一	5(a_1)	1(a_2)	0(a_3)	6
二	1(a_2)	0(a_3)	2(a_4)	3
三	0(a_3)	2(a_4)	0(a_5)	2
四	2(a_4)	0(a_5)	4(a_6)	6
五	0(a_5)	4(a_6)	5(a_1)	9
六	4(a_6)	5(a_1)	1(a_2)	10

表九

時段	員工值班表			每時段員工量
一	0(a_1)	1(a_2)	0(a_3)	1
二	1(a_2)	0(a_3)	2(a_4)	3
三	0(a_3)	2(a_4)	0(a_5)	2
四	2(a_4)	0(a_5)	0(a_6)	2
五	0(a_5)	0(a_6)	0(a_1)	0
六	0(a_6)	0(a_1)	1(a_2)	1

表十

時段	員工值班表			每時段員工量
一	6(a_1)	1(a_2)	0(a_3)	7
二	1(a_2)	0(a_3)	2(a_4)	3
三	0(a_3)	2(a_4)	0(a_5)	2
四	2(a_4)	0(a_5)	1(a_6)	3
五	0(a_5)	1(a_6)	6(a_1)	7
六	1(a_6)	6(a_1)	1(a_2)	8

(其中 $1 \leqq i \leqq n-m+1$，$i \in N$)

(2)每組工作經過 m 個時段(此處 m=k)，即 $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} b_i$

(3)由表一可看出，因為每組可視為連續工作經過 m 個時段，故

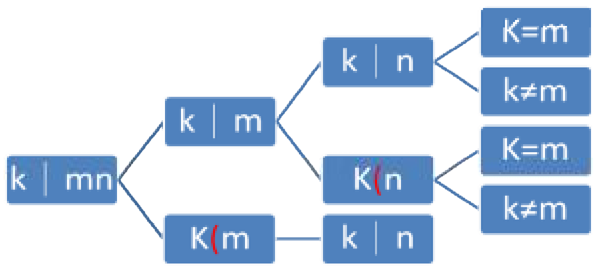
$b_1+b_{m+1}+b_{2m+1}+\cdots+b_{n-m+1}=b_2+b_{m+2}+\cdots+b_{n-m+2}=\cdots=b_m+b_{2m}+\cdots+b_n=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} b_i$

確定由表格可得到此結果，且由前述可知，可透過調整順序投入模型，故滿足這個條件的必也可填成模型，完成最少人數解。

前面的討論為 k＝m 情形，可以減少一變數，為較簡單的情況，探討完之後我們來看一下目前有的定理可以解決哪些部分，以下是用定理一推出來的架構圖，說明如下：

(1)由於 k｜mn，所以 k 必須滿足 k｜m 或 k｜n，即不會出現 K ∤ m 且 K ∤ n 的情況

(2)前面所述的 K＝m，是滿足 k｜m 之後的結果，但只能算是特例，這時只剩下 K≠m 部分需要探討



圖一

在討論完 k＝m 的情況後，我們來討論 K≠m 的情況，在舉例的過程發現定理五。先看一下這個例子(k＝3，m＝6，n＝4，表十一)很容易可以發現 a_1 到 a_4 的排列狀況在 a_5 到 a_8 重複出現了，這時想像一下實際情形，我們不會把分配到同一時段的員工分成兩組，也就是說這樣的情形在現實中不存在，會被視為只有 3 組的狀況，如右表十二。

表十一

時段	每時段員工量						每時段員工量
一	a_1	a_2	a_3	a_5	a_6	a_7	b_1
二	a_1	a_2	a_4	a_5	a_6	a_8	b_2
三	a_1	a_3	a_4	a_5	a_7	a_8	b_3
四	a_2	a_3	a_4	a_6	a_7	a_8	b_4

表十二

時段	每時段員工量			每時段員工量
一	a_1	a_2	a_3	b_1
二	a_1	a_2	a_4	b_2
三	a_1	a_3	a_4	b_3
四	a_2	a_3	a_4	b_4

定理五

不論 k 與 m 關係為何，皆可化為 k≧m 之型式，即化減後不存在 k＜m 者。

證明：

由架構圖可知，此處必滿足 k｜m，

而這時每$\dfrac{[m,n]}{k}$組會完成每時段需要 m 組而全部 n 時段的排班情況，也就是 a_1、$a_{\frac{[m,n]}{k}\text{Ï}\,1}$、$a_{\frac{2[m,n]}{k}\text{Ï}\,1}$……與$a_{\frac{[(m,n)-1][m,n]}{k}\text{Ï}\,1}$，即是$a_{\frac{q[m,n]}{k}\text{Ï}\,1}$ $(q \in N, 1 \le q \le (m,n))$可併為 a_1，a_2、$a_{\frac{[m,n]}{k}\text{Ï}\,2}$、$a_{\frac{2[m,n]}{k}\text{Ï}\,2}$……與$a_{\frac{[(m,n)-1][m,n]}{k}\text{Ï}\,2}$，即是$a_{\frac{q[m,n]}{k}\text{Ï}\,2}$ $(q \in N, 1 \le q \le (m,n))$可併為 a_2，……，a_k，$a_{\frac{[m,n]}{k}\text{Ï}\,k}$、$a_{\frac{2[m,n]}{k}\text{Ï}\,k}$……與$a_{\frac{[(m,n)-1][m,n]}{k}\text{Ï}\,k}$，即是$a_{\frac{q[m,n]}{k}\text{Ï}\,k}$ $(q \in N, 1 \le q \le (m,n))$可併為 a_k。

換句話說，只要 k＜m，m-k＞0，這時無論 m 比 k 大多少，皆可併入 a_1 到 a_k，a_{k+1}開始者在現實生活中不被視為各自不同的組。

註 1：$[m,n]$為 m、n 之最小公倍數，(m,n)為 m、n 之最大公因數
註 2：$a_{\frac{[(m,n)-1][m,n]}{k}\text{Ï}\,k}$即為$a_{mn}$ 。

很明顯可知道，如定理五可以合併，也就是在實際情形只被認為以一組員工。

這時，我們看著表格以為每一組所需負責時段剛好可以整除所有時段數，所以根本不需要去討論組別之間要怎麼排，因為不用利用分組使其重疊的方式來達到每組負責時段一樣的問題，但突然發現這個模型其實是建構在 b 為變數之情況下，當一個題目出現的時候，變數不是 b 或 n 或 k 而是只有 m，換言之，我們要去設計一個適合的排班來解決問題，可是如前面五個定理所述，要完成排班的限制條件很多，因此我們只能設計一個模型以求達最少次數解，而這個模型同時要滿足這些定理，才能達最少次數解。

參、結論

由上述的研究過程，我們發現了如果要將模型化到最簡，可以利用設置變數 m 時候設為 m=k 的手法減少變數，這樣題目中就不存在變數而是變成我們要怎麼分配 a_n 去滿足題目的敘述了，那題目的類型也從前面提過的樹狀圖分類(圖一)只會二分為是否整除 n，表示我們可以利用簡單的模型去完成各類題目。

本研究利用設立模型的手法，將排班問題具象化、表格化，並非以實例帶入討論之方式，希望將排班問題用有系統的方式呈現。

肆、參考文獻

一、王勇華(1993)，人員排班問題啟發式解法之應用，國立交通大學土木工程研究所碩士論文。
二、楊光宗(2001)，警察派出所人員排班問題之研究，國立海洋大學航運管理學系碩士論文。
三、楊迺聲(2005)，軍事院校班隊排課最佳化之研究，國立中央大學土木研究所碩士論文。