投稿類別:數學類

篇名:
貪吃蛇-方格內一筆劃方法數討論

作者:
黃韋傑。高雄市立高雄高級中學。高二 24 組

指導老師:
黃仁杰老師

壹●前言

一、研究動機

在高中數學課本第二冊講到排列組合的時候，我們學到了很多不同的計數方式，其中包括了一筆劃原理，我們學到了許多圖形一筆劃走完方法數的計數方式，但我們不禁好奇，若是像貪吃蛇一樣，在 2×N 或 3×N 的方格中，欲一筆劃走過所有格子的方法數共有幾種?我們想要了解這個問題。

二、研究目的

在 2×N 或 3×N 的方格中，自角落出發共有幾種一筆劃不重複走完所有方格的方法數?

貳●正文

一、研究過程問題簡化與解決問題的思路：

(一) 首先，我們透過窮舉的方式，觀察所有可能的路徑，試圖找出當 N 增加時，前後項是否有關連性，再逐步將其推廣。而在計算路徑時，我們盡可能用前幾步的路徑來簡單分類路徑方便計算。

二、主要問題結果與討論：

(一) 2×N 方格中，自角落出發一筆劃不重複走完所有方格的方法數討論:

首先我們先考慮 2×1~2×4 的方格，方法表列如下:

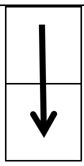
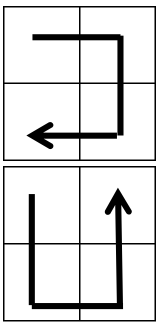
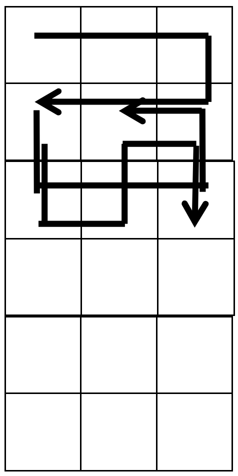
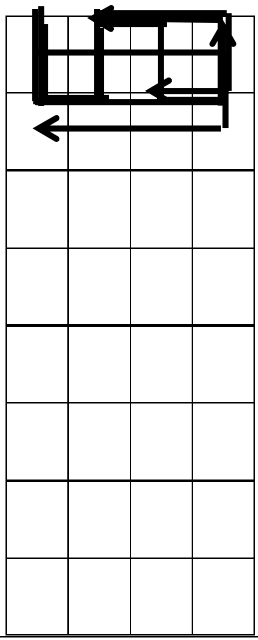
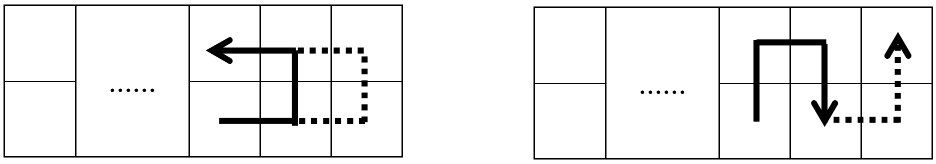
2×1	2×2	2×3	2×4
			

表 1：2×1~2×4 的方格一筆劃走法

當方格數增加時，可觀察到之間的遞迴關係：每一種走法皆在新增一欄向外延伸出一種(圖 1-a)，但唯結束在末欄者可選擇向外轉再多出一種(圖 1-b)



(a) (b)

圖 1：2*N 方格一筆劃走法之遞迴關係

依此關係，可推得：2×N 的方格恰有 n 種一筆劃走完的方法。

(二) 3×N 方格中，自角落出發一筆劃不重複走完所有方格的方法數討論:

初步觀察：

與 2×N 的情況相同，我們先由窮舉的方式，尋找當 N 漸漸增加時方法數共通的特性與分類方式，其中我們應用了數個策略：

1. 盡可能是其簡化為較少格數(3×(N-k)或 2×N 等已知方法數)之情形。
2. 在無法簡化的部分，利用排列組合的概念來計數。

3×1 至 3×3 的方法數列舉如下：

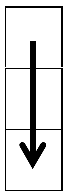
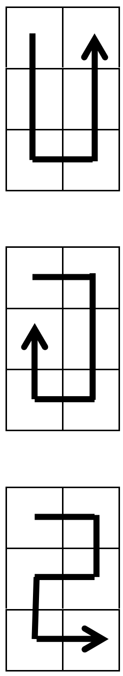
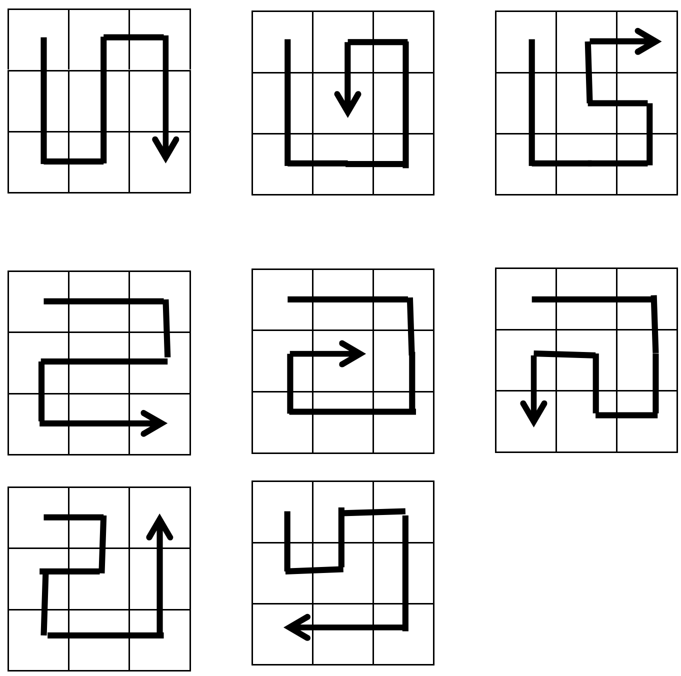
3×1	3×2	3×3
		

表 2：3×1~3×3 的方格一筆劃走法

另 3×7 的方法數部分列舉如下：

3×7

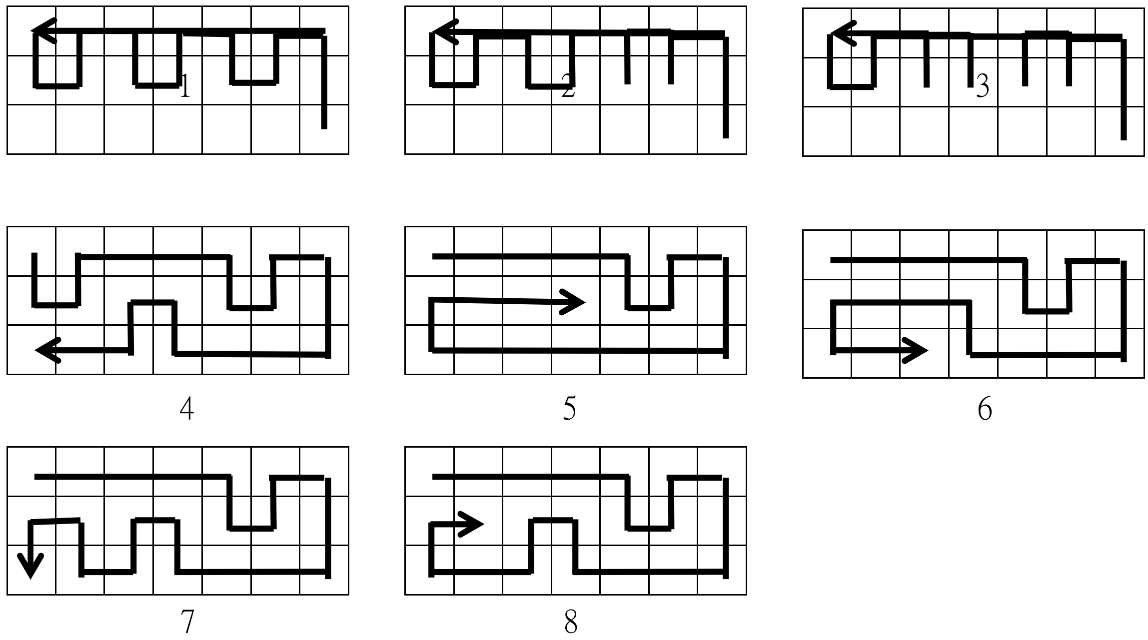


表 3：3×7 的方格一筆劃走法(部分)

我們以其前數步的方向進行探討，並應用前述之策略，描述如下：

1. 先向下 2 格：可簡化為 3×(N -1)方格之方法數。(見上表 2：3×3 中第一列與 3×2)
2. 向右 K 格後向下 1 格再向左(即向內轉)(K<N)：可簡化為 3×(N-K-1)方格之方法數。(見上表 2：3×3 中第三列第一個及 3×1)
3. 向右 N 格：可簡化為 2×N 方格之方法數。 (見上表 2：3×3 中第二列)
4. 向右 K 格後向下 1 格再向右(即向外轉)，且 N-K+1 為偶數(K<N)：此時轉彎處的右側方法數會出現一組合級數(見上表 3-1~4)，而左側則簡化為 2×K 之方法數(見上表 3-5~8)。

詳細分類：

觀察 3×N 的方格一筆劃走完方法數，可將其分類為以下數種(令 3×t 格之一筆劃走完方法數為a_t)：

1. 向下走 2 格：

完成第一欄之後，剩餘方格一筆劃走完方法數即可視為 3×(N-1)方格之方法數。

a_{N1}

總方法數：

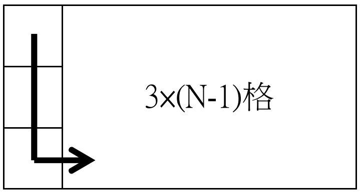


圖 2：3*N 方格一筆劃走法分類 1

2. <u>向右走 K 格後，向下 1 格後向左(1≦K≦(N-2))</u>：

   此情況下，向右轉後便必須將此 3×K 格內之所有格子走完(一種方法)，再走後方 3×(N－K)格。

   總方法數：

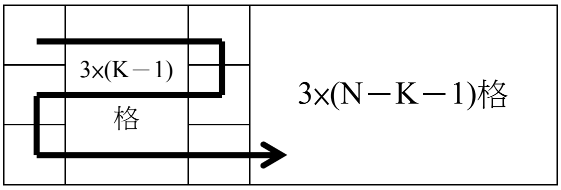


圖 3：3*N 方格一筆劃走法分類 2

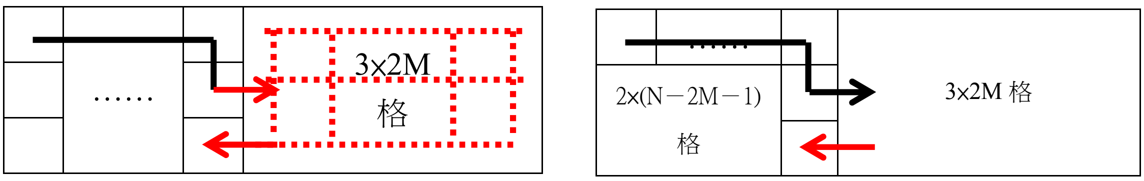
3. <u>向右走至剩 2M 格後，向下 1 格後向右(1≦M≦(N－1)/2)</u>：

   此部分的一筆劃走法可視為兩個步驟：

   (1) 完成右方 3×2M 的方法數(圖 4-a)

   (2) 完成下方 2×(N－2M－1)的方法數(圖 4-b)

   ※此處使用 2M 是因為左方必須剩餘偶數格，否則無法完成一筆劃。



(a) (b)

圖 4：3*N 方格一筆劃走法分類 3

(1) 此處的 3×2M 格因限制了起點/終點，故無法直接套用前項。而可將此問題視為<u>外圍的線凸出去填補內部(2M－2)格，每次填補兩格，又可由上面或下面填補(圖 5)</u>，則方法數可用組合表示。若上方補 2 格，下方補(2M－4)格，則方法數為；若上方補 4 格，下方補(2M－6)格，則方法數為，以此類推。

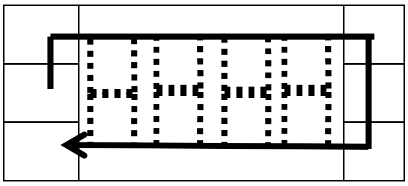


圖 5：3*N 方格一筆劃走法分類 3-(1)想法

方法數：

$$C_0 \quad C \qquad + C_1 \quad C \qquad + C_2 \quad C \qquad \cdots\cdots + C \qquad = \sum_{t=0}^{M-1} C_t^{M-1} = 2^{M-1}$$

(2) 左側的 2×(N－2M－1)方格即利用已知的結果，方法數為 N－2M－1。
根據乘法原理，總方法數為此兩步驟相乘。
總方法數：

4. <u>向右走 N 格</u>：
完成第一列後，下方便可視為一 2xN 之方格。(圖 6)
總方法數：

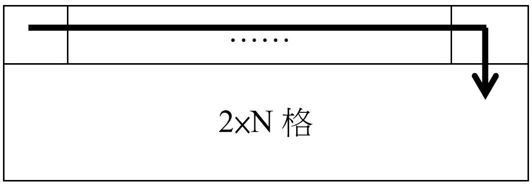


圖 6：3*N 方格一筆劃走法分類 4

綜上所述，可得：

試解其一般項a_N：

兩式相減，此時分 N 為奇數偶數討論：

1. 當$\mathbf{N \in 2k(k \in N)}$：

2. 當$\mathbf{N \in 2k+1(k \in N)}$：

導出一般項：

1. 當$\mathbf{N \in 2k(k \in N)}$：

   為使係數消去，乘一 2 的次方：

   $\times 2^1$

   $\times 2^2$

   得：

2. 當$\mathbf{N \in 2k+1 (k \in N)}$：

為使係數消去，乘一 2 的次方：

×

×

$N|6$

×

$N|5$

×

得：

參●結論

一、2xN 的方格恰有 N 種一筆劃走完的方法。

二、3xN 的方格一筆劃走完的方法數如下：

$$a_1 = 1\ a_2 = 3\ a_3 = 8$$

肆●參考資料

[1]初等代數研究:左銋如、季素月、朱家生、陳鼎。臺北市：九章出版社
[2]高中數學競賽教程:嚴鎮軍。臺北市：九章出版社
[3]離散數學初步:林福來。臺北市：九章出版社
[4]數學奧林匹亞小叢書高中卷-圖論:熊斌,郑仲义。上海市：華東師範大學出版社