投稿類別：數學類

篇名: 硬幣翻轉問題討論

作者：
尤子瑄。市立高雄中學。高二 24 組
王宣淳。市立高雄中學。高二 24 組

指導老師：
黃仁杰老師

壹、前言

傳統的翻幣問題是給予一排硬幣有正面向上有反面向上的題目，指定一數作為固定每次翻動量，試圖求最少翻動次數及方法，而這類傳統問題已盡數研究完畢，本研究就翻動量呈現為等比數列企圖將硬幣問題更上層樓，並以函數作系統化的討論，不以歸納法做直接翻動之探討，並且最後希望做出標準解題流程以及所有類型之探討分析。以下為研究目的：

一，定義符號及硬幣翻轉函數模型，進行理論探討與研究
二，翻動量呈現為等比數列時，研究翻轉問題的最少次數及其翻轉步驟

貳、正文

一、定義符號及硬幣翻轉函數模型，進行理論探討與研究

（一） 符號定義

1. 為了方便紀錄我們將反面朝上的硬幣記為”反”，正面朝上的硬幣記為”正”。
2. 在等差數列翻的情況中，所有的硬幣個數稱為 a，一開始”反”的硬幣個數稱為 m，而第一次翻動的硬幣個數稱為 a_1，第二次翻動的硬幣個數稱為 a_2，以此類推，第 n 次翻動硬幣的個數稱為 a_n，並且將等比數列翻的公比稱為 r。b_n 為 N_n(反,正)
3. 以 N_n(反)、N_n(正)分別表示翻第 n 次後反和正的個數；
N_n(反,正)、N_n(正,反)分別表示翻第 n 次時，反翻成正的個數和正翻成反的個數，即 N_n(反)＝N_{n-1}(反)－N_n(反,正)＋N_n(正,反)；若存在 k，N_K(反)＝0，則可將全部硬幣翻成正面，即可以翻成功；
若對所有的 n 而言，N_n(反≠0)，則永遠無法將全部硬幣翻成正面。
4. 符號「H」即是翻動上一次翻完後的反減去上一部翻動量所得另一半的反，即 N_n(反,正)＝{N_{n-1}(反)－(a_{n+1}-a_n)}÷2
5. 符號「$\mathbf{R^n}$」。我們考慮到有時會重覆某個操作，所以決定若重複操作 n 次 R 則記為$\mathbf{R^n}$ 。
6. 符號「S」。有時須結合數個操作，我們按照翻動的先後順序從左到右寫出代表操作的符號，且我們定義了一個符號 S，使 S 為最少次數內所有動作的結合，例如 $S=RY^3HR$。

以上為運算符號及翻轉符號，分別在計算數量與表示翻轉硬幣步驟時使用，接著我們定義了函數模型，企圖使思考方式及證明的推導，進行一般化的動作。

（二）　函數模型定義及性質討論

為了使一連串的翻轉動作的硬幣數量計算簡便與大量分析，我們將加法的運算透過函數本身的性質變成了乘法。

> 定理一：令 $f(x)=\{-1，x\in 2n+1，n\in \{N,0\}; 1，x\in 2n，n\in \{N,0\}\}$，則
> (1) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$
> (2) $f(-x)=f(x)$

證明：

(1) 討論：若 $x+y=2n+1$，則 $f(x)\cdot f(y)=1\cdot(-1)$ or $(-1)\cdot 1=-1=f(x+y)$；若 $x+y=2n$，則 $f(x)\cdot f(y)= 1\cdot 1$ or $(-1)\cdot(-1)=1=f(x+y)$。故 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$得證。

(2) $f(0)=f(x+(-x))= f(x)\cdot f(-x)=1$，故 $f(x)=f(-x)=\pm1$

二、研究過程

本研究採逆推之思考方式以便一般化全部情況，即是從全部為正的盤面開始翻第一步、第二步...可翻出的數量，也就是回到正題，此題目可由有正有反的硬幣翻面翻成全部為正的盤面，而以下的定理是由題目逐步分析，m 是題目的反面硬幣初始設定。

> 引理一：當 $f(m)=-1$ 時，若 $f(a)=f(r)=1$，則翻轉必不成功。

證明：逆推後令第 k 步翻動 b_k 個及 n 步翻完

$$f(a_1+b_2-(a_2-b_2)+\ldots+b_k-(a_k-b_k)+\ldots+b_n-(a_n-b_n))=f(a_1-\sum_{k=1}^{n}a_k+2\sum_{k=1}^{n}b_k)$$

代入定理一，得 $f(a_1)\cdot f(\sum_{k=2}^{n}a_k)\cdot f(\sum_{k=1}^{n}b_k)=1\neq f(m)= -1$

接著我們利用上述函數之性質證明出翻轉成功的基本條件，拿到題目的當下總是要先判斷是否會翻成功，討論如下 ：

引理二：若 n 次可翻成功，則 $f(S_n)$必等於 $f(m)$ 。

證明：$f(a_1+b_2-(a_2-b_2)+\ldots+b_k-(a_k-b_k)+\ldots+b_n-(a_n-b_n))= f(a_1)\cdot f(\sum_{k=2}^{n} a_k)\cdot f(\sum_{k=1}^{n} b_k)$
$=f(a_1)\cdot f(S_n- a_1)\cdot 1= f(S_n)$

而在討論 m 的條件範圍時，我們需要設定出 m 的上下限，n 次最多能翻出 S_n 個反面是無庸置疑的，因此上限已經找到即為 S_n，而下限我們計算出是本次翻動量扣掉上一次翻動後盤面上最多的反面量，即 a_n-S_{n-1}，在此比較 a_n-S_{n-1} 與 S_{n-1} 之大小。

引理三 :當 r>3，翻動 n 次與(n-1)次後可翻出的反面數量範圍不重疊，即 $a_n-S_{n-1}>S_{n-1}$。

證明 ：

以累積翻動 n 次可翻出之下限減去累積翻動(n-1)次之上限，可得

$(a_n-S_{n-1})-S_{n-1}=a_n-2S_{n-1}$
$=ar^{n-1}-[2a(1-r^{n-1})]/(1-r)$
$=\{a[r^{n-1}(3-r)-2]\}/(1-r) =Q$

討論:

(1) r=1，意即每次翻動量都一樣，則累積翻動 n 次的最大值 na，
最小值則為 0
(2)r=2，則累積翻動 n 次的最大值 S_n，Q>0 最小值則為 a_n-S_{n-1} 但小於 S_{n-1}
(3)r=3，則累積翻動 n 次的最大值 S_n，Q<0 最小值則為 a_n-S_{n-1} 大於 S_{n-1}
(4) r>3，則累積翻動 n 次的最大值 S_n，Q<0 最小值則為 a_n-S_{n-1} 大於 S_{n-1}

由引理三我們可以知道，r>2 時皆滿足範圍不重疊，以下就 r=2 做特例探討 ：
將 r=2 代入 $a_n-S_{n-1}=ar^{n-1}- a(1-r^{n-1})/(1-r)=[a(2r^{n-1}-r^n-1)]/(1-r)=a$，可知當 r=2 時，累積翻動 n 次則可翻出的反面個數最小值=a，故唯獨 r=2 時的 n 的找尋方法為 $S_{n-1}<m\leq S_n$。

定理二：若 $a_n-S_{n-1} \leq m \leq S_n$ 但 $f(m)\neq f(S_n)$則無解，$f(m)\neq f(S_n)$則可成功。

證明：

(1) 令盤上有 N_{n-1} 個反，此次翻動量= a_k，則可翻出 N_n(反)= $N_{n-1}-b_k+(a_k \cdot b_k)$ ，
若 $b_k'= b_k+1$，則 N_n (反)= $N_{n-1}+ a_k-2b_k-2$，
故可翻出之反面數量可視為公差為 2 之等差數列

(2)n 步可翻出 $a_1+ a_2\ldots+a_n= S_n$，故取 m 之範圍條件 $a_k- S_{n-1} \le m \le S_n$

前面是說明最基礎的問題，從基本條件，即是從能不能翻成功開始討論，而以下我們就可以翻成功的情況整理出兩種類型，其翻轉步驟與最少次數如下。

而我們的思考模式仍是由全部為正的盤面開始去做可翻出的硬幣數量討論，並且透過證明確認翻轉步驟的正確性與一般性，其中，我們是先從 m 值的計算去討論 m 的區間及其所對的最少次數，而後再以計算即函數驗證翻轉步驟。

然而，研究遊戲的最小翻動法往往翻法不只一種可使用，但我們僅以 Y，H，R，這三種翻轉動作套用於全部的類型，且為最少次數。

定理三：當 $f(m)=f(S_n)$，若 $S_{n-2}+(a_n- a_{n-1}) \le m \le S_n$ ，則最少次數為 n 次，翻轉步驟 $R^{n-1}HR$

證明：

(1) 當 H 取 N_{n-1}(反,正)=$N-(a_n- a_{n-1})=0$ ，則可翻 $m= S_{n-2}+(a_n+ a_{n-1})$，
因為 N_{n-2}(反)= $a_{n-1}+ a_{n-2}$，
經 H 則 N_{n-1}(反)= $a_{n-1}+ a_{n-2}-\{N-(a_n+ a_{n-1})\}\div 2+ a_{n-1}-\{N-(a_n+ a_{n-1})\}\div 2=a_n$，
再經 R 則 N_n(反)= $a_n- a_n=0$

(2) 現在探討 H 步驟是否可行，
$f(N-(a_n- a_{n-1}))=f(m-S_{n-2}-(a_n- a_{n-1}))=f(m-(S_{n-2}- a_n +a_{n-1}))=f(m-S_n)=f(m) \bullet f(S_n)$
由引理二可知，要翻成功之必要條件為 $f(m) \bullet f(S_n)=1$，
故 $f(N-(a_n- a_{n-1}))= f(m) \bullet f(S_n)=1$，H 動作必然可行。

(3) N_{n-1}(反,正)=$N-(a_n- a_{n-1})= a_{n-1}$，則 N_{n-2}(反)= $a_n+ a_{n-1}$，
經 H 則 N_{n-1}(反)= $a_n+ a_{n-1}-\{N-(a_n+ a_{n-1})\}\div 2+ a_{n-1}-\{N-(a_n+ a_{n-1})\}\div 2=a_n$，
再經 R 則 $a_n- a_n=0$

(4) 如定理二，可知 R^{n-2} 為 N_{n-2}(反)=S_{n-2}，故可翻出 $S_{n-2}+(a_n-a_{n-1})$、$S_{n-2}+(a_n-a_{n-1})+2\ldots S_{n-1}$
得證

定理四：當 $r \geqq 3$ 時，若 $f(m)=f(S_n)$ 且 $a_n-S_{n-1} \leq m \leq S_{n-2}+(a_n-a_{n-1})$，則最少次數為 n 次，翻轉步驟 $S=Y^{n-2}HR$；
當 $r<3$ 時，若 $f(m)=f(S_n)$ 且 $S_{n-1} < m < S_{n-2}+(a_n-a_{n-1})$，則最少次數為 n 次，翻轉步驟 $S=Y^{n-2}HR$

證明：

(1)精簡後為 N_{n-2}(反)$=m+S_{n-1}$ 則取 H 為 N_{n-1}(反,正)$=\{m+S_{n-1}-(a_n-a_{n-1})\}\div 2=a_n$，再經 R 則 $a_n-a_n=0$ 得證

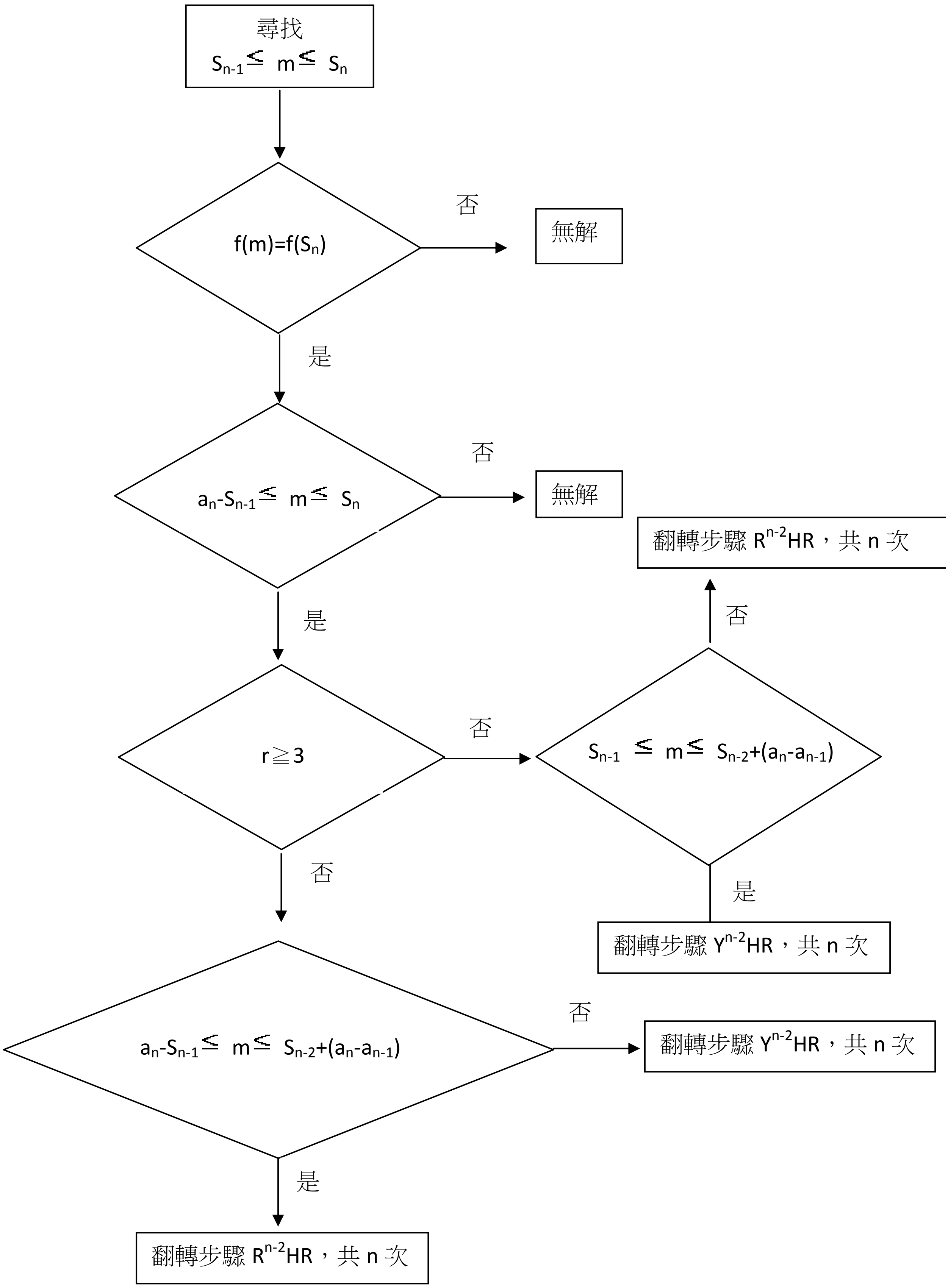
(2)現在探討 H 步驟是否可行，

$f(N-(a_n-a_{n-1}))=f(m+S_{n-2}-(a_n-a_{n-1}))=f(m+(S_{n-2}-a_n+a_{n-1}))=f(m+S_n)=f(m)\bullet f(S_n)$

由引理二可知，要翻成功之必要條件為 $f(m)\bullet f(S_n)=1$，

故 $f(N-(a_n-a_{n-1}))=f(m)\bullet f(S_n)=1$，H 動作必然可行

参、結論


尋找
$S_{n-1} \leq m \leq S_n$
$f(m)=f(S_n)$
否
無解
是
$a_n - S_{n-1} \leq m \leq S_n$
否
無解
是
$r \geqq 3$
否
$S_{n-1} \leq m \leq S_{n-2}+(a_n-a_{n-1})$
否
翻轉步驟 $R^{n-2}HR$，共 n 次
是
翻轉步驟 $Y^{n-2}HR$，共 n 次
否
$a_n - S_{n-1} \leq m \leq S_{n-2}+(a_n-a_{n-1})$
否
翻轉步驟 $Y^{n-2}HR$，共 n 次
是
翻轉步驟 $R^{n-2}HR$，共 n 次

肆、參考資料

一、http://www.tyc.edu.tw/files/CD/science/47/AutoPlay/Docs/B5/B5004.pdf
二、http://wenku.baidu.com/view/208111e9e009581b6bd9ebcf.html
三、http://mathforum.org/library/drmath/sets/select/dm_coin_tossing.html