投稿類別:數學科

篇名：

表面張力與最短路徑問題

作者：

王奕誠。高雄中學。高二 24 班

指導老師：

黃仁杰老師

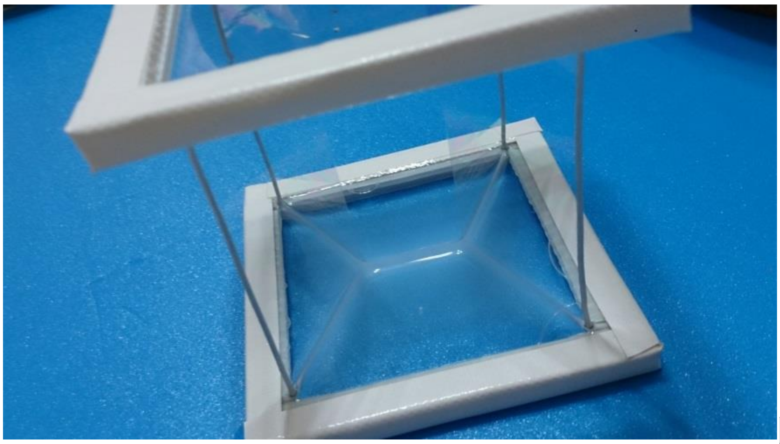
壹●前言

自然界中存在著許多的最小現象，像是費馬原理所闡述著的光的路徑必使其花費時間最短。某次數學課教到三角函數時，老師為我們補充了一個問題，即三角形的費馬點求法，也就是最小路徑問題。而當物理教到表面張力時，突然想到這在某方面不失為模擬最小路徑問題的一個方法，因此便於課後搜尋相關文獻，發現有許多相關研究。對此問題感到興趣的我，便開始了多邊形最小路徑問題的研究。

貳●研究過程

從表面張力之巨觀作用來分析最小路徑問題：

考慮一模型如圖(一)，將此模型放入肥皂水，拉出觀察其上的膜的形狀，可發現最穩定(位能最小)的圖形如下(即使受到微擾仍不改變其結構)。


圖(一)

觀察底面，可見的確是在對稱的情況下可使得位能最小，即總表面積最小。因為我們取兩面平行，也就是上下垂直距離相等，因此有以下關係式：

$$總表面積 = (一面之總路徑和) \times (垂直距離) \times 2$$

因此此模型在某些程度上是可作為最小路徑問題之實際情況模擬。

而至於為何對稱(各邊夾角$120°$)，可由以下力之分析說明：

令表面張力為 $\boldsymbol{\gamma}$，頂面及底面之垂直距離為 H，則內聚力之巨觀作用力為：

$$F = \gamma \times (2H) \times cos\,90°，為一定值。$$

而從其肥皂膜之收縮過程中的觀察可知，對於每個節點應有三條線段通過之。又根據拉密定律：「在達靜力平衡的時候，即三共點力的合力為零之情況下，每個力與其相對角的正弦值之比值均相等。」因此我們得出以下結論：

在正方形中，對於其中生成的兩個節點所分別連結的三條線段，均有任兩線段之夾角為$120°$。

不過從以上對於表面張力之巨觀作用的分析知，上述之結論和其圖形並無相關，也就是無論在何種情況，均有以下結論：

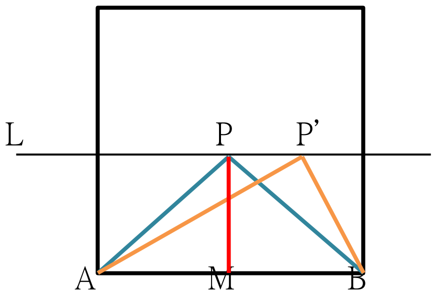
在所有可作為最小路徑問題模擬的模型中，對於其中所生成的任一節點而言，其連結的三條線段均有任兩線段之夾角為$120°$的現象。

接下來我們將利用數學來探討論證此一問題。

首先先來探討正方形的情況：

如前所述，我們知道實際上能使得正方形的路徑和有最小值的圖形，並非我們直觀上所認為的兩條對角線的交點能滿足之，而是在有兩個節點的情況下會有路徑和為最小的情況。因此我們現在在已知有兩個節點會達到最小路徑和的前提下來證明為何是在圖形對稱的情形滿足之。

考慮一正方形如圖所示：
分析其中一邊 $\overline{AB}$，假設其中點 M，
對於所有動點 P’ 在距離 $\overline{AB}$為定值之線段 L 上，
有當 P’ 對 $\overline{AB}$之投影點恰為 M 點時，
$\overline{P'A}+\overline{P'B}$有最小值的現象。



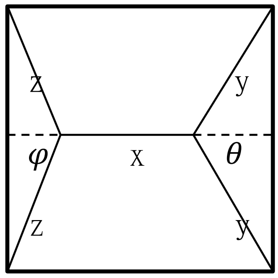
其證明如下：

在距離線段 L 為 $\overline{PM}$處，構造一條線段 L’。對於直線 L 做點 B 的對稱點 B’，可易見當動點 P’ 恰為 P 點時，點 A、P、B’ 共線。利用三角形第三邊小於兩邊之和可知以上結論正確。

結論：

當正方形上下對稱時，才能使得總路徑和有最小值。

考慮正四邊形之圖形(如右)上下對稱的情況：



$$\begin{cases} 2y\sin\theta = 2z\sin\varphi = l \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x + y\cos\theta + z\cos\varphi = l \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases} ,$$

所求：$x+2y+2z$ 的最小值。

證明：

(1)代入(2)得：$x + l\frac{cot\,\theta}{2} + l\frac{cot\,\varphi}{2} = l$，又由(1)知 $y = \frac{l}{2\,sin\,\theta}$，$z = \frac{l}{2\,sin\,\varphi}$，得

$$x + 2y + 2z = l - l\frac{\cot\theta}{2} - l\frac{\cot\varphi}{2} + l\frac{1}{\sin\theta} + l\frac{1}{\sin\varphi} = l + l\frac{2-\cos\theta}{2\sin\theta} + l\frac{2-\cos\varphi}{2\sin\varphi}$$

找 $min(x+2y+2z)$即等價於找 $min\left(\frac{2-cos\,\theta}{2sin\,\theta} + \frac{2-cos\,\varphi}{2sin\,\varphi}\right)$

令 $\frac{2-cos\,\theta}{sin\,\theta} = k$，$\frac{2-\sqrt{1-sin^2\theta}}{\sqrt{sin^2\theta}} = k$，$k\sqrt{sin^2\theta} + \sqrt{1-sin^2\theta} = 2$

由柯西不等式得：

$$\left[\left(\sqrt{sin^2\theta}\right)^2 + \left(\sqrt{1-sin^2\theta}\right)^2\right](k^2+1^2) \geq \left(k\sqrt{sin^2\theta} + \sqrt{1-sin^2\theta}\right)^2$$

$1 \times (k^2+1) \geq 2^2 = 4$，因此有 $k^2 \geq 3$，即 $k \leq -\sqrt{3}$ 或 $k \geq \sqrt{3}$

取 $k \geq \sqrt{3}$，等號成立於 $\frac{|sin\,\theta|}{\sqrt{3}} = \frac{|cos\,\theta|}{1}$，又因為 $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

得 $\theta = \frac{\pi}{3}$時 $\frac{2-cos\,\theta}{sin\,\theta}$有最小值$\sqrt{3}$。同理知 $\varphi = \frac{\pi}{3}$時 $\frac{2-cos\,\varphi}{sin\,\varphi}$有最小值$\sqrt{3}$。

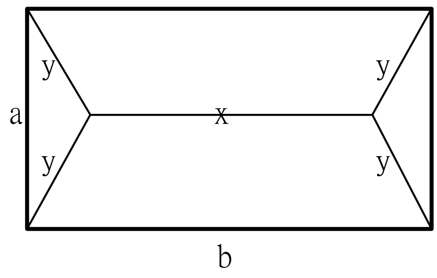
故 $min\left(\frac{2-cos\,\theta}{2sin\,\theta} + \frac{2-cos\,\varphi}{2sin\,\varphi}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$，即$min(x+2y+2z) = l(1+\sqrt{3})$

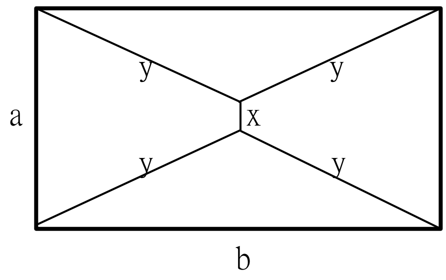
因此我們得到以下結論：

當正方形上下左右分別對稱，且每條線段之交角均為$120°$時，總線段和有最小值 $l(1+\sqrt{3})$。

從上分析知其結論不一定在正方形時才可成立，在長方形時亦有同一結論。不過由於長方形有兩種畫法，因此接著來討論長方形的情況。

長方形的兩種畫法：





考慮 $a < b$，討論以短邊(a)或長邊(b)構造之總路徑和何者最小。
同正方形的分析知，在上下左右對稱的情況來進行討論：

以短邊(a)為主：

$\begin{cases} x + 2y\cos\theta = b \\ 2y\sin\theta = a \end{cases}$，整理得 $\begin{cases} x = b - a\dfrac{cos\,\theta}{sin\,\theta} \\ y = \dfrac{a}{2sin\,\theta} \end{cases}$，即有 $x + 4y = b + a\dfrac{2-cos\,\theta}{sin\,\theta}$

求 $min(x+4y)$等價於求 $min\left(\dfrac{2-cos\,\theta}{sin\,\theta}\right)$，由前述的分析知 $min\left(\dfrac{2-cos\,\theta}{sin\,\theta}\right)$為$\sqrt{3}$，故我們得以短邊(a)為主構造的最小路徑和為 $b+\sqrt{3}a$。

以長邊(b)為主：
同上，得以長邊(b)為主構造的最小路徑和為 $a+\sqrt{3}b$。

由假設 $a < b$我們知道 $a+\sqrt{3}b > b+\sqrt{3}a$，因此有以下結論：

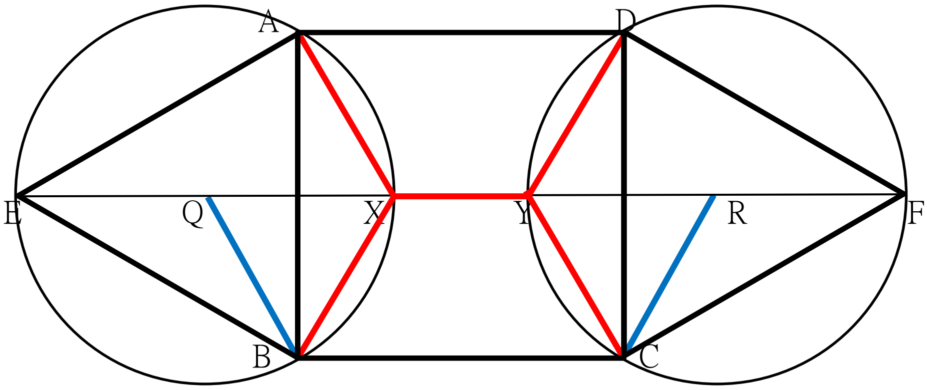
在長方形中，以短邊為主構造的最小路徑和比以長邊為主的最小路徑和還要小，即在長方形中以短邊為主才能構造出最小路徑和。

在以上分析中我們可見到在正方形和長方形中，其最小路徑對於每個交點及連線均滿足兩兩之夾角均為$120°$，也因此我們可以利用類似想法來進行較為一般化的解法(仿造三角形費馬點的找法)。

在三角形中我們透過以某一邊長作正三角形，連不與原三角形共用點之正三角形的另一頂點以及原三角形不共用的點，則該段連線長即為最短路徑長。且若我們對於該正三角形作出其外接圓，和上述該線段的交點正是費馬點。

從正方形以及長方形尋找最短路徑的找法正如上所述。特別的是其最短路徑圖形(斯坦納樹)之每一連線段的夾角均為$120°$，將之與三角形的找法作連結不難想像其較為一般化的解法應如下所描述。

正方形斯坦納樹找法：



作圖：(1)以 AB、CD 為邊長向外作兩個正三角形ΔABE、ΔCDF。

(2)作ΔABE、ΔCDF的外接圓。

(3)連接 E、F 交兩外接圓於 X、Y 兩點(此兩即為斯坦那點)。

(4)連接 AX、BX、XY、CY、DY，圖形即為正方形斯坦納樹。

接著證明此圖為最小：

如上圖，在 EF 上做點 Q、R 使得ΔBQX、ΔABE、ΔCRY、ΔCDF均為正三角形。

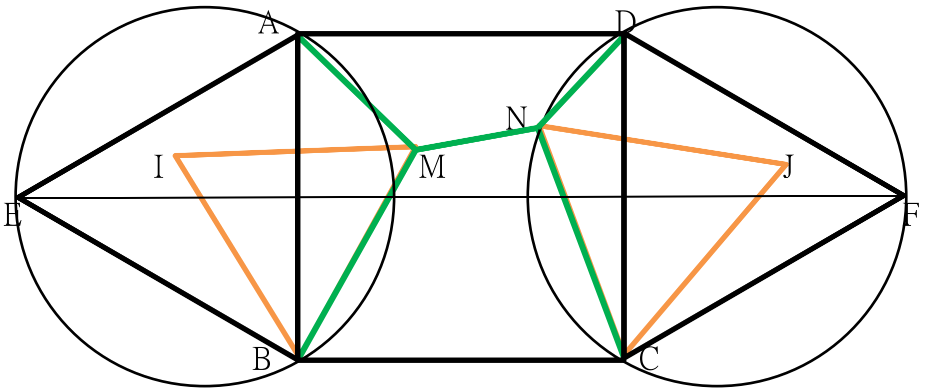
在ΔAXB、ΔEQB中，$AB = EB(\Delta ABE$ 為正三角形$)$，$\angle ABX = \angle EBQ$，

$QB = XB(\Delta BQX$、ΔABE 均為正三角形$)$，因此$\Delta AXB \cong \Delta EQB$。

得知$AX = EQ$，$XB = QB = QX$。

同理可知$\Delta DYC \cong \Delta FRC$，可得$DY = FR$，$YC = RC = RY$。

$\therefore AX + BX + XY + CY + DY = EQ + QX + XY + YR + RF = EF$。



如上圖，考慮在正方形內兩點M、N$(M \neq X$，$N \neq Y)$。

以 MB 當邊長做ΔMBI為正三角形，以 NC 當邊長做ΔNCJ為正三角形。

同上證明可得$\Delta AMB \cong \Delta EIB$，可得$AM = EI$，$MB = IB = IM$。

同理亦可得$\Delta DNC \cong \Delta FJC$，可得$DN = FJ$，$NC = JC = JN$。

$\therefore AM + BM + MN + CN + DN = EI + IM + MN + NJ + JF > EF$(顯然)。

若運用此法，前述之長方形的情況便可以較簡單的去比較何種做法才是最小路徑(斯坦納樹)。但此法和先前所用的比較一樣無法將其推廣，因為在處理一般不規則四邊形時，無論哪種方法都一樣必須要經過討論、比較才能得出。

本文之重點在於利用另一種方式來求得正方形以及長方形的斯坦納樹，並將之與現有之方式做連結使得原先的構造模式並不會令人感到突兀。

参●結論

一、在所有可作為最小路徑問題模擬的模型中，對於其中所生成的任一節點而言，其連結的三條線段均有任兩線段之夾角為120°的現象(即 Plateau's laws)

二、當正方形上下左右分別對稱，且每條線段之交角均為120°時，總線段和有最小值 $l(1+\sqrt{3})$。

三、在長方形中，以短邊為主構造的最小路徑和比以長邊為主的最小路徑和還要小，即在長方形中以短邊為主才能構造出最小路徑和。

四、(Plateau's laws)

(1) 肥皂膜是由完全光滑的表面組成。

(2) 肥皂膜的任一部分的平均曲率在同一片膜上的每一點上都是常數。

(3) 肥皂膜表面的交界一定是由三個表面相接構成的曲線，稱為「普拉托邊界」，交界處兩兩表面形成的平面交角都是120°。

(4) 普拉托邊界之間相交一定是由四條邊界相交構成一個交點，在交點處，四個邊界線兩兩之間的交角都相同，等於$\cos^{-1}\frac{1}{3}\approx 109.47°$，如同正四面體的中心與四個頂點連接的連線兩兩之間所構成的交角一樣。

肆●引註資料

一、維基百科。普拉托定律。
http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%99%AE%E6%8B%89%E6%89%98%E5%AE%9A%E5%BE%8B

二、維基百科。Minimal surface。
http://en.wikipedia.org/wiki/Minimal_surface

三、中華民國第四十六屆中小學科學展覽會作品。史坦納樹。
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/senior/0404/040405.pdf
四、2013 臺灣國際科學展覽會優勝作品專輯物理與太空科學科。
變形泡膜-傾角對柱體面轉變影響與椎體面膜探討。
http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2013/pdf/140012.pdf