篇名：

挑剔數列問題討論

作者：

王姿云。高雄中學。高二 24 班

指導老師：

黃仁杰老師

壹、研究動機

某日偶然發覺這個神奇的數列，於是基於好奇心，開始與同學探討相關內容及問題，甚而更加深入的研究，益發覺得有其鑽研之處，因此，我們將以熱忱推導它的證明及找出能排出 2n 位的挑剔數列的排法。

貳、挑剔數列之定義

有一種特別的數列，這種數列是由 1~7 等數字組成，其中每個數字都重複使用兩次，在總共 14 格的格子裡排列，而且要符合 1 與 1 之間有 1 個數、2 與 2 之間有 2 個數字、……、6 與 6 之間有 6 個數字、7 與 7 之間有 7 個數字。

例：2 3 7 2 6 3 5 1 4 1 7 6 5 4

依據此種排列規則也找出 1~3 組成的數列 312132、1~4 組成得數列 41312432，將此數列改成由 1~n 所組成的 2n 位數列，並討論此 2n 位數列的各種特性。

2 3 7 2 6 3 5 1 4 1 7 6 5 4

在十四個空格中填入十四個數字，這十四個數字是從 1 到 7 的整數且每個數都重複一遍，也就是 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7 等十四個數字，填入時必須遵守 1 跟 1 之間有一個數、2 跟 2 之間有兩個數、3 跟 3 之間有三個數… 7 跟 7 之間要有七個數，必須將十四個數字填入且符合上敘條件。

延伸此數列到 2n 個空格，總共填入數字 1~n 各兩次，其中 1 和 1 中間要隔一個數字，2 和 2 中間要隔兩個數字，以此類推，n 和 n 中間要隔 n 個數字，符合以上條件的數列我們就稱之為挑剔數列。

舉例(n=3) 舉例(n=4)

挑剔數列： 3 1 2 1 3 2 4 1 3 1 2 4 3 2

參、研究目的

一、 證明 n=4k+1 和 4k+2(k 為非負整數)時不存在挑剔數列。

二、 找出一種排法能排出 2n 位的挑剔數列。

三、 證明此排法並反推 n=4k 和 4k+3 時一定有挑剔數列存在。

肆、研究方法

一、證明 n 之值為多少時挑剔數列不存在。

(一) 經過觀察，n=4k+1 or 4k+2 時挑剔數列皆不存在。

(二) 證明 n=4k+1 or 4k+2 時挑剔數列不存在。

方法 1

※『序數』之定義：

此挑剔數列從左邊開始數來，第一位之序數=1，第二位之序數=2，依序遞增，至第 2n 位時序數=2n。

※挑剔數列中數字與序數之對應關係：

每個數字都要填兩次，所以一個數字會對應到兩個序數，設一數字為 r，則數字 r 中序數較小的序數表示為Ａr，序數較大的 r 則因為兩個 r 之間相距 r 格所以序數表示為Ａr+(r+1)，如下圖所示

證明：

一個需填入 1~n 各兩次的挑剔數列，其序數和為 $1+2+3+4+\cdots+2n=2n^2+n$ —?

且 當 r＝１時，兩個１分別對應序數Ａ$_1$、Ａ$_1$+(１+１)

當 r＝２時，兩個２分別對應序數Ａ$_2$、Ａ$_2$+(２+１)

當 r＝３時，兩個３分別對應序數Ａ$_3$、Ａ$_3$+(３+１)

、

、

、

當 r＝ｎ時，兩個ｎ分別對應序數Ａn、Ａn+(n+１)

數字 1~n 分別對應了所有的序數，所以序數和也可表示為

Ａ$_1$+Ａ$_1$+(1+1)+Ａ$_2$+Ａ$_2$+(2+1)+⋯ +Ａr+Ａr+(r+１) —?

? ? =?

? $4n^2+2n=4$ (Ａ$_1$+Ａ$_2$+⋯ +Ａr)$+n^2+3n$ => n(3n-1)=4 (Ａ$_1$+Ａ$_2$+⋯ +Ａn)

得 n(3n-1)必為 4 的倍數，且 n 有四種情況 n=4k n=4k+1 , n=4k+2 , n=4k+3

分別代入 n(3n-1)，當 n=4k+1 or 4k+2 分別代入 n(3n-1)後，n(3n-1)並不是 4 的倍數，故得證： 當 n=4k+1 or 4k+2 時，挑剔數列不存在。

方法 2

設 n=4k+1

一個使用數字 1~4k+1(k 為非負整數)各兩次的挑剔數列是由 2k 個偶數和 2k+1 個奇數各填兩次所成，共 8k+2 格，將空格由左而右編號為 1~8k+2，則其中編號為奇數的有 4k+1 格，編號為偶數的有 4k+1 格，任一偶數填入的位置為 a(設編號為奇數)，則此偶數的第二次填入為 a(奇數)+數字本身(偶數)+1，則為偶數，所以全部的偶數填入後會用掉 2k 個編號為奇數和 2k 個編號為偶數的格子，此時偶數格和奇數格都剩 2k+1 個。

（間隔 r 位）3

任一奇數填入的位置為 b(設編號為奇數)，則此奇數的第二次填入為 b(奇數)+數字本身(奇數)+1，則為奇數，表示全部的奇數填入時會用掉 2p 個編號為奇數的格子或 2q 個編號為偶數個格子(p+q=2k+1)，今奇數格和偶數格都剩下 2k+1(奇數)格，所以全部的奇數無法完全填入，得證 n=4k+1 無法排出挑剔數列。

設 n=4k+2

一個使用數字 1~4k+2(k 為非負整數)各兩次的挑剔數列是由 2k+1 個偶數和 2k+1 個奇數各填兩次所成，共 8k+4 格，將空格由左而右編號為 1~8k+4，則其中編號為奇數的有 4k+2 格，編號為偶數的有 4k+2 格，因為全部的偶數填入後會用掉 2k+1 個編號為奇數和 2k+1 個編號為偶數的格子，所以偶數格和奇數格

都剩 2k+1 個。
全部的奇數填入時會用掉 2p 個編號爲奇數的格子或 2q 個編號爲偶數個格子(p+q=2k+1)，今奇數格和偶數格都剩下 2k+1(奇數)格，所以全部的奇數無法完全填入，得證 n=4k+2 無法排出挑剔數列。

二、找出一排法能排出 2n 位挑剔數列，並證明 n=4k、4k+3 至少能找到一組挑剔數列。
(一)找出規律，如能證出 k=任意值時皆能找到至少一組挑剔數列，則間接得知 n=4k or 4k+3 時挑剔數列必存在。
1.挑剔數列之化簡
(1)先把挑剔數列中最大的數字 n 寫下，再依造數字的大小順序由第一個 n 的右邊開始空一格依序填入直到第 2 個 n 之左方。
例： 7_6_5_4_7 (n=7)
(2)把步驟一所填入的數字往其右方填入第二次，同時在第一個 n 之左方補上此挑剔數列應有但尚未畫上之空格。
例： _ _ 7_6_5_4_7 6 5 4 (n=7)
(3)把剩餘數字的偶數由左到右遞增填入偶數格中，這些偶數的第 2 次皆填入原先填入之偶數的右方。
偶數格的定義爲與第 1 個 n 之序數差爲偶數的格子。
奇數格的定義爲與第 1 個 n 之序數差爲奇數的格子。
例： 2 _ 4 2 11_10 4 9_8_7_6 _ 11 10 9 8 7 6 (n=11)
(4)把剩餘的數字與空格一起作化簡，把剩餘的奇數皆減一再除以二，空格與空格間的距離也減一再除以二，使之變爲一新的挑剔數列。
例：原 n=11 的挑剔數列化簡爲 _ X _ X _ _ _ _
(X 表示此格在原挑剔數列中已被填入過數字)
2.新挑剔數列之排法
※新挑剔數列之定義：
新挑剔數列之形式爲 _ X _ _ _ 其中 X 之數量爲右方連續空格之數量減 2。4
(1)num? X? =4a+1 時的排法
? 先把偶數由右往左遞增填入偶數格中，填入這些偶數的第 2 次時，最大偶數的第 2 次往原來的右方填，其餘的往左方填入。
例： _ X _ X _ X _ X _ X 2 4 _ 2 0 0 4
偶數格之定義改爲與 X 之序數差爲偶數。
奇數格之定義改爲與 X 之序數差爲奇數。
? 剩餘的數字與空格一起作化簡，剩餘的奇數皆減一再除以二，空格與空格間的距離也減一再除以二，使此挑剔數列再做變化。
例：原 num(X)=5 變爲_ _ _ _ _ X _
? 再把偶數由左往右遞增填入偶數格，這些偶數的第 2 次填入中最大的偶數第

2 次往原來的左方填，其餘的往右方填入? 再化簡一次，則此數列就會變回新挑剔數列，形成一循環過程，每次循環後原 num(X)=4a+1 之 a 值減少 2 (a≧0)。

(2)num? X? =4a+2 時的排法? 把最大的偶數填在最右邊的偶數格，其餘的偶數由右往左遞增填入偶數格，這些偶數的第二次填入皆往原數之左填入，惟第 2 次往左填入會碰到最大偶數的偶數往原數之右填入。

例： _ X _ X _ X _ X 4 X _ X 6 4 _ 2 0 0 2 6

? 把剩餘的空格與數字用和前面一樣的方法化簡，則此數列就會變回新挑剔數列，形成一循環過程，每次循環後 原 num (X) = 4a+2 之 a 值減少 1 (a≧0)。

(3)num? X? =4a+3 與 num? X? =4a+4 時的排法

? 把偶數由右往左遞增填入偶數格中，這些偶數的第 2 次填入往原數之左方填入。

例： _ X _ X _ X _ X 6 X _ X 4 X _ 6 2 4 _ 2 0 0 _

? 把剩餘數字與空格依前面所提之方法化簡。

? 把偶數由左往右遞增填入偶數格中，這些偶數的第二次填入皆填往原數之右方，再執行一次化簡的步驟，則此數列就會變回新挑剔數列，每次循環後原 4a+3 or 4a 之 a 值減少 2 (a≧0)。

(二)證明上述新挑剔數列之排列方式中{num(X)=4a、4a+1、4a+2、4a+3}，a 爲任意非負整數時此排列方式恆成立。

1.證明 num? X? =4a+1，a 爲非負整數時，此排法皆成立。

(1)由於每個 X 之左方必有一個空格，所以設 num[__Ｘ]=4a+1

新挑剔數列中右方之連續空格數爲 num? X? +２，故 num[__]=4a+3

總空格爲(4a+1)+4a+3=8a+4，故可填入數字 0~4a+1。

(2)標定序數，最右方爲 1，至最左方爲 (4a + 1)´ 2 + (4a + 3) = 12a + 5 。

(3)跟據排法，偶數皆先填入偶數格中。0 4a+1 中偶數共有 2a+1 個，由於之前已說數字第二次填入所對應之序數表示爲Ａr+(r+１)，現在Ａr 位於偶數格，而 r 又爲偶數，故這些偶數的第二次填入會填入奇數格中，形成[XXX__]的情況。

(4)把此數列由右至左每四個劃爲一組。

例：

最大偶數倒填使得前 4 格變爲〔2 0 0 4a〕，0 和 4a 都無法使〔XXX_〕的情況出現，所以 num[XXX__]=2a+1-2=2a-1 , 而 num[XXXX]=1

故 num[X__]={總格數-4num[XXX_]-4num[XXXX]-最左方一格

[_]}÷2=2a+2。

(5)依之前所提方式化簡：

XXX__ Ë X__ XXXX Ë 消失 X__Ë__ __Ë__

此時化簡後新的數列與原挑剔數列左右顛倒 (連續空格在左方)

而 num[_X]=2a-1 num[__]=2a+2+1=2a+3

新的數列總空格＝num[__]+num[_X]＝4a+2Ë 可填入的數字爲 0 2a。

(6)再重複一次偶數填偶數格之方法

則 num〔 _ XXX 〕=a+1-2=a-1 num〔 XXXX 〕=1
最右方之一格 num〔 _ 〕=1num〔 _ X 〕=(總格數 - 4(a-1) - 4 - 最右方一格〔 _ 〕)/2=a。
(7)再用之前的方法化簡一次
則新的數列方向變爲和原來的一樣
且 num〔 _X 〕=a-1 num [_]=a+1
兩者差爲 2，條件皆和原先的新挑剔數列相符，形成一循環過程。
(8)故得證 a 爲任意非負整數時此排法皆成立。
2.證明 num? X? =4a+2，a 爲非負整數時，此排法皆成立。
(1)由於每個 X 之左方必有一個空格，所以設 num[__Ｘ]=4a+2
新挑剔數列中右方之連續空格數爲 X 之數量+２，故 num[__]=4a+4
總空格數爲(4a+2)+4a+4=8a+6，故可填入數字 0~4a+2。
(2)標定挑剔數列的序數，最右方爲 1，至最左方爲 2×(4a+2)+(4a+4)=12a+8。
(3)跟據排法，偶數皆先填入偶數格中。0 4a+2 中偶數共有 2a+2 個，數字第二次填入所對應之序數表示爲Ａr+(r+１)，現在Ａr 位於偶數格，而 r 又爲偶數，故這些偶數的第二次填入會填入奇數格中，形成[XXX__]的情況。
(4)把此數列由右至左每四個劃爲一組，惟起始時是 5 個一組，由於最大之偶數 4a+2 是排在第一個偶數格上，使得偶數 2a 要倒填，故 0 和 2a 不會產生〔 XXX_ 〕的形式，而前 5 格之形式爲〔 XXXXX 〕
所以 num[XXX__]=2a+2-2=2a num〔 XXXXX 〕=1
最左方之空格 num〔 _ 〕=1
故 num[X__]=(總格數-4×(2a)-5-1) ÷2=2a+1。
(5)依之前所提方式化簡：
XXX__ Ë X__ X__Ë__ __Ë__
此時化簡後新的數列雖與原挑剔數列左右顛倒 (連續空格在左方)6
但 num[_X]=2a num[__]=2a+1+1=2a+2
兩者差爲 2，條件和原先的挑剔數列相符，可視爲一循環過程。
(6)故得證 a 爲任意非負整數時此排法皆成立。
3.num? X? =4a+3，a 爲非負整數時，此排法皆成立。
(1)由於每個 X 之左方必有一個空格，所以設 num[__Ｘ]=4a+3
新挑剔數列中右方之連續空格數爲 num? X? +２，故 num[__]=4a+5
總空格數爲(4a+3)+4a+5=8a+8，故可填入數字 0~4a+3。
(2)標定序數，最右方爲 1，至最左方爲 2×(4a+3)+(4a+5)=12a+11。
(3)跟據排法，偶數皆先填入偶數格中。0 4a+3 中偶數共有 2a+2 個，數字第二次填入所對應之序數表示爲Ａr+(r+１)，現在Ａr 位於偶數格，而 r 又爲偶數，故這些偶數的第二次填入會填入奇數格中，形成[XXX__]的情況。
(4)把此數列由右至左每四個劃爲一組
每個偶數的第 2 次填入皆會形成 〔 XXX_ 〕

所以 num[XXX__]=2a+2，最左方之空格 num〔 _ 〕=1
故 num[X__]=(總格數-4×(2a+2)-1) ÷2=2a+1。
(5)依之前所提方式化簡：
XXX__ Ë X__ X__Ë__ __Ë__
此時化簡後新的數列與原挑剔數列左右顛倒 (連續空格在左方)
而 num[_X]=2a+2 num[__]=2a+1+1=2a+2
新的數列總空格數＝num[__]+num[_X]＝4a+4
Ë 可填入的數字爲 0 2a+1。
(6)再重複一次偶數填偶數格之方法。
(7)一開始的〔0 0 2 _〕並不產生〔 _XXX〕的情形
故 num〔 _XXX〕=a+1-1=a，最右邊留有一空格 num〔 _〕=1
num〔 _ X〕=(總格子數 - 4a － 3 -1) ÷2=a+1。
(8)再用之前的方法化簡一次。
(9)則新的數列左右方向變爲和原來的一樣
且 num〔 _X〕=a num [_]=a+2
兩者差爲 2，條件皆和原先的挑剔數列相符，形成一循環過程。
(10)故得證 a 爲任意非負整數時此排法皆成立。
4.num〔 X〕=4a+4，a 爲任意非負整數時，此排法皆成立。
(1)由於每個 X 之左方必有一個空格，所以設 num[__Ｘ]=4a+4
新挑剔數列中右方之連續空格數爲 X 之數量+２，故 num[__]=4a+6
總空格爲(4a+4)+(4a+6)=8a+10，故可填入數字 0~4a+4。
(2)標定序數，最右方爲 1，至最左方爲(4a+4)×2+(4a+6)=12a+14。
(3)跟據排法，由小到大的偶數依序填入由右而左的偶數格。0 4a+4 中偶數共有 2a+3 個，之前已說過第二次填入數字時所對應之序數表示爲Ａr+(r+１)，現在Ａr 位於偶數格，而 r 又爲偶數，故這些偶數的第二次填入會填入奇數格中，形成[XXX__]的情況。
(4)把此數列由右至左每四個劃爲一組，惟一開始先三格一組 7
因爲 4a+4 的最右邊爲偶數格，所以填入後的最右邊是[XXX]
所以 num[XXX__]=2a+3-1=2a+2，而 num[XXX]=1
故 num[X__]={總格數-4×num[XXX__]-3×num[XXX]-最右邊的[_]}÷2
=2a+1。
(5)依之前所提方式化簡
XXX__ Ë X__ XXX Ë 消失 X__Ë__ __Ë__
此時化簡後新的數列與原挑剔數列左右顛倒 (連續空格在左方)
而 num[X_]=2a+2 num[__]=2a+2
新的數列總空格＝num[__]+num[_X]＝4a+4
Ë 可填入的數字爲 0 2a+1。
(6)再重複一次偶數填偶數格之方法

則 num〔 _ XXX 〕=a+1-1=a ,num〔 XXX 〕=1,最右方之一格 num〔 _ 〕=1
num〔 _ X 〕=(總格數 - 4(a) - 3 - 最右方一格〔 _ 〕)/2=a+1。
(7)再用之前的方法化簡一次
則新的數列方向變爲和原來的一樣，且 num〔 _X 〕=a num [_]=a+2
兩者差爲 2，條件皆和原先的挑剔數列相符，形成一循環過程。
(8)故得證 a 爲任意非負整數時此排法皆成立。

伍、研究結果與討論
一、我們所列的目的都達到了，第一我們已經証出 n=4K+1 和 4K+2 是絕對不存在挑剔數列的。
二、爲了要完成第二個目的，我們試著找出每個挑剔數列的共通性，也找到了以化減的方法來分類，有效減少了繁雜的挑剔數列，藉由不斷的化簡，快速的找到至少一組挑剔數列，當 2n 相當大時，也能藉由 4、5 次化簡就能排出挑剔數列，這可說是目前最大的突破。
三、證出當 n=4K+3 和 4K+4 是絕對存在挑剔數列的。原本挑替數列的 n 值是以四爲一個循環(4K+1、4K+2 無挑剔數列；4K+3、4K+4 有挑剔數列)，經過化簡後，新挑剔數列的 num(X)還是以四爲循環(4a+1、4a+2、4a+3、4a+4)，相當有規律。
四、當然，目前仍在繼續找尋其它的規律，試圖將挑剔數列分析到最清楚，可是目前還再研究每一個 2n 位能排出多少組挑剔數列，不過從已經知道的組數(n=3 有 2 解；n=4 有 2 解；n=7 有 52 解；n=8 有 300 解)來看，我們推測 n 與挑剔數列組數之關係應該是成指數關係增加，希望能試著找出其奧妙。

陸、目前發展
一、試找出一推導方法使得一組解可以推出同一 n 值的所有解。
(一) 從前面所得的公式可以找出任意 n 的一組解，再找程式跑出來的 n=7 的所有解之相似度。
(相似度的定義：兩 n 值相同的數列，比較數字 1~n，越多位置相同的相似度越高。)
n=7 的所有解：
A: 73625324765141
B: 72462354736151
C: 71416354732652
D: 74151643752362
E: 27423564371516
F: 57416154372632
G: 57263254376141
H: 17126425374635
I: 26721514637543

J: 62742356437151

K: 51716254237643

L: 23726351417654

M: 35743625427161

N: 72632453764151

O: 72452634753161

P: 71316435724625

Q: 73161345726425

R: 37463254276151

S: 57236253471614

T: 57141653472362

U: 17125623475364

V: 36713145627425

W: 52732653417164

X: 41716425327635

Y: 24723645317165

Z: 35723625417164

這２６組是完全不重複的，所以總共有５２組（數列左右顛倒也是一新的數列）

(二) 從這 26 組數列中比較之間位置相同的數字數量(相似度)製成下表：

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	2	1	1	0	0	2	1	1	1	1	1	1	3	2	1	2	1	0	0	2	0	0	0	0	1
B	2	4	1	1	1	2	0	0	4	0	1	1	4	4	1	2	4	0	0	0	0	1	0	0	0
C	1	4	2	1	3	0	1	0	2	2	2	0	2	2	3	1	2	1	1	0	0	0	2	0	0
D	1	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	3	1	2	0	0	4	2	0	1	0	2	1
E	0	1	1	0	2	1	1	2	0	0	0	0	0	1	0	0	2	2	1	1	0	0	0	2	0
F	0	1	3	1	2	2	2	0	0	2	1	0	0	1	1	0	1	3	3	1	1	1	2	0	0
G	2	2	0	0	1	2	1	0	2	2	0	1	1	1	0	1	3	2	2	1	0	1	0	1	0
H	1	0	1	0	1	2	1	0	0	1	1	0	1	0	3	1	1	2	1	3	1	0	3	1	1
I	1	0	0	0	2	0	0	0	1	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1	1	1
J	1	4	2	0	0	0	2	0	1	1	2	3	3	2	0	0	2	1	1	0	1	2	0	1	1
K	1	0	2	0	0	2	2	1	3	1	2	0	0	0	2	0	1	2	1	0	1	2	3	1	1
L	1	1	2	0	0	1	0	1	2	2	2	1	1	0	1	1	1	2	0	1	1	2	2	2	2
M	1	1	0	1	0	0	1	0	1	3	0	1	1	2	0	0	2	0	2	1	2	2	2	2	3
N	3	4	2	1	0	0	1	1	0	3	0	1	1	2	2	1	2	1	0	0	0	1	0	0	0
O	2	4	2	3	1	1	1	0	0	2	0	0	2	2	1	1	2	0	1	1	0	2	0	1	1
P	1	1	3	1	0	1	0	3	0	0	2	1	0	2	1	3	0	1	0	0	2	0	3	1	0
Q	2	2	1	2	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	3	1	0	1	0	3	0	1	1	0
R	1	4	2	0	2	1	3	1	0	2	1	1	2	2	2	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1

S	0	0	1	0	2	3	2	2	0	1	2	2	0	1	0	1	0	1	2	2	0	3	1	0	1
T	0	0	1	4	1	3	2	1	0	1	1	0	2	0	1	0	1	1	2	3	0	2	0	1	1
U	2	0	0	2	1	1	1	3	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	2	3	0	2	0	1	3
V	0	0	0	0	0	1	0	1	2	1	1	1	2	0	0	2	3	1	0	0	0	1	2	2	2
W	0	1	0	1	0	1	1	0	1	2	2	2	2	1	2	0	0	0	3	2	2	1	1	3	4
X	0	0	2	0	0	2	0	3	1	0	3	2	2	0	0	3	1	0	1	0	0	2	1	2	1
Y	0	0	0	2	2	0	1	1	1	1	1	2	2	0	1	1	1	0	0	1	1	2	3	2	3
Z	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	2	3	0	1	0	0	1	1	1	3	2	4	1	3

(三) 從表格中可以找出與每一個數列相似度最高的數列,從相似度的高低可以排出一推導的順序。

(四) 從這個推導順序找出 n=7 的數列推導的過程。(參見附錄)

(五) 從 n=7 的推導方法試著找出其它 n 值的推導方法。

二、找尋 n 與挑剔數列組數的關係

(一) 因爲前提的數列找尋方式只能找出每個 n 當中的一組解，無法知道每個 n 確實的組數。

(二) 設計程式，找出每個 n 值內符合挑剔數列定義的數列，並計算總數，得到 n=3 有 2 解、n=4 有 2 解、n=7 有 52 解、n=8 有 300 解… ..等數據。

(三) 找尋 n 與挑剔數列組數之間的關係。

柒、參考文獻

一、 Nrich 數學期刊

http://www.nrich.maths.org.uk/mathsf/journalf/jan00/inspire1/

二、 數據處理入門 陳勝凡 科學出版社

三、 中學數學教學法通論 楊弢亮 浙江教育出版社