

投稿類別：數學類

篇名：

數獨唯一解最少給定提示數及唯一解條件之探討

作者：

余柏序。高雄中學。高二 24 班

指導老師：

黃仁杰老師

壹、前言

數獨是一種邏輯性的數字填充遊戲，玩家須以數字填進每一格，而每行、每列和每個宮（即 3×3 的大格）有齊 1 至 9 所有數字。遊戲設計者會提供一部份的數字，使謎題只有一個答案。一個已解答的數獨其實是一種多了宮的限制的拉丁方陣，因為同一個數字不可能在同一行、列或宮中出現多於一次。

這種遊戲只需要邏輯思維能力，與數字運算無關。雖然玩法簡單，但數字排列方式卻千變萬化，所以不少教育者認為數獨是鍛煉腦筋的好方法。因為數獨上的數字沒有運算價值，僅僅代表相互區分的不同個體，因此可以使用其他的符號比如拉丁字母、羅馬字母甚至是不圖形狀的圖案代替。

我小時候就常常玩自由時報上的每日數獨，發現有幾次無法用自己認為「無敵」的方法解出來，用了很麻煩的「假設法」之後，確定只有一組解，因此想要知道數獨唯一解的條件如何。

此研究的目標是找出數獨唯一解前提下給定最小提示數，及數獨唯一解的條件，當各種解的情況釐清之後，再嘗試從 4×4 推廣至 9×9 。

貳、正文

一、方式

- (一) 先以適當順序填入 4 個數
- (二) 若發現多解，則嘗試再填入最少的數，使其成為唯一解
- (三) 若發現唯一解，則嘗試刪除任一數字，看看在少幾個數字的情況下仍能保持唯一解的性質
- (四) 若發現無解，則不做任何動作，並在最後納入分析規律

二、特殊情況

- (一) 由於排列組合情形眾多，我們先將一些情況視作等價：
 - 1、上兩行或下兩行互換
 - 2、左兩列或右兩列互換
 - 3、上下交換或左右交換
 - 4、將任一數字以不重複的任一數取代
 - 5、將數獨順時針或逆時針旋轉 90 度
 - 6、任選一條對角線鏡射
- (二) 此外，若有下列情形發生，則必有多解，本論文將不列入考慮：
 - 1、上兩行或下兩行空白

數獨唯一解最少給定提示數及唯一解條件之探討

- 2、左兩列或右兩列空白
- 3、兩個以上的數字沒有出現

(三) 為了方便，我們將每個格子編上號碼：

A1	B1	C1	D1
A2	B2	C2	D2
A3	B3	C3	D3
A4	B4	C4	D4

三、程式邏輯

(一) 本程式使用 DFS 演算法來簡化程式，並利用 Bitwise 邏輯來以最少的記憶體儲存最多的資訊，回傳值為程式計算後得到的值。

(二) 首先，枚舉四個數字填入的情況

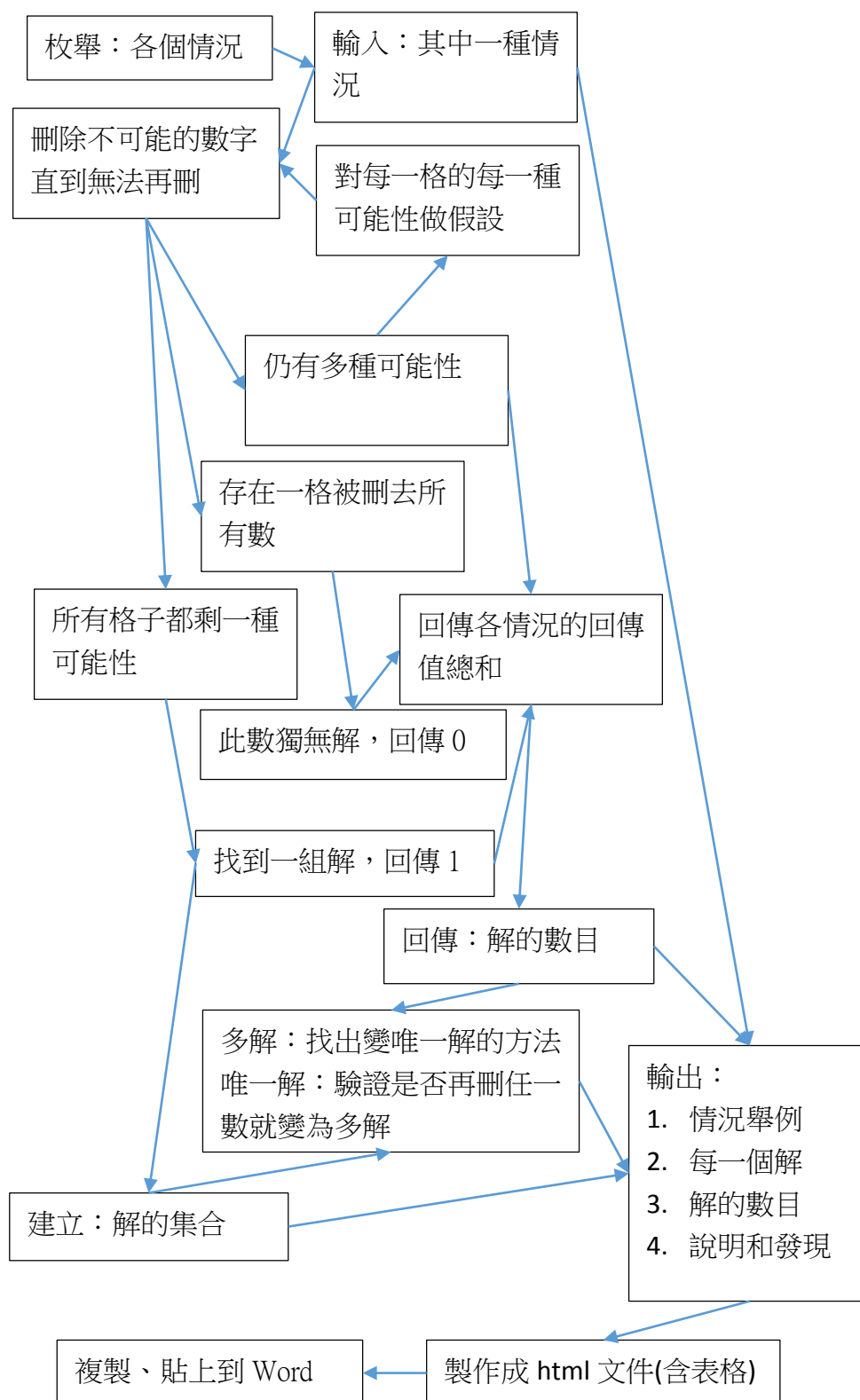
- 1、四數不同時，由前述等價情形作變換，必可將其中一數移動到左上角，故將第一個數字固定在左上角，並依照位置給定 1、2、3、4，如此一來就有 C_3^{15} 種情況
- 2、四數有兩數相同時，同理，必可將相同的兩個數其中之一移動到左上角，故將它固定在左上角，另一數則不可位於 B1、C1、D1、A2、B2、A3、A4，因此選擇其他 8 個位置填入，而剩餘兩數則任意填入剩餘的 14 個空格，如此一來就有 $8 \times C_2^{14}$ 種情況

(三) 計算每一種情況中解的數目與性質：

- 1、針對每一格，儲存所有可能填入的數字（一開始時除了已填入的那四格之外，每一格都包含數字 1~4），並依照列、行、宮的規則刪去不可能的數字
- 2、若發現其中一格所有數字都被刪除，則表示此數獨無解，回傳值為 0
- 3、若發現每一格都只剩一種可能性，則檢查這組解是否已找過，若已找過則回傳 0，若無找過則輸出解答，並回傳 1
- 4、若到最後用這種方法無法再刪去任何數字，且仍有多種可能性，則針對每一格挑出其中一種可能的數做假設，一一計算，然後回傳各個情況的回傳值總和

數獨唯一解最少給定提示數及唯一解條件之探討

四、流程圖



數獨唯一解最少給定提示數及唯一解條件之探討

五、程式複雜度

- (一) 枚舉情況所需複雜度：約 $N^{2N-2}(N=4)$
- (二) 計算解的數目所需複雜度：約 $N^4(N=4)$
- (三) 總共複雜度：約 $N^{2N+2}(N=4)$
- (四) 程式運算時間：約需 40 分鐘

六、程式運算結果

- (一) 總共：54 種情況
- (二) 四數不同：23 種情況
- (三) 四數中兩數相同：31 種情況
- (四) 詳細運算結果：(略)

數獨唯一解最少給定提示數及唯一解條件之探討

參、 結論

一、唯一解的情況：

(一) 四個數字，沒有數字相同

<p>8.</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1	2							3		4						<p>16.</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1		2			3						4					<p>18.</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1		2						3			4				
1	2																																																	
3		4																																																
1		2																																																
	3																																																	
			4																																															
1		2																																																
3			4																																															
<p>19.</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr> </table>	1		2						3							4	<p>20.</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td></td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1		2							3		4					<p>21.</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr> </table>	1		2							3						4
1		2																																																
3																																																		
			4																																															
1		2																																																
	3		4																																															
1		2																																																
	3																																																	
			4																																															
<p>23.</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr> </table>	1						2			3						4																																		
1																																																		
		2																																																
	3																																																	
			4																																															

(二) 四個數字，其中兩個數字相同

<p>10.</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr> </table>	1						1		2						3		<p>17.</p> <table border="1" style="width: 100%; height: 100%;"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr> </table>	1						1			2						3	
1																																		
		1																																
2																																		
		3																																
1																																		
		1																																
	2																																	
			3																															

(三) 發現：

- 1、四數不相同時的 7 種情況中，有 5 種為四數分布於四宮內
- 2、四數中兩數相同時的 2 種情況中，全部都為四數分布於四宮內
- 3、所有情形只要再去掉任一數字，即變為多解
- 4、由此可知，四乘四數獨唯一解條件之最少提示數為四

數獨唯一解最少給定提示數及唯一解條件之探討

二、無解的情況：

(一) 四個數字，沒有數字相同

3. <table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	3									4					5. <table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2					3		4								6. <table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>4</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2					3				4					
1	2	3																																																
			4																																															
1	2																																																	
		3																																																
4																																																		
1	2																																																	
		3																																																
		4																																																
7. <table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	2					3					4					11. <table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>4</td><td></td></tr></table>	1	2									3				4		14. <table border="1"><tr><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td></tr><tr><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1		2			3				4						
1	2																																																	
		3																																																
			4																																															
1	2																																																	
		3																																																
		4																																																
1		2																																																
	3																																																	
	4																																																	

(二) 四個數字，其中兩個數字相同

13. <table border="1"><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1						1			2		3					15. <table border="1"><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr></table>	1						1			2				3			22. <table border="1"><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1										1	2	3			
1																																																		
		1																																																
	2		3																																															
1																																																		
		1																																																
	2																																																	
	3																																																	
1																																																		
		1	2																																															
3																																																		
23. <table border="1"><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr></table>	1										1	2		3			26. <table border="1"><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td></tr></table>	1										1		2	3			29. <table border="1"><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td></td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr></table>	1										1			2	3	
1																																																		
		1	2																																															
	3																																																	
1																																																		
		1																																																
2	3																																																	
1																																																		
		1																																																
	2	3																																																
30. <table border="1"><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td></td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr></table>	1										1			2		3																																		
1																																																		
		1																																																
	2		3																																															

(三) 發現：

- 1、四數不相同的 6 種情況中，沒有四數平均分布四宮的情況
- 2、四數中兩數相同時的 7 種情況中，只有 1 種為四數平均分布四宮的情況

數獨唯一解最少給定提示數及唯一解條件之探討

三、四個數字平均分布在四宮的情況

(一) 四個數字，沒有數字相同

<p>17. 唯一解</p> <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1		2						3		4						<p>18. 唯一解</p> <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1		2						3			4					<p>19. 唯一解</p> <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr> </table>	1		2						3							4
1		2																																																
3		4																																																
1		2																																																
3			4																																															
1		2																																																
3																																																		
			4																																															
<p>20. 唯一解</p> <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td></td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1		2							3		4					<p>21. 唯一解</p> <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr> </table>	1		2							3						4	<p>23. 唯一解</p> <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr> </table>	1						2			3						4
1		2																																																
	3		4																																															
1		2																																																
	3																																																	
			4																																															
1																																																		
		2																																																
	3																																																	
			4																																															

(二) 四個數字，其中兩個數字相同

<p>6. 多解</p> <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1						1		2		3						<p>7. 多解</p> <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td>3</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1						1		2			3					<p>10. 唯一解</p> <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr> </table>	1						1		2						3	
1																																																		
		1																																																
2		3																																																
1																																																		
		1																																																
2			3																																															
1																																																		
		1																																																
2																																																		
		3																																																
<p>11. 多解</p> <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr> </table>	1						1		2							3	<p>12. 多解</p> <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1						1			2	3						<p>13. 無解</p> <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>2</td><td></td><td>3</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1						1			2		3				
1																																																		
		1																																																
2																																																		
			3																																															
1																																																		
		1																																																
	2	3																																																
1																																																		
		1																																																
	2		3																																															
<p>16. 多解</p> <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr> </table>	1						1			2					3		<p>17. 唯一解</p> <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr> </table>	1						1			2						3																	
1																																																		
		1																																																
	2																																																	
		3																																																
1																																																		
		1																																																
	2																																																	
			3																																															

(三) 發現：

- 1、四數不相同的 6 種情況中，全部都是唯一解的情況
- 2、四數中兩數相同時的 8 種情況中，有 2 種為唯一解的情況，1 種為無解，其他為多解

數獨唯一解最少給定提示數及唯一解條件之探討

四、右上、左下宮空白的情況

(一) 四個數字，沒有數字相同

4. 多解 <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1	2			3						4						10. 多解 <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1	2									3	4					11. 無解 <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>4</td><td></td></tr> </table>	1	2									3				4	
1	2																																																	
3																																																		
		4																																																
1	2																																																	
		3	4																																															
1	2																																																	
		3																																																
		4																																																
12. 多解 <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr> </table>	1	2									3					4	22. 多解 <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr> </table>	1					2					3					4																	
1	2																																																	
		3																																																
			4																																															
1																																																		
	2																																																	
		3																																																
			4																																															

(二) 四個數字，其中兩個數字相同

24. 多解 <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr> </table>	1										1	2			3		25. 多解 <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr> </table>	1										1	2				3	31. 多解 <table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>2</td><td>3</td></tr> </table>	1											1			2	3
1																																																		
		1	2																																															
		3																																																
1																																																		
		1	2																																															
			3																																															
1																																																		
			1																																															
		2	3																																															

(三) 發現：

- 1、四數不相同的 5 種情況中，沒有唯一解的情況，1 個無解，其皆為多解
- 2、四數中兩數相同時的 3 種情況中，全部都為多解的情況
- 3、四乘四數獨在提示四數的情況下，只要有兩宮空白，必不會有唯一解

五、總結

(一) 規律

- 1、已知四數不同，數獨唯一解，則很有可能為四數分布於四宮的情況
- 2、已知四數中兩數相同，數獨唯一解，則必為四數分布於四宮的情況
- 3、已知四數不同，數獨無解，則不可能是四數分布於四宮的情況
- 4、已知四數中兩數相同，數獨無解，則極不可能是四數分布於四宮的情況
- 5、已知四數不同，且分布於四宮，則極有可能唯一解，不可能無解
- 6、已知四數中兩數相同，且分布於四宮，則很有可能多解，唯一解或無解也可能發生
- 7、已知四數不同，且空出右上、左下兩宮，則極有可能多解，不可能有唯一解
- 8、已知四數中兩數相同，且空出右上、左下兩宮，則必為多解

(二) 發現

- 1、經過這次研究，發現四乘四數獨沒有任何簡單的規律可循
- 2、若要出題，從不同數字分布四宮的情況著手成功率較高
- 3、若要判斷數獨是否為一解，可觀察是否為四數不同且分布於四宮的情況
- 4、以上方法皆有例外，只能做為大概依據
- 5、四乘四數獨唯一解之最少給定條件數為 4

(三) 展望

- 1、目前還沒有從 54 種情況中觀察到任何精準的規律，希望以後能發展出更高階的方法來更精準的判斷數獨解的情況
- 2、目前是以程式來計算出 54 種情況，至於是否有重複或疏漏的，還有待考證
- 3、目前程式的複雜度高達 $N^{2N+2}(N=4)$ ，花了 40 分鐘才全部跑完，若要跑完九乘九數獨，估計需要多達 4.64×10^{14} 分鐘(約 8.82 億年)的時間，故希望能發展出複雜度更低的演算法，才有研究九乘九數獨的可能性

肆、 引註資料

維基百科：<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%95%B8%E7%8D%A8>

解題技巧：<http://www.sudoku.org.tw/file/sudov092.pdf>

700 萬小時搞定最小數獨問題：<http://www.guokr.com/article/89169/>

我寫的 C# 程式 (906 行，略)