投稿類別：數學類

篇名：明安圖的冪級數與無窮級數

作者：

林芳仰。市立高雄中學。高一 24 組

指導老師：

黃仁杰老師

壹●前言

在網頁上找尋資料時，偶然發現一位清代蒙古族的科學家——明安圖，他不但上通天文下知地理，更在數學方面有著領先當時西方國家的重大突破，最有名的就是在他遺著《割圓密率捷法》所述的三角函數冪級數，特別是係數中含有卡塔蘭數的無窮級數展開式，令我對他的數學研究產生了好奇，想一探究竟這偉大的科學家。

從明安圖一連串具有遞迴關係的圖形，以級數回求找出$\frac{1}{n}$弧通弦表示全通弦的遞迴式，再以高中數學較常見的方法加以理解，最後得到三角函數冪級數，接著討論關於他計算無窮級數的方法。

貳●正文

一、明安圖的割圓連比例圖形

明安圖分別以$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$弧通弦來表示全弧通弦長，以下將一一介紹。其中從$\frac{1}{3}$弧通弦後，其圖形結構大致相通。

(一)以$\frac{1}{2}$弧通弦來表示全弧通弦長

明安圖為了表達成冪級數的展開式，所以先找出具有遞迴關係的圖形，再透過級數回求，得到$\frac{1}{2}$弧通弦來表示全弧通弦長的表示法。

1. 具有遞迴關係的圖形

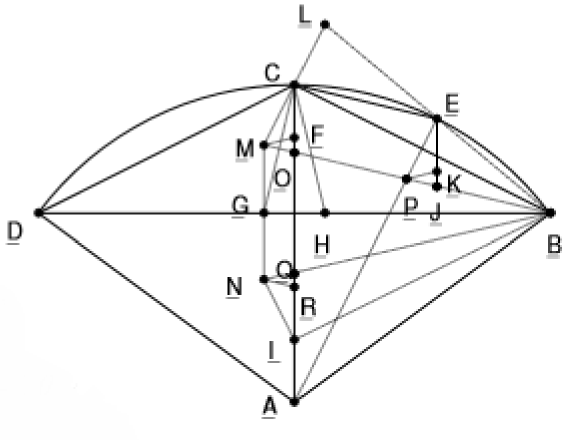

圖 1-1

由圖 1-1 所示，取$\widehat{BC}=\widehat{CD}$，$\widehat{BE}=\widehat{EC}$，延長$\overline{BE}$至$L$，使$\overline{BE}=\overline{EL}$，延長$\overline{LC}$至$M$，使$\overline{LC}=\overline{CM}$，翻轉△*BLM* 至△*BMN*，則△*BLM*≅△*BMN*，其中$\overline{MN}$交$\overline{BD}$於G點。

做$\overline{DH}=\overline{BG}$，則$\overline{DH}=\overline{BG}=\overline{BC}$。做$\overline{BI}=\overline{BC}$，在$\overline{BM}$上取一點$P$，使$\overline{BE}=\overline{BP}$，在$\overline{BM}$上再取另一點$J$，使$\overline{EP}=\overline{EJ}$，在$\overline{EJ}$上取$k$使$\overline{PJ}=\overline{PK}$。因△*ABE* 與△*BEP* 皆為等腰三角形，又$\angle AEB=\angle BEP$，所以△*ABE*~△*BEP*，同理可得△*BEP*~△*EPJ*，△*EPJ*~△*PJK*。

△*ABE* 與△*BCG* 中，設$\angle AEB=\theta$，則其所對弧$\widehat{BE}=\theta$，$\widehat{BC}=\widehat{CD}=2\theta$則$\angle CBD=\theta$，因△*ABE* 與△*BCG* 皆為等腰三角形，又$\angle BAE=\angle CBG$，所以△*ABE*~△*BCG*。

又與前面同理得△*BCG*~△*CGH*。△*ABE* 與△*BML* 中，設$\widehat{BE}=\widehat{EC}=\theta$，則$\angle BAE=\angle MBL=\theta$，則△*ABE*~△*BML*。在$\overline{AC}$上作$\overline{CO}=\overline{CM}$，則△*CMO*~△*BML*。在$\overline{CO}$上取$F$使$\overline{MF}=\overline{MO}$，則△*MOF*~△*CMO*。

所以△*ABE*~△*BEP*~△*EPJ*~△*PJK*~△*BML*~△*BCG*~△*CGH*~△*CMO*~△*MOF*。

令$\overline{AB}=\emptyset_1$，$\overline{BC}=\emptyset_2$，由此造出一個連比例$\frac{\emptyset_1}{\emptyset_2}=\frac{\emptyset_2}{\emptyset_3}=\frac{\emptyset_3}{\emptyset_4}=\cdots$。

其中$\frac{\overline{AB}}{\overline{EP}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{GH}}$，則$\overline{GH}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\times\overline{EP}$，又$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{BG}=\overline{DH}$，則全通弦長$\overline{BD}$可用$\frac{1}{2}$弧通弦來表示，如：

$$\overline{BD}=2\overline{BG}-\overline{GH}=2\overline{BG}-\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\times\overline{EP}=2\emptyset_2-\frac{\emptyset_2}{\emptyset_1}\times\overline{EP}\quad\cdots(\text{公式一})$$

令$\overline{AB}=\emptyset_1'$，$\overline{BL}=\emptyset_2'$，則$\overline{AB}:\overline{BL}=\overline{AB}:2\overline{BE}=\overline{BL}:2\overline{LM}=\overline{BL}:4\overline{CM}$，即$\overline{AB}:\overline{BL}=\overline{BL}:4\overline{CM}$，對照$\emptyset_1':\emptyset_2'=\emptyset_2':\emptyset_3'$，

推得$4\overline{CM}=\emptyset_3'$。又由圖形得知$\frac{\overline{AB}}{\overline{PE}}=\frac{\overline{PE}}{\overline{JK}}$，則$\frac{\emptyset_1'}{\overline{CM}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{JK}}\rightarrow\overline{JK}=\frac{\overline{CM}^2}{\emptyset_1'}=\frac{1}{\emptyset_1'}\times(\frac{\emptyset_3'}{4})^2=\frac{\emptyset_5'}{16}$，所以$\emptyset_3=\overline{IC}=4\overline{CM}-\overline{OF}=4\overline{CM}-\overline{JK}=\emptyset_3'-\frac{\emptyset_5'}{16}$，即得$\emptyset_3=\emptyset_3'-\frac{\emptyset_5'}{16}$。

2. 級數回求

此法為明安圖首創。已知$\emptyset_3=\emptyset_3'-\frac{\emptyset_5'}{16}$，則$\emptyset_3'$如何用$\emptyset_1$、$\emptyset_3$、$\emptyset_5$…連比例來反求？ 已知$\emptyset_5=\emptyset_3\times\frac{\emptyset_3}{\emptyset_1}$，$\emptyset_7=\emptyset_5\times\frac{\emptyset_3}{\emptyset_1}$，$\emptyset_9=\emptyset_7\times\frac{\emptyset_3}{\emptyset_1}$，…，$\emptyset_{2k-1}=\emptyset_{2k-3}\times\frac{\emptyset_3}{\emptyset_1}$，所以

$$\emptyset_3=\emptyset_3'-\frac{\emptyset_5'}{16}$$

$$\frac{\emptyset_5}{16}=\frac{\emptyset_3'}{16}-2\frac{\emptyset_7'}{16^2}+\frac{\emptyset_9'}{16^3}$$

$$2\frac{\emptyset_7'}{16^2}=2\frac{\emptyset_7'}{16^2}-6\frac{\emptyset_9'}{16^3}+6\frac{\emptyset_{11}'}{16^4}-2\frac{\emptyset_{13}'}{16^5}$$

$$5\frac{\emptyset_9'}{16^3}=5\frac{\emptyset_9'}{16^3}-20\frac{\emptyset_{11}'}{16^4}+30\frac{\emptyset_{13}'}{16^5}-20\frac{\emptyset_{15}'}{16^6}$$

$$\vdots$$

相加得$\emptyset_3+\frac{\emptyset_5}{16}+2\frac{\emptyset_7}{16^2}+5\frac{\emptyset_9}{16^3}+14\frac{\emptyset_{11}}{16^4}+42\frac{\emptyset_{13}}{16^5}+132\frac{\emptyset_{15}}{16^6}=\emptyset_3'$，又$\frac{\overline{AB}}{\overline{PE}}=\frac{\overline{PE}}{\overline{JK}}$，得$\overline{EP}^2=\overline{AB}\times\overline{JK}=\emptyset_1'\times\frac{\emptyset_5'}{16}=\left(\frac{\emptyset_3'}{4}\right)^2$，故$\overline{EP}=\frac{\emptyset_3'}{4}=\frac{\emptyset_3}{4}+\frac{\emptyset_5}{4\cdot16}+2\frac{\emptyset_7}{4\cdot16^2}+5\frac{\emptyset_9}{4\cdot16^3}+14\frac{\emptyset_{11}}{4\cdot16^4}+42\frac{\emptyset_{13}}{4\cdot16^5}+132\frac{\emptyset_{15}}{4\cdot16^6}$，帶入公式一，則$\overline{BD}=2\emptyset_2-\frac{\emptyset_4}{4}-\frac{\emptyset_6}{4\cdot16}-2\frac{\emptyset_8}{4\cdot16^2}-5\frac{\emptyset_{10}}{4\cdot16^3}-14\frac{\emptyset_{12}}{4\cdot16^4}-42\frac{\emptyset_{14}}{4\cdot16^5}-132\frac{\emptyset_{16}}{4\cdot16^6}$，這便是以$\frac{1}{2}$弧通弦來表示全弧通弦長了。

(二)$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$弧通弦來表示全弧通弦長

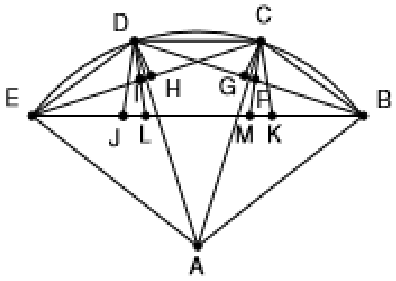

圖 1-2

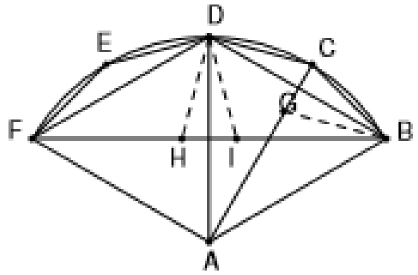

圖 1-3

$\frac{1}{3}$弧通弦來表示全弧通弦長　　$\frac{1}{4}$弧通弦來表示全弧通弦長

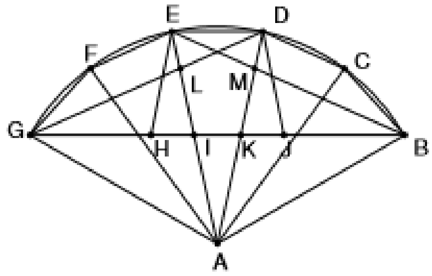

圖 1-4

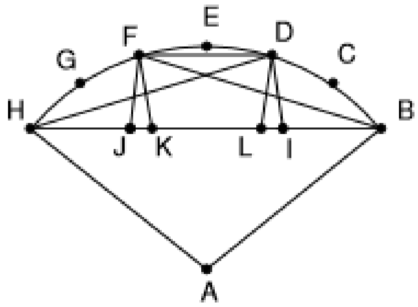

圖 1-5

$\frac{1}{5}$弧通弦來表示全弧通弦長　　$\frac{1}{6}$弧通弦來表示全弧通弦長

以上四種以$\frac{1}{n}$弧通弦來表示全弧通弦長的方法皆建立在以$\frac{1}{2}$弧通弦來表示全弧通弦長的基礎上，方法十分雷同，並由從明安圖的圖形中五次所得的結果可歸納出：

奇數型一般項為$C_{2n-1} = 2C_{2n-3} - C_{2n-5} - C_{2n-3} \times (\frac{\emptyset_2}{\emptyset_1})^2$，$n \geq 3$

偶數型一般項為$C_{2n} = 2C_{2n-2} - C_{2n-4} - C_{2n-2} \times (\frac{\emptyset_2}{\emptyset_1})^2$，$n \geq 3$

二、以高中數學來了解明安圖的數學

以上明安圖的圖形解法算式十分繁雜，故以下將以高中數學來解釋。

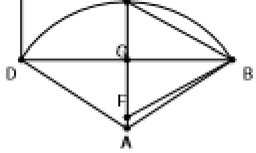

圖 2-1

如圖 2-1，$\widehat{BC} = \widehat{CD}$，連接$\overline{BC}$至$E$，使$\overline{BC} = \overline{CE}$連接$\overline{AC}$，作$\overline{DE}$平行$\overline{AC}$，作$\overline{BF} = \overline{BC}$，則△ABC~△BCF。令半徑$\overline{AB} = \overline{AD} = \emptyset_1 = 1$，一分通弦$\overline{BC} = C_1 = \emptyset_2 = x$，二分通弦$C_2$，三分通弦$C_3$，以此類推。$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CF}}$，則$\overline{CF} = x^2$，

得$C_2=\overline{BD}=\sqrt{\overline{BE}^2-\overline{DE}^2}=\sqrt{(2x)^2-(x^2)^2}=x\sqrt{4-x^2}$。由二項式定理$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\,x^k y^{n-k}$得$x\sqrt{4-x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^{\frac{1}{2}}\,4^{\frac{1}{2}-k}(-x^2)^k=2-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{64}-\frac{x^6}{512}-\frac{5x^8}{16384}-\frac{2x^{10}}{262144}-\frac{21x^{12}}{2097152}\dots$，

其中$0<\mathrm{x}<1$，而$C_k^{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$。則$C_2=\overline{BD}=2x-\frac{x^3}{4}-\frac{x^5}{64}-\frac{x^7}{512}-\frac{5x^9}{16384}-\frac{2x^{11}}{262144}-\frac{21x^{13}}{2097152}\dots$。又$C_3=2C_2-C_1-\frac{C_2(2C_1-C_2)}{C_1}$

$=2C_2-x-\frac{C_2(2x-C_2)}{x}=\frac{-x^2+C_2{}^2}{x}=\frac{-x^2+x^2(4-x^2)}{x}=3x-x^3$。

而奇數型一般項為$C_{2n-1}=2C_{2n-3}-C_{2n-5}-C_{2n-3}\times(\frac{\emptyset_2}{\emptyset_1})^2$，$\mathrm{n}\geq 3$，所以得$C_{2n-1}=2C_{2n-3}-C_{2n-5}-C_{2n-3}\times x^2=(-x^2+2)C_{2n-3}-C_{2n-5}$

若化為矩陣則表示為$\begin{bmatrix}-x^2+2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{2n-3}\\ C_{2n-5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{2n-1}\\ C_{2n-3}\end{bmatrix}$。推得$\begin{bmatrix}C_{2n-1}\\ C_{2n-3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x^2+2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{n-2}\begin{bmatrix}C_3\\ C_1\end{bmatrix}$，$\mathrm{n}\geq 3$。

偶數型一般項為$C_{2n}=2C_{2n-2}-C_{2n-4}-C_{2n-2}\times(\frac{\emptyset_2}{\emptyset_1})^2$，$\mathrm{n}\geq 3$，可得$C_{2n}=2C_{2n-2}-C_{2n-4}-C_{2n-2}\times x^2=(-x^2+2)C_{2n-2}-C_{2n-4}$，化為矩陣則表示為$\begin{bmatrix}-x^2+2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{2n-2}\\ C_{2n-4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{2n}\\ C_{2n-2}\end{bmatrix}$。推得$\begin{bmatrix}C_{2n}\\ C_{2n-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x^2+2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{n-2}\begin{bmatrix}C_4\\ C_2\end{bmatrix}$，$\mathrm{n}\geq 3$。所以我們可以任意求 n 分通弦長，如下： $C_1=x$

$$C_2=2x-\frac{x^3}{4}-\frac{x^5}{64}-\frac{x^7}{512}-\frac{5x^9}{16384}-\frac{2x^{11}}{262144}-\frac{21x^{13}}{2097152}\dots$$

$$C_3=3x-x^3$$

$$C_4=4x-\frac{5x^3}{2}+\frac{7x^5}{32}+\frac{3x^7}{256}+\frac{22x^9}{2^{14}}+\frac{52x^{11}}{2^{18}}+\frac{140x^{13}}{2^{22}}\dots$$

$C_5=5x-5x^3+x^5$，以下以此類推。

由上式可猜得C_m的x項係數為m，那C_m的x^3項係數呢？

我們以拉格朗日插值法來求：已知$f(2)=-\frac{1}{4}$、$f(3)=-1$、

$f(4)=-\frac{5}{2}$、$f(5)=-5$，則$f(m)=-\frac{m(m^2-1^2)}{4\times3!}$，即$C_m$的$x^3$項係數以$m$表示其一般式為$-\frac{m(m^2-1^2)}{4\times3!}$。同理$C_m$的$x^5$項係數以$m$表示其一般式為$\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{4^2\times5!}$，因此我們猜測$C_m$的$x^{2k-1}$項係數應為$(-1)^{k-1}\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\cdots(m^2-(2k-3)^2)}{4^{k-1}\times(2k-1)!}$，$k\in\mathrm{N}$。

證明(數學歸納法)：

(1) C_m的x項係數為m (m為奇數)

當$n=1$時，$C_1=x$，符合；$n=3$時，C_3的x係數為3，符合

設當$n=k-2$，$n=k$時($k\geq3$且為奇數)成立

則當$n=k+2$時，已知$C_{k+2}=(-x^2+2)C_k-C_{k+2}$，故$C_{k+2}$之$x$項係數為$2k-(k-2)=k+2$

故由數學歸納法得證，對所有k為奇數時，C_k之x係數為k。

同理若k為偶數時，C_k之x係數也是k。

(2) C_m的x^3項係數為$-\frac{m(m^2-1^2)}{4\times3!}$($m$為奇數且$m\geq5$)

當$m=5$時，m的x^3項係數為-5，符合

當$m=7$時，m的x^3項係數為-14，符合

設當$m=k-2$，$m=k$時($k\geq7$且為奇數)成立

則當$m=k+2$時，已知$C_{k+2}=(-x^2+2)C_k-C_{k+2}$，則$C_{k+2}$的$x^3$項係數為$-k-\frac{2k(k+1)(k-1)}{4\times3!}+\frac{(k-2)(k-3)(k-1)}{4\times3!}=-\frac{(k+1)(k+3)(k+2)}{4\times3!}$

故由數學歸納法得證，對所有k為奇數時，C_k的x^3項係數為$-\frac{k(k^2-1^2)}{4\times3!}$。同理若$k$為偶數時，$C_k$的$x^3$項係數也為$-\frac{k(k^2-1^2)}{4\times3!}$。

依此可類推至其他次方係數。

三、明安圖如何計算無窮級數

因為中國傳統數學中並沒有無窮級數，因此明安圖創造了一套計算無窮級數的新方法。這邊討論無窮級數自乘的方法。

令$x=2sin\,\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{4})$，$y_m^n=(2\sin m\,\alpha)^2$ ($m\geq1$)

由上述可知$y_{10}=5y_2-5{y_2}^3+{y_2}^5$我們將其表示為：

$$y_{10}=a_0x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nx^{2n+1}}{4^{2n-1}}$$

現在欲求$y_{10} \times y_{10}$：

$$y_{10}{}^2 = \left(a_0x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nx^{2n+1}}{4^{2n-1}}\right)^2$$

$$= (a_0x)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_0a_nx^{2n+2}}{4^{2n-1}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nx^{2n+1}}{4^{2n-1}}\right)^2$$

在計算上式的末項時，明安圖所發明的方法是：

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nx^{2n+1}}{4^{2n-1}}\right)^2 = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}4a_{n-k}\,a_k\right)\frac{x^{2n+2}}{4^{2n-1}}$$

最後得到$y_{10}{}^2 = b_0x^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_nx^{2n+2}}{4^{2n-1}}$。

此時$b_0 = a_0{}^2$，$b_1 = 2a_0a_1$

當$n \geq 2$時$b_n = 2a_0a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}4a_{n-k}a_k$。

參●結論

1.以上明安圖的結果可歸納出一個通式，令半徑為 1，一分通弦為x，則

$$C_m = mx - \frac{m(m^2-1^2)}{4\times3!}x^3 + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{4^2\times5!}x^5 - \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{4^3\times7!}\cdots$$ 。

設一弧長為S，其半徑為 1，S所對應的弦長為C_m，將S分為m等分

(m→ ∞)，其一分通弦長為x，則$\lim_{m\to\infty} mx = S$，$\lim_{m\to\infty}\frac{m(m^2-1^2)}{4\times3!}x^3 = \frac{1}{4\times3!}S^3$，

依此類推，$C_m = S - \frac{1}{4\times3!}S^3 + \frac{1}{4\times5!}S^5 - \frac{1}{4\times7!}S^7 + \frac{1}{4\times9!}S^9\cdots\cdots$。

2.若弧長所對應圓心角為 $2x$，則$2\sin x = (2x) - \frac{1}{4\times3!}(2x)^3 + \frac{1}{4\times5!}(2x)^5\cdots$

即$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9\cdots\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}(-1)^{n-1}$。

而在無窮級數計算的部分，他建立了一套無窮級數的定義、符號系統、演算法，並反覆計算出一些正確的結果。有了明安圖，在中國數學史上照亮了一片光明。

肆●引註資料

〈明安圖和他的冪級數展開式〉
http://w3.math.sinica.edu.tw/math_media/d341/34106.pdf

〈無窮級數與冪級數的探討〉

http://way.mksh.phc.edu.tw/mk1033/%E5%B0%8F%E8%AB%96%E6%96%873.pdf

明安圖《割圓密率捷法》,《續修四庫全書》子部，天文算法類。