投稿類別：數學科

篇名

# 一不一樣？全等四邊形條件之探討

作者

施瑾沂。高雄市立高雄高級中學。高二 24 班

指導老師

黃仁杰老師

## 壹●前言

### (一) 研究動機

全等這個名詞在國中的數學課本中就出現過，講述三角形最少需要3個條件才能確保全等，共有五種不同的方法(AAS、SAS、SSS、ASA、RHS)。那麼四邊形的全等是否同樣需要四個條件嗎？如果四個條件不能做成全等，究竟需要多少個條件呢？這個問題一直在我的腦海中盤旋著，一向對幾何比較有興趣的我，便從此展開我的研究。

### (二) 研究目的

1. 討論全等凸四邊形的條件

## 貳●正文

在研究全等四邊形以前，必須確定全等的定義為何。全等是形狀和大小相同，但方向可以不同，即能夠完全重合的兩個圖形。又可定義為對應邊都相等，對應角也相等。無論圖形平移、旋轉或反射，都可得出全等圖形。

接下來我便提出了第一個假設：四邊形最少需要四個條件才能做成全等。

所有四個條件的情況(SA)共有十六個 ( $2^4=16$ )，如下表所示：

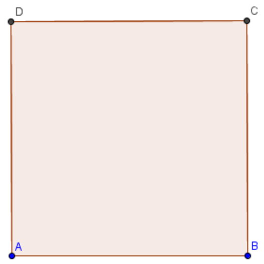
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| SSSS | | | | | |
| SSSA | SSAS | SASS | ASSS | | |
| SSAA | SASA | SAAS | ASSA | ASAS | AASS |
| SAAA | ASAA | AASA | AAAS | | |
| AAAA | | | | | |

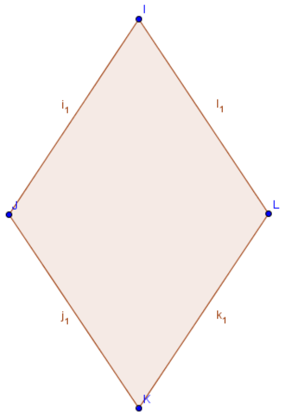
在以上的情況中，有一些情況在幾何上是等價的。例如SSSA和ASSS，它們只是次序上相反，又如AAAS、AASA、ASAA、SAAA，因四邊形內角和為$360^\circ$，在三個內角已知的情況下，第四個內角已被固定。因此，這四個情況是等價的。把以上的情況消去後，我們得出下表九個情況：

| | | | |
|---|---|---|---|
| SSSS | | | |
| SSSA | SSAS | | |
| SSAA | SASA | SAAS | ASSA |
| SAAA | | | |
| AAAA | | | |

為了找出哪些條件可以確定全等，我嘗試把它們一一繪出，看看能否僅繪出一對應四邊形。若繪出多於一個四邊形，則此條件便不能作為全等的條件。

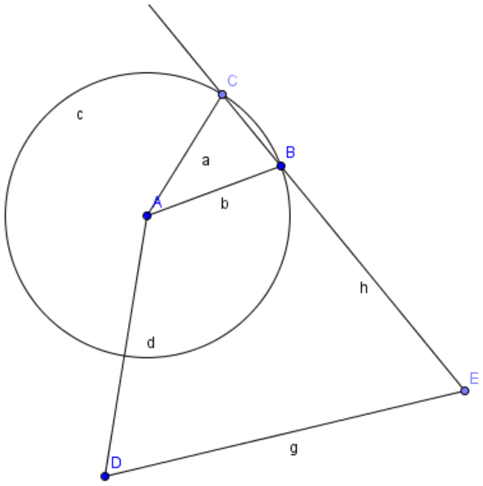
情況一：SSSS




右圖為一邊長相同的正方形以及菱形，符合SSSS的要求，但兩者形狀並不相同，所以SSSS 不能為全等的條件。

情況二: SSSA、SSAS、SSAA皆可以下圖做為說明

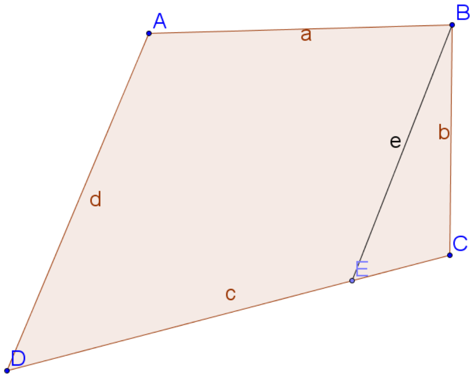



上圖有兩個四邊形CADE 及四邊形BADE。因為線段AC 及線段AB 為圓形的半徑，長度相同。又線段AD 、線段DE 為共用邊，∠BED 為共用角，兩個四邊形符合SSSA 的條件，但兩四邊形並非全等。由此可見SSSA 並非全等條件。

上圖有兩個四邊形CADE 及四邊形BADE。因為線段AC 及線段AB 為圓形的半徑，長度相同。又線段AD 、線段DE 為共用邊，∠ADE 為共用角，兩個四邊形符合SSAS 的條件，但兩四邊形並非全等。由此可見SSAS 並非全等條件。

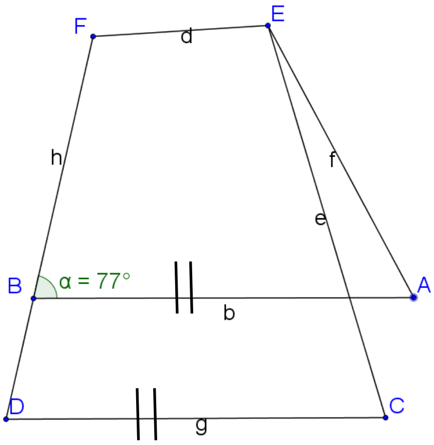
上圖有兩個四邊形CADE 及四邊形BADE。因為線段AC 及線段AB 為圓形的半徑，長度相同。又線段AD 為共用邊，∠ADE 及∠BED 為共用角，兩個四邊形符合SSAA 的條件，但兩四邊形並非全等。由此可見SSAA 並非全等條件。

情況三：SASA



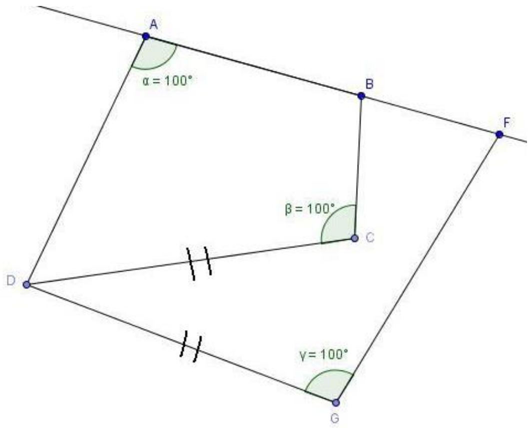

左圖有兩個四邊形BADC 及四邊形BADE。因為線段BA、線段AD 為共用邊又∠BAD為共用角，∠ADE＝ ∠ADC，兩個四邊形符合SASA 的條件，但兩四邊形並非全等。由此可見SASA 並非全等條件。又可以這樣說，就算∠BAD 和∠ADC 被固定，線段CD 和BC 的長度可以改變。如圖所示，線段BE 可以代替線段BC，形成兩個不全等四邊形。

情況四：SAAS



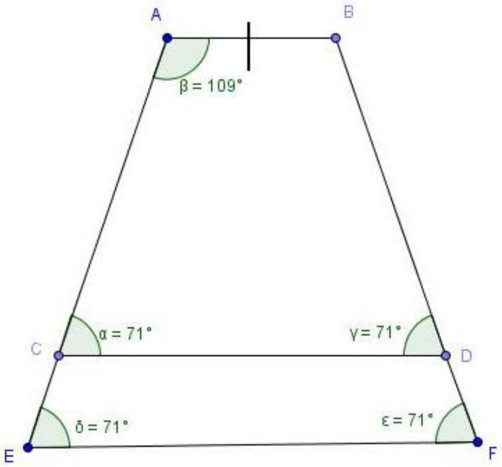

左圖有兩個四邊形 FBAE 及四邊形 FDCE。其中線段 AB＝ 線段 CD ，線段 AB ∥ 線段 CD。因為線段 EF 為共用邊又∠EFB＝ ∠EFD ，∠FBA＝ ∠FDC，線段 AB＝ 線段 CD，兩個四邊形符合 SAAS 的條件，但兩四邊形並非全等。由此可見 SAAS 並非全等條件。

情況五：ASSA




因 ASSA 中的條件沒有限制，線段 AF 和線段 GF 可以改變其長度。即使∠BCD 和線段 CD 被固定，∠ADG 的大小還是可以自由改變。如圖，四邊形 ABCD 可以變成四邊形 ADGF ，兩四邊形不全等。由此可見 ASSA 並非全等條件。

情況六：SAAA 和AAAA 可由下圖說明




因為四邊形的內角和一定是 360°，當三個角被固定後，第四個角已不能改變。但四邊形的其中三條邊都沒有被固定。如圖，四個角被固定後，線段 AC 和線段 BD 仍然可以延長。延長後，點 C 和點 D 的位置變成了點 E 和點 F，形成兩個不全等的四邊形 ACDB 和四邊形 AEFB。由此可見 SAAA 並非全等條件。

上圖兩四邊形符合AAAA 條件，但兩四邊形ACDB 和四邊形AEFB 並不全等，由此可見AAAA 並非全等條件。

小結論：

把「四個條件」(例如:SSSS、SSSA...)一一列出，經過以上分析後，可知沒有一種情況能確保繪出的四邊形是唯一的。換言之，「四個條件」並不能固定四邊形的形狀和大小。我便猜想 「四個條件能確定全等四邊形」的假設是錯誤的。

於是我便把條件增添為五個，而所有五個條件的情況共有三十二個（$2^5 = 32$ )，如下表所示：

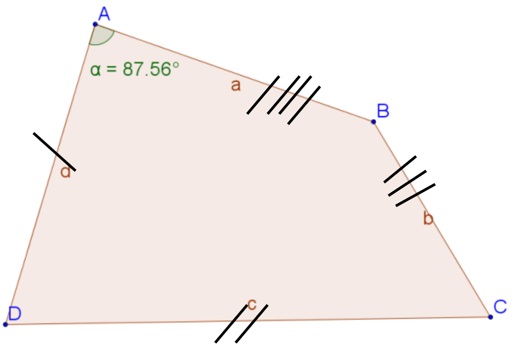
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| SSSSS | | | | | | | | | |
| SSSSA | SSSAS | SSASS | SASSS | ASSSS | | | | | |
| SSSAA | SSASA | SASSA | ASSSA | SSAAS | SASAS | ASSAS | SAASS | ASASS | AASSS |
| SSSAA | SSASA | SASSA | ASSSA | SSAAS | SASAS | ASSAS | SAASS | ASASS | AASSS |
| AAASS | AASAS | ASAAS | SAAAS | AASSA | ASASA | SAASA | ASSAA | SASAA | SSAAA |
| AAAAS | AAASA | AASAA | ASAAA | SAAAA | | | | | |
| AAAAA | | | | | | | | | |

以上眾多的情況中，有些在幾何上是不可能發生的。因為在四邊形中，我們只有四條邊長及四個內角。因此，不可能有SSSSS 和AAAAA 這兩個情況。又有很多情況在幾何上是等價的。把這此情況消去後，我們得出下表。

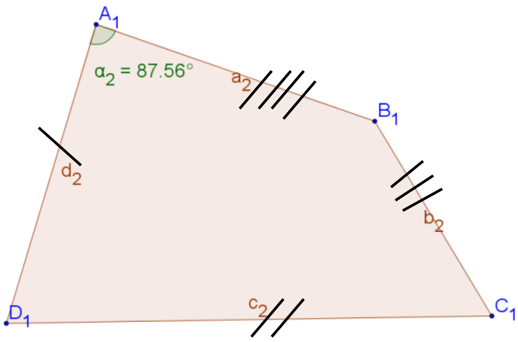
| | | | |
|---|---|---|---|
| SSSSA | | | |
| SSSAA | SSASA | SASSA | SASAS |
| AAASS | ASAAS | | |
| AAAAS | | | |

為了找出哪些條件可以確定全等，我嘗試把八種情況一一繪出，看看能否僅繪出一對應四邊形。若繪出多於一個四邊形，則此條件便不能作為全等的條件。

情況一: SSSSA

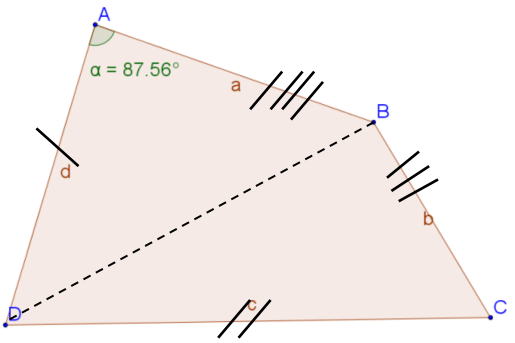



圖形1

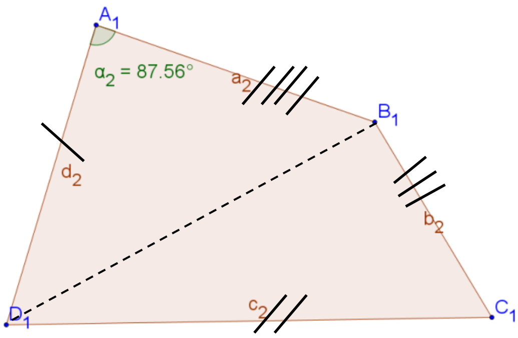



圖形2

以上全等的兩個圖形分別為四邊形ABCD 和四邊形$A_1B_1C_1D_1$ ，符合SSSSA 條件，證明如下：




圖形1

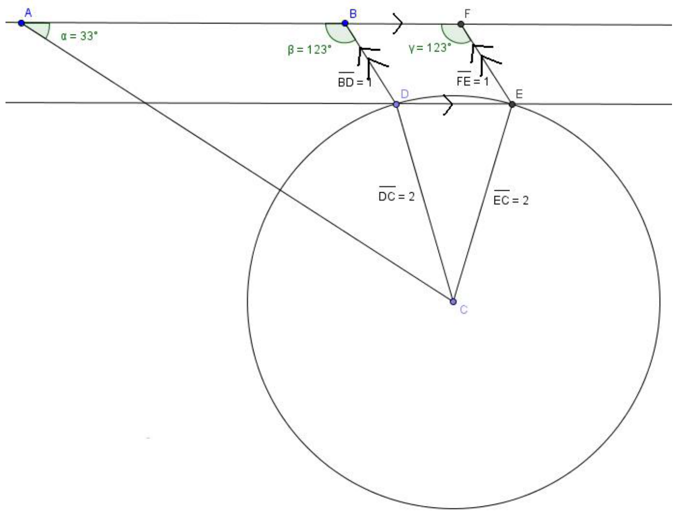



圖形2

把四邊形ABCD 分成兩個三角形△ABD 和△BCD ，△ABD 和△$A_1B_1D_1$ 符合SAS 全等條件。而在△BCD 和△$B_1C_1D_1$ 中，因為線段BD = 線段$B_1D_1$ (∵△ABD ≅ △$A_1B_1D_1$)符合SSS 全等條件。把兩個三角形相連，由於SSSS 條件的關係，邊長有固定次序，△BCD 並不能反轉。因此，形成的四邊形必定是全等的。

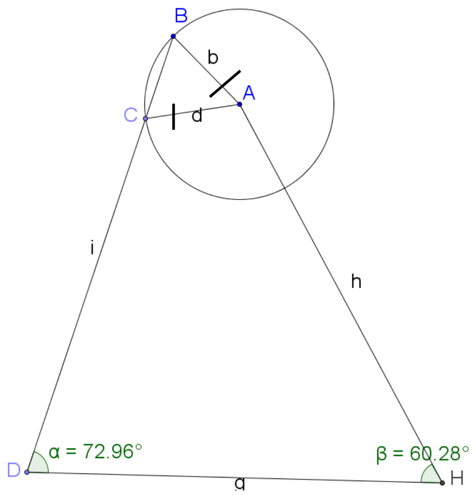
情況二: SSSAA

在這個情況下，我不能用切割四邊形(加對角線)的方法來証明全等。因為每一條對角線都會破壞其中一個內角，使我們沒有足夠資料繼續証明。因此，我便以Geogebra這個數學圖像程式，繪出相關的四邊形，再作証明。經過一連串的嘗試後，我得出了下圖。



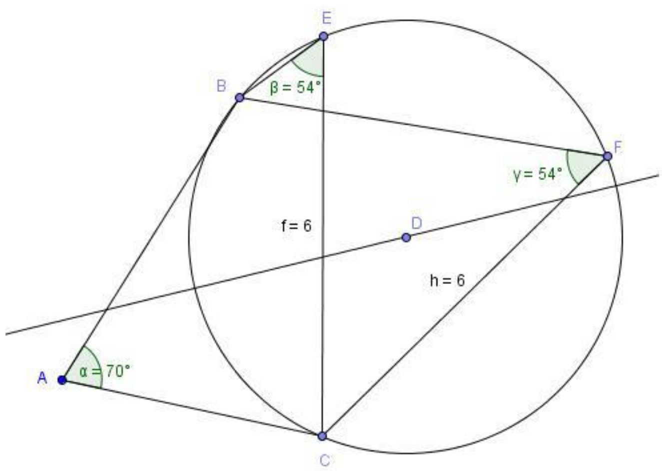

由左圖可見，在線段 AC 的長度和∠BAC 的大小是固定的情況下，還可以得出兩個四邊形 (ABDC 及 AFEC)。當中，線段 BD 和線段 FE、線段 CD 和線段 CE (半徑)的長度是一樣的，∠ABD 和∠AFE 的大小也是相等的。這兩個四邊形符合了 SSSAA 的要求，但它們並不是全等的。因此，SSSAA 並不能成為四邊形全等的條件。

情況三: SSASA



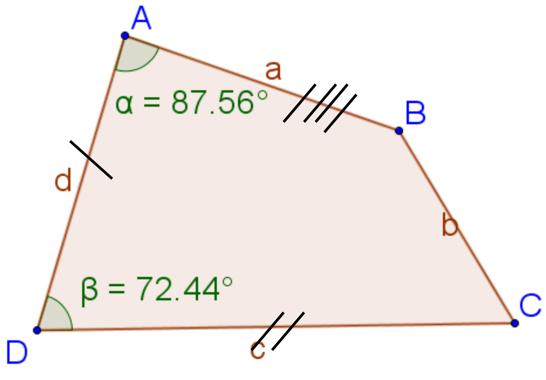

線段 AH 和線段 DH 的長度已固定，又線段 AB = 線段 AC (半徑)，但∠HAB 沒有被固定，線段 BD 的長度也可以改變。因此，四邊形 ABDH 和四邊形 ACDH 符合了 SSASA 的條件，所以 SSASA 這個條件不能確保全等四邊形。

情況四: SASSA

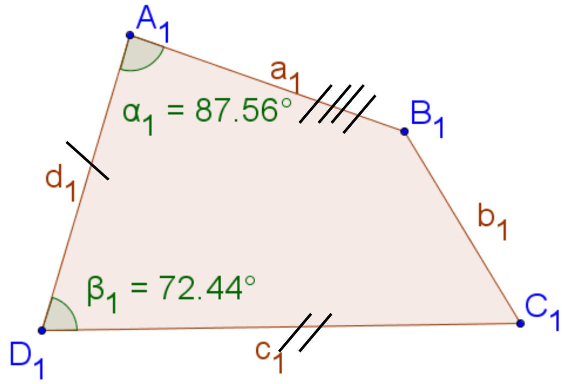



在四邊形 ABEC 和四邊形 ABFC 中，線段 AB 和線段 BC 為共用邊，線段 CE = 線段 CF ，∠BAC 為共用角，∠CEB = ∠CFB (∵對同弧的圓周角相等)，符合 SASSA 的條件，但兩四邊形不全等。由此可見，SASSA 並非全等條件。

情況五: SASAS

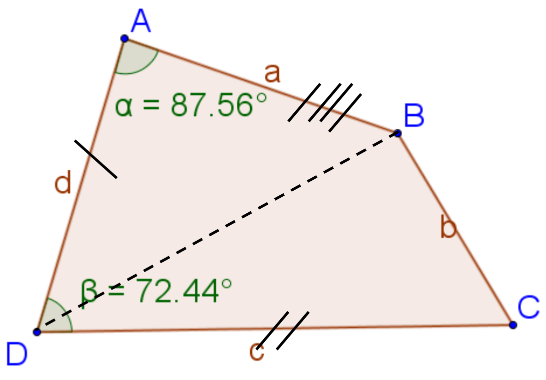



圖形1

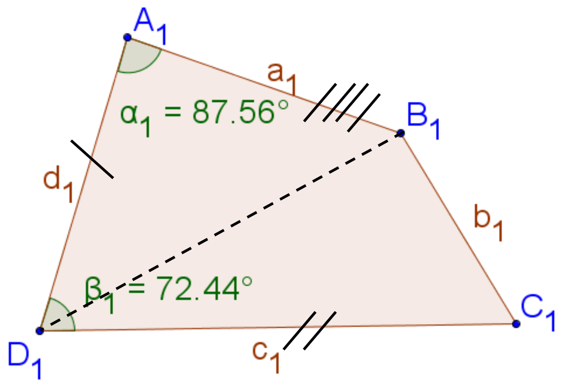



圖形2

以上全等的兩個圖形分別為四邊形ABCD 和四邊形$A_1B_1C_1D_1$，符合SASAS條件，證明如下：



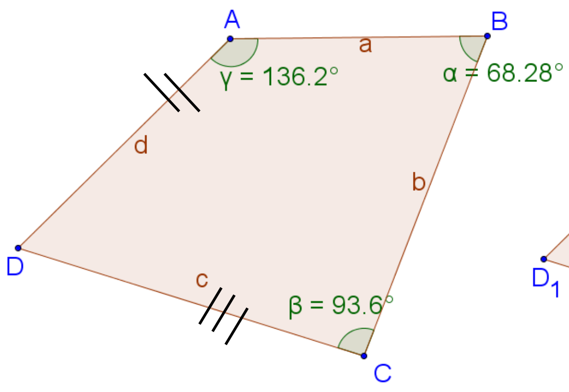

圖形1

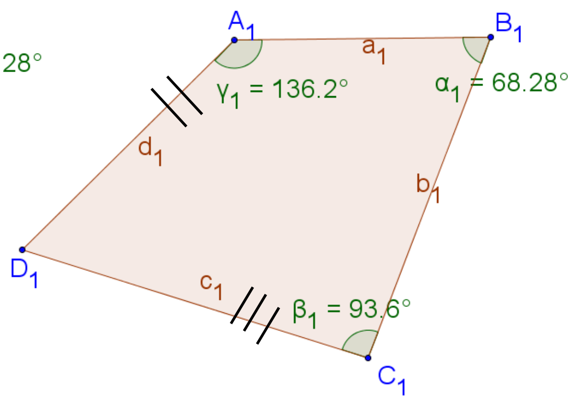



圖形2

把四邊形ABCD 分成兩個三角形△ABD 和△BCD ，△ABD 和△$A_1B_1D_1$ 符合SAS 全等條件。而在△BCD 和△$B_1C_1D_1$ 中，因為線段BD = 線段$B_1D_1$ (∵△ABD ≅ △$A_1B_1D_1$) ，線段CD = 線段$C_1D_1$ ，∠BDC = ∠$B_1D_1C_1$ (∵∠ADB = ∠$A_1D_1B_1$) 符合SAS 全等條件。把兩個三角形相連，由於∠ADC 是固定的關係，△BCD 並不能反轉。因此，形成的四邊形必定是全等的。

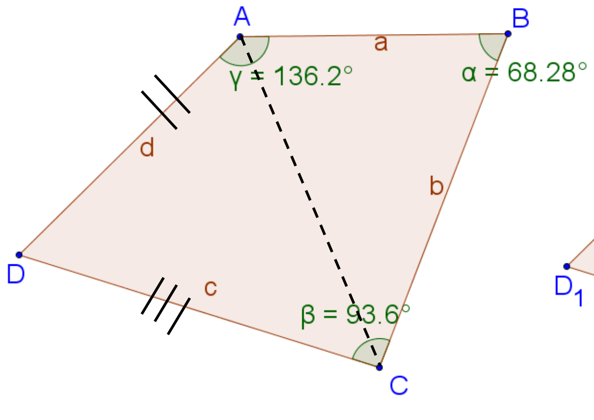
情況六: AAASS

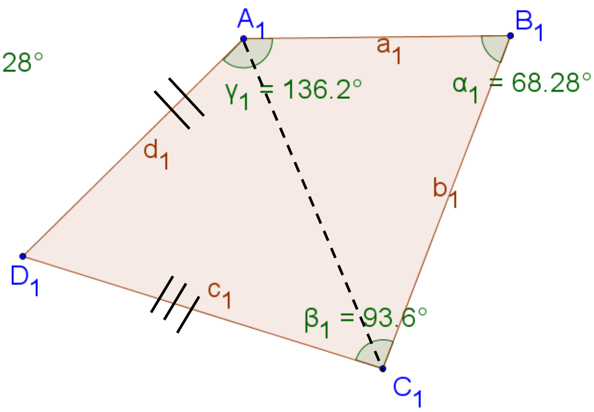


圖形1　　　　　　　　　　　　圖形2

以上全等的兩個圖形分別為四邊形ABCD 和四邊形$A_1B_1C_1D_1$ ，符合AAASS條件，證明如下：

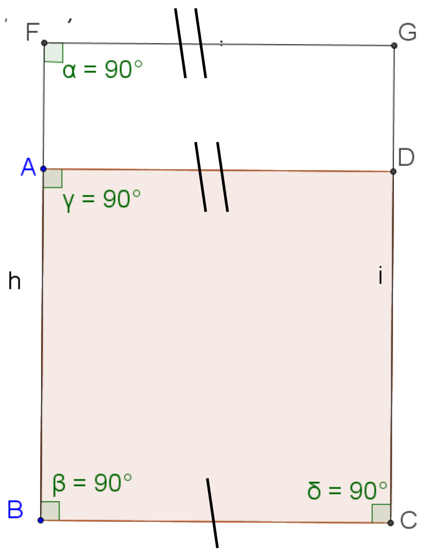



圖形1　　　　　　　　　　　　圖形2

把四邊形ABCD 分成兩個三角形△ABC 和△ACD ，因為兩個四邊形的其中三個角被固定，而四邊形的內角和等於360°，所以第四個角被固定了(∠ADC = ∠$A_1D_1C_1$)，又線段AD = 線段$A_1D_1$，線段CD = 線段$C_1D_1$ ，因此 △ACD 和△$A_1C_1D_1$ 符合SAS 全等條件。而在△ABC 和△$A_1B_1C_1$ 中，因為線段AC = 線段$A_1C_1$ (∵△ACD ≅ △$A_1C_1D_1$) ，∠BAC = ∠$B_1A_1C_1$ (∵∠BAD = ∠$B_1A_1D_1$) ，∠ACB = ∠$A_1C_1B_1$ (∵∠DCB = ∠$D_1C_1B_1$) 符合ASA 全等條件。把兩個三角形相連，由於∠ABC 、∠BAD 和∠DCB 是固定的關係，△ABC 並不能反轉。因此，形成的四邊形必定是全等的。

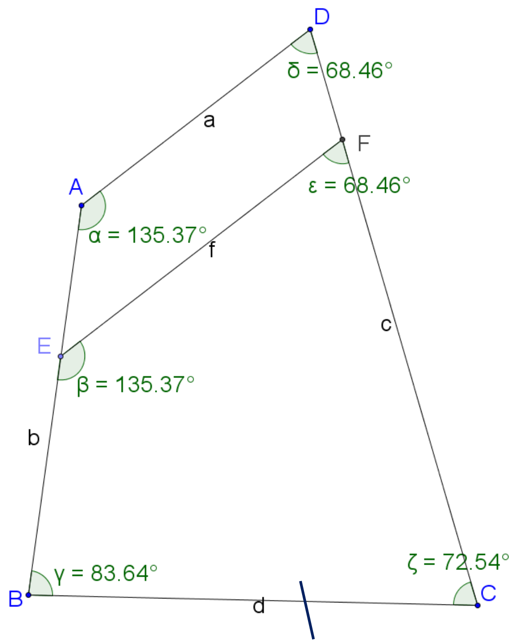
情況七: ASAAS




在四邊形 ABCD 和四邊形 FBCG 中，線段 BC 為共用邊，線段 AD = 線段 FG ，∠ABC、∠DCB 為共用角，∠DAB = ∠GFB (∵線段 AD ∥ 線段 FG)，符合 ASAAS 的條件，但兩四邊形不全等。由此可見，ASAAS 並非全等條件。

情況八: AAAAS

在四邊形 ABCD 和四邊形 EBCF 中，線段 BC 為共用邊，∠ABC、∠DCB 為共用角，∠FEB = ∠DAB 、∠ADF = ∠EFC (∵線段 AD ∥ 線段 EF)，符合 AAAAS 的條件，但兩四邊形不全等。由此可見，AAAAS 並非全等條件。




小結論：

把「五個條件」(例如:SSSSA、SSSAA...)一一列出，經過以上分析後，可知只有SSSSA、SASAS 及AAASS 可以確保繪出的四邊形是唯一的。換言之，只要給出這四種「五個條件」，就可以做出全等四邊形。

## 參●結論

經由上述的分析後，兩個四邊形最少需要五個條件才能做成全等。全等的條件有三個分別是SSSSA、SASAS 及AAASS，但它們分別都有與其他條件等價的情況。以AAASS 為例，與它等價的情況有七個，分別是AASAS、SAAAS、AASSA、ASASA、ASSAA、SASAA 及SSAAA。而與SSSSA 等價的情況有ASSSS、SASSS、SSASS 及SSSAS，共四個。換言之，四邊形全等的情況共有十四個。因為以上的「五個條件」已能得出全等四邊形，我就沒有需要考慮六個或更多的條件來做成全等四邊形。

本研究利用Geogebra這個數學圖像程式，將無法用切割四邊形的情況證明的圖形繪出反例，使得證明過程更為簡便容易。但美中不足的地方是沒有繼續討論凹四邊形的全等條件，如果有多餘的時間便可繼續研究下去，使得研究更完整周密。

## 肆●參考文獻


一、鄭天心、張凌峰、何俊傑、許浩峰、葉廣平(2009)。全等四邊形。取自 http://www.imohkc.org.hk/UPFILE/Editorfile/files/%E5%85%A8%E7%AD%89%E5%9B%9B%E9%82%8A%E5%BD%A2.pdf

二、王春輝、劉海燕(2006)。四邊形全等的判定。取自 http://zhongxue.wx216.com/jsckao/9166.html