投稿類別：數學類

篇名：
黃金比例之研究

作者：
許哲嘉。高雄中學。高二 24 班

指導老師：
黃仁杰老師

壹●前言

不論什麼事物，人們總是期盼最完美，遂有「黃金比例」一詞之說。在生活中經常聽聞他人說身材的黃金比例、建築的黃金比例等，因此對於這個課題產生興趣。再上網查閱資料後，又發現許多自然界符合黃金比例的奧妙、古代人的生活科學中處處充斥著黃金比例、近代一些特別的數列與級數，因此決定研究這個完美的比例並呈現其生活上的應用。

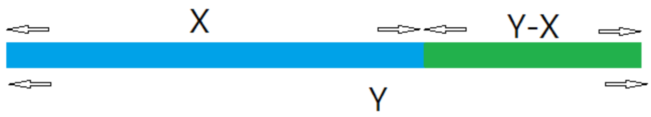
貳●正文

一、黃金比例的由來

將一條線分成兩部分，較長段與較短段之比等於全長與較長段之比，而這樣的比例大約是 1.618：1。古代數學家便曾發現過曾這種比例關係就可以構出和諧的圖案，依這種比例所組成的事物都顯得特別的勻稱與均衡。

二、推導

(一)線段上的比例中項



1.基本概念

我們希望能夠讓整段線段比上藍色線段之比等於藍色線段比上綠色線段之比，此時的 Y:X 即為黃金比例。

2.演算

$$Y:X = X:(Y-X)$$

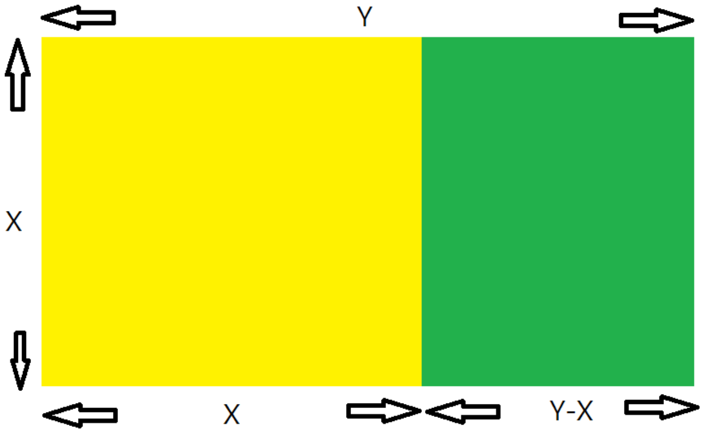
$$X^2 = Y^2 - YX \qquad \cdots\cdots 同除 X^2$$

$$\left(\frac{Y}{X}\right)^2 - \left(\frac{Y}{X}\right) - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots 令\ \frac{Y}{X} = A$$

利用一元二次方程式公式解得 $\frac{Y}{X} = A = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4*1*(-1)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 取正

故黃金比例 $\frac{Y}{X}$ or $\frac{X}{Y}$ $=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ or $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 約為 1.618 或 0.618

(二)長方形的相似



1.基本概念

我們希望能夠讓綠色的小長方形與整塊長方形相似，此時的 Y:X 即爲黃金比例。

2.演算

$\mathbf{Y:X = X:(Y - X)}$

其餘過程同上

解得黃金比例 $\frac{Y}{X}$ or $\frac{X}{Y}$ $=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ or $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 約爲 1.618 或 0.618

三、與數列級數的關係

(一)費氏數列

1.費氏數列起源

費波納契首先研究以下兔子的生育問題：假設兔子永不死去，第一個月有一對剛誕生的小兔子，第二個月之後牠們變爲成兔並生育一對小兔子，每月每對可生育的成兔會誕生下一對新兔子。

2.一般項推導

已知 $a_1 = 1$；$a_2 = 1$；$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 推導a_n**的一般項**：

特徵方程式$x^2 = x + 1$

解得 $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

假設一般項$a_n = A * (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B * (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ 其中 A、B 爲待定常數

利用已知$a_1 = 1$；$a_2 = 1$

解二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}A + \frac{1-\sqrt{5}}{2}B = 1 \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 A + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 B = 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

所以費氏數列一般項

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} * (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}} * (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

3.與黃金比例的關聯

費氏數列中，當$n \to \infty$，$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$=黃金比例≒1.618

pf：先以觀察法呈現

令$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

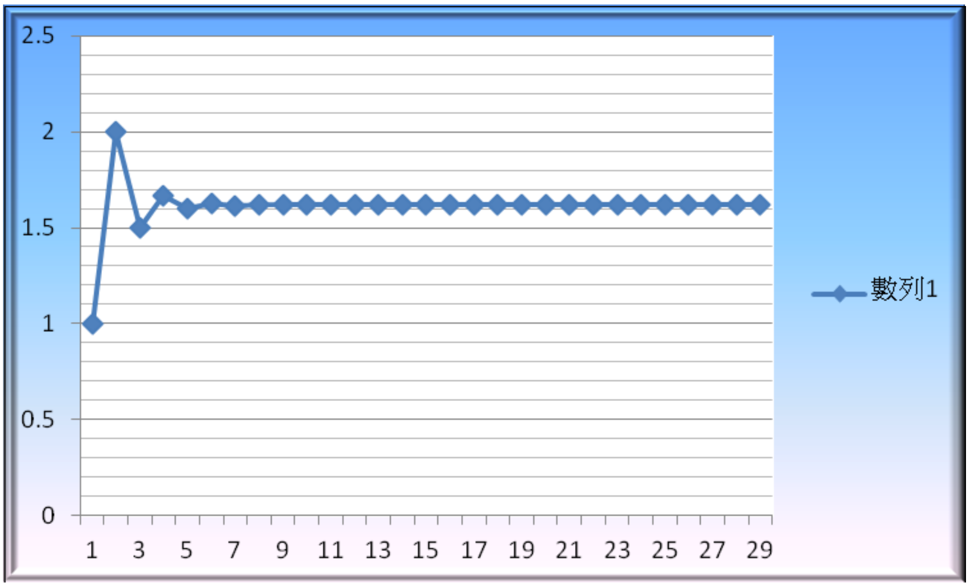
費氏數列前面幾項如下

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233

則(取小數點後五位)

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}
1	2	1.5	1.66666	1.6	1.625	1.61538	1.61904	1.61764	1.61818

作一圖表發現其值漸漸逼近 1.618034，近似於黃金比例



接著以數學證明之

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}*(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}*(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}}*(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}*(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n}}$$

$$= \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^{n} - (1-\sqrt{5})^{n}}\right)$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} * \left(\frac{(1+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})}\right) * \left(\frac{(1+\sqrt{5})^{n} + (1+\sqrt{5})^{n-1}*(1-\sqrt{5})^{1} + \cdots\cdots + (1+\sqrt{5})^{1}*(1-\sqrt{5})^{n-1} + (1-\sqrt{5})^{n}}{(1+\sqrt{5})^{n-1} + (1+\sqrt{5})^{n-2}*(1-\sqrt{5})^{1} + \cdots\cdots + (1+\sqrt{5})^{1}*(1-\sqrt{5})^{n-2} + (1-\sqrt{5})^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} * \left(1+\sqrt{5} + \frac{(1-\sqrt{5})^{n}}{(1+\sqrt{5})^{n-1} + (1+\sqrt{5})^{n-2}*(1+\sqrt{5})^{1} + \cdots\cdots + (1+\sqrt{5})^{1}*(1+\sqrt{5})^{n-2} + (1+\sqrt{5})^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} * \left(1+\sqrt{5} + \frac{(1-\sqrt{5})^{n}}{\frac{(1+\sqrt{5})^{n} - (1-\sqrt{5})^{n}}{(1+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} * \left(1+\sqrt{5} + \frac{(1-\sqrt{5})^{n}*(2\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})^{n} - (1-\sqrt{5})^{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} * \left(1+\sqrt{5}\right) + \sqrt{5} * \frac{1}{\frac{(1+\sqrt{5})^{n} - (1-\sqrt{5})^{n}}{(1-\sqrt{5})^{n}}}$$

$$= \frac{1}{2} * \left(1+\sqrt{5}\right) + \sqrt{5} * \frac{1}{\frac{(1+\sqrt{5})^{n}}{(1-\sqrt{5})^{n}} - 1}$$

接著就 $\frac{1}{(\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}})^{n}-1}$ 之值討論

經計算知 $\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \fallingdotseq -2.618$，其絕對值大於 1

$\because n \to \infty$

$\therefore (\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}})^{n}$ 趨近於正無限大或負無限大

$\therefore (\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}})^{n} - 1$ 也趨近於正無限大或負無限大

$\therefore \frac{1}{\frac{(1+\sqrt{5})^{n}}{(1-\sqrt{5})^{n}}-1}$ 趨近於零

所以 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$=黃金比例≒1.618，得證。

(二)利用連分數表達

黃金比例亦可表達為 $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1\ldots}}}}$

說明：當只有一層連分數時 $\frac{1}{1}=\frac{a_1}{a_2}$

兩層時 $\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{1}{2}=\frac{a_2}{a_3}$

三層時 $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}=\frac{a_3}{a_4}$

四層時 $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}=\frac{a_4}{a_5}$

依此可知 第 $n\to\infty$ 層時 $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1\dots}}}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618$

(三)利用根號表達

黃金比例亦可表達爲 $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\dots\dots}}}}}$

說明：

令 T= $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\dots\dots}}}}}$

1.證明 T 的上界爲 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

定義 $\langle L_n\rangle=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\dots\dots}}}}}$ 其中 n 表示根號的層數

當 n = 1 時 $\sqrt{1}=1<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 成立

假設 n = k 時 $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\dots\dots}}}}}$ (k 層根號) $<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 成立

當 n = k+1 時 $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots\cdots}}}}}$ (k+1 層根號)

$$= \sqrt{1+\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots\cdots}}}}}\text{(k 層根號)}\right)}$$

$$< \sqrt{1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

根據數學歸納法原理 $\langle L_n \rangle < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 其中 n 爲正整數

2.證明 T 的遞增姓

即證明 $L_n < L_{n+1}$

當 n = 1 時 $L_1 = \sqrt{1} < L_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}} = \sqrt{2}$ 成立

假設 n = k 時 $L_k < L_{k+1}$成立

當 n = k+1 時 $L_{k+2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots\cdots}}}}}$ (k+2 層根號)

= $\sqrt{1+L_{k+1}} > \sqrt{1+L_k} = L_{k+1}$ 亦成立

根據數學歸納法原理 $L_n < L_{n+1}$ 其中 n 爲正整數

3.已知單調遞增且有上界，必收斂

計算其值：

$$\sqrt{1+T} = T$$

$$1+T = T^2$$

$T = \frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}$ 已知 T>1 取正

故 $T = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 得證

(四)利用三角函數表達

(1) $1+\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

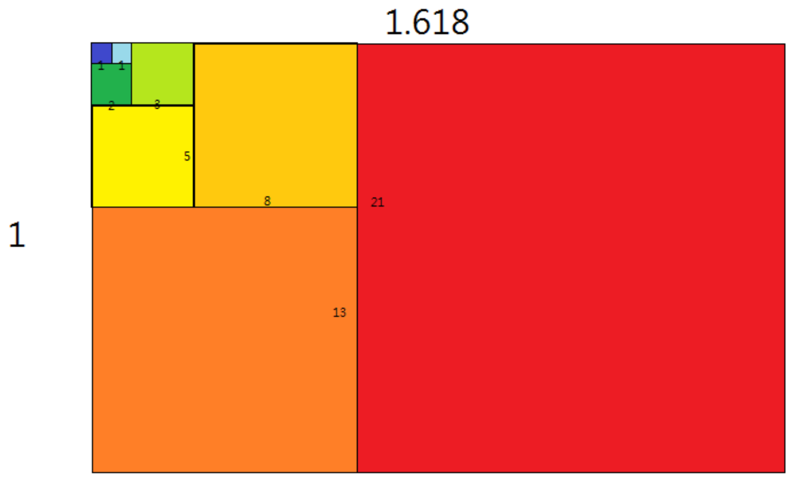
(2) $\frac{1}{2}\csc 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(3) $2\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

四、各種黃金圖形

(一)黃金矩形

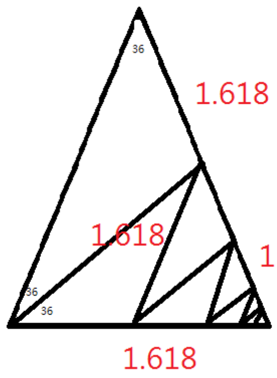
其邊長比例符合黃金比(即$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$)，且內部正方形呈費氏數列(下圖僅畫出某幾層，n=8)



(二)黃金三角形

令角平分線的短邊爲 1，長邊爲 X，由內分比性質可知

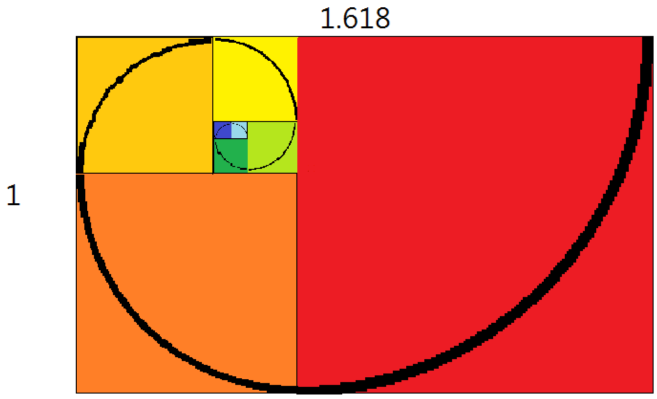
$\frac{X}{1}=\frac{X+1}{X}$　　解得 X 爲$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，即黃金比例



(註)黃金三角形爲頂角36°、底角72°的等腰三角形

(三)鸚鵡螺螺旋

可由黃金矩形繪得，原理與黃金矩形相似

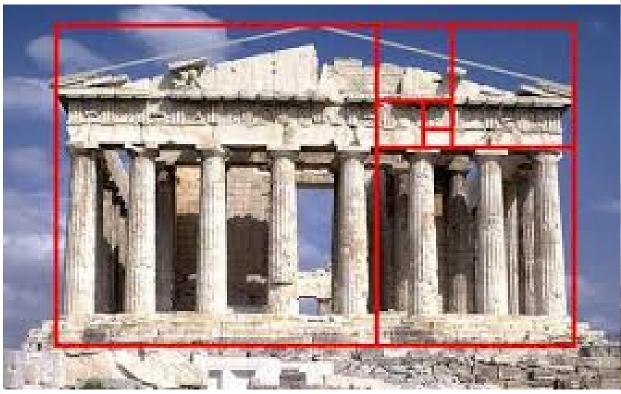


五、生活實例

黃金比例於生活中不勝枚舉，以下簡單舉幾個例子：

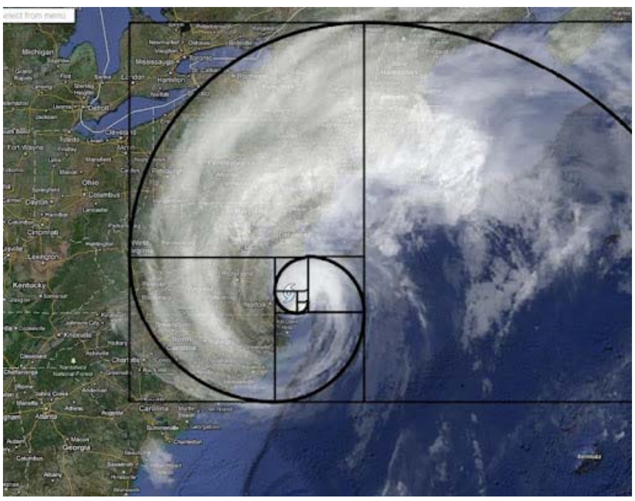
(一)建築

黃金矩形可見於此古希臘遺跡中，以及許多現代建築



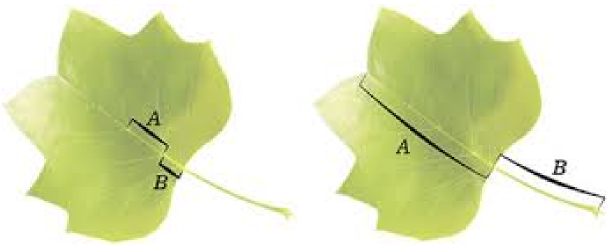

(二)天候

風暴中亦可見黃金比例



(三)生物

黃金比例見於形形色色的生物之中



參●結論

黃金比例充斥著我們的生活，不論那些方面，皆爲我們帶來無比的和諧，以下總結上述內容：

一、黃金比例爲 $x^2 - x - 1 = 0$之正解，約爲 1.618，可由分割獲得

二、黃金比例爲費氏數列第a_{n+1}項與第a_n項之比值，其中 n 近於無限大

三、可利用連分數、根號、三角函數表示

四、黃金矩形等圖形裡頭蘊含著黃金比例

除了這些數學上的理論及自然界觀察得的現象，未來除了希望再深入探討其他數列與黃金比例的關係以及發現生活中其他的黃金比，更期盼能透過黃金比例這樣神奇的比例爲我們的生活帶來更多便利與和諧。

肆●引註資料

http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%BB%84%E9%87%91%E5%88%86%E5%89%B2%E7%8E%87#1

http://0123456789.tw/?p=549

http://www.tychurch.org.tw/bible/04-5.htm

http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%96%90%E6%B3%A2%E9%82%A3%E5%A5%91%E6%95%B0%E5%88%97

http://ronaldchik.blogspot.tw/2012/07/blog-post_24.html

http://www1.mtjh.kh.edu.tw/~t394/math/g1/gold.htm

書籍：　黃金比例：1.61803......的祕密