

投稿類別：數學類

篇名：

鬼腳圖之起點與終點的關聯性

作者：

郭維哲。高雄市立高雄中學。高二24班

指導老師：

黃仁杰 老師

壹●前言

一、研究動機

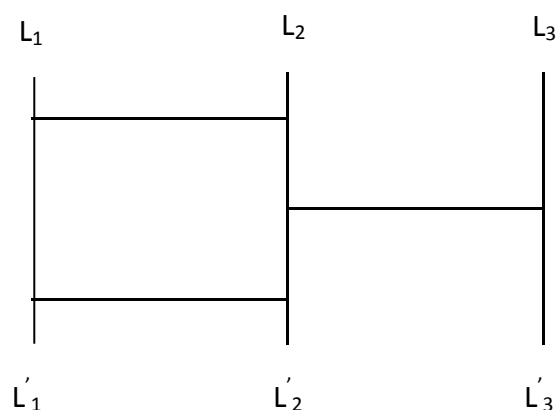
在與同學互相討論具有研究價值的數學題目時，認識到了平時常見但不知道真正名稱的遊戲—鬼腳圖，也知曉許多有趣的題目，腦海中忽然靈光一閃，每次玩鬼腳圖，簡單的很快就輕鬆破解，但複雜的只能按部就班地一線一線劃到底才知道結果，那有沒有辦法直接依照鬼腳圖的組成，例如:3直4橫，探討哪一點是相對應終點的機率最高。

二、研究目的與方法

鬼腳圖，或許大部分人都曾經玩過但不知道它的名稱，有以下規定:

- 1.碰到節點就要轉朝該方向下移動。
- 2.行進過程中只能往下或平行移動。

圖例: (3直3橫)



有以下定義:

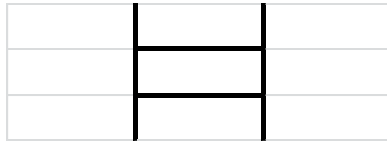
- 一個 n 直 m 橫的鬼腳圖可分解為 n 條鉛直線 m 條水平線。
- 其中鉛直線上方的起點由右到左依序為 L_1 、 L_2 、 L_3 、 $L_4 \sim L_n$ 。
- 而在鉛直線下方的終點由右到左依序為 L'_1 、 L'_2 、 L'_3 、 $L'_4 \sim L'_n$ 。

在本次研究中主要探討「相對應終點的機率」。

例如:「若從 L_1 開始往下走，則在所有3直3橫的鬼腳圖中，走到 L'_1 、 L'_2 、 L'_3 哪一點當終點的結果數最多?」

而本次分析的鬼腳圖種類有: 3直4橫、3直5橫、4直4橫、4直5橫。

再將以上種類的鬼腳圖分別列出所有的結構。例如:3直5橫有 2^5-2 個不同的結構。將列出後的結構簡化(去 H 字形)分類後得到若干簡圖，每一種簡圖對應至少一個結構。(因不影響行進方向，故可簡化如下圖之區域，使圖形更加簡單)



再統整出簡圖上每一個起點至所有的終點分別對應幾個結構。

例如:「在3直4橫的鬼腳圖中,從 L_1 會走到 L'_1 的有4個結構、走到 L'_2 的有5個結構、走到 L'_3 的有5個結構。」

最後找出隱藏在不同種類的鬼腳圖中但卻是共有的規律。

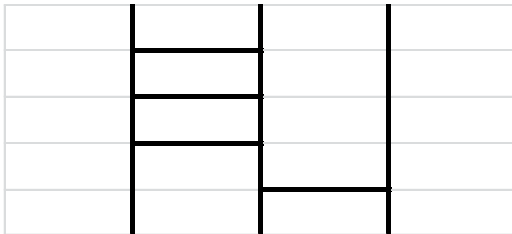
貳●正文

一. 3直4橫鬼腳圖

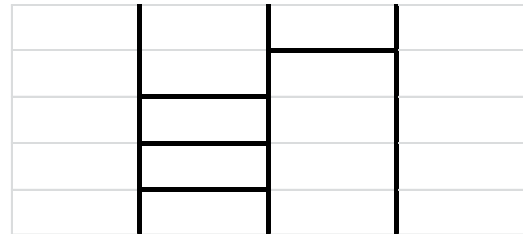
$$\text{結構數} = 2^4 - 2 = 14 \text{種}$$

所有結構圖:

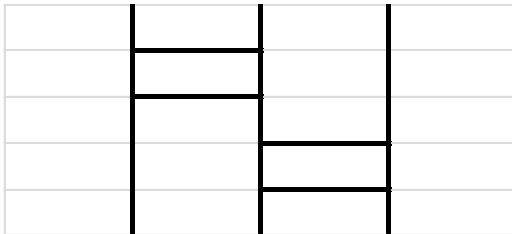
①



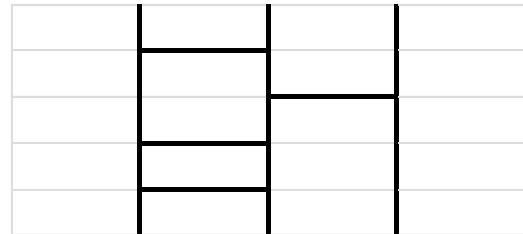
⑥



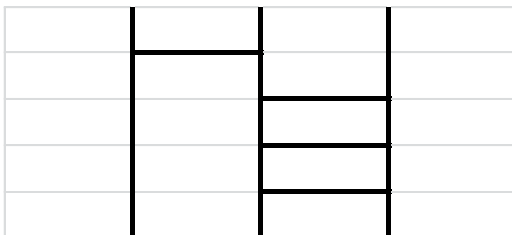
②



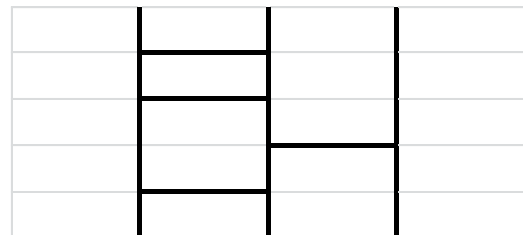
⑦



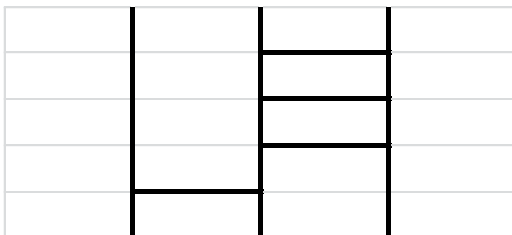
③



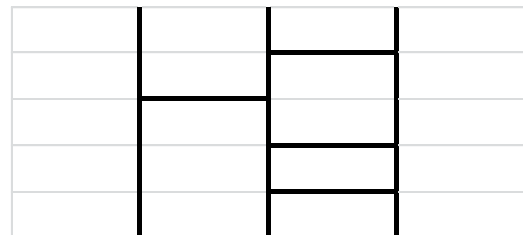
⑧



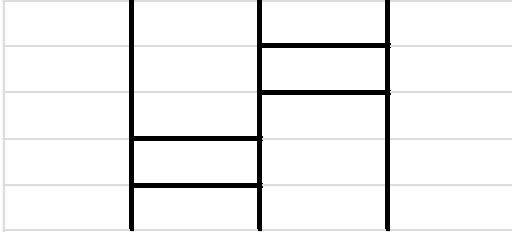
④



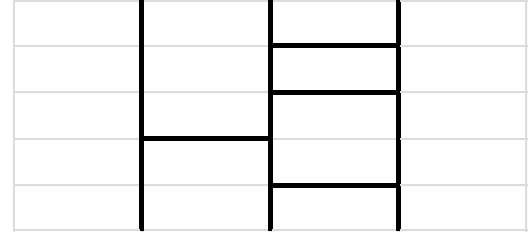
⑨



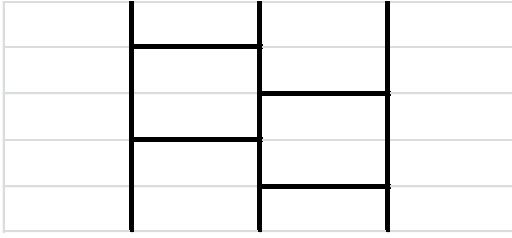
⑤



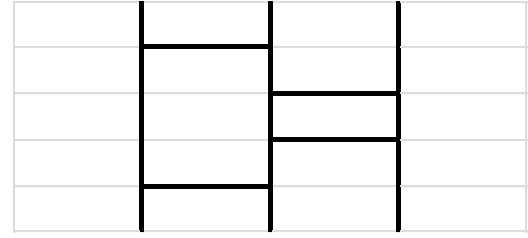
⑩



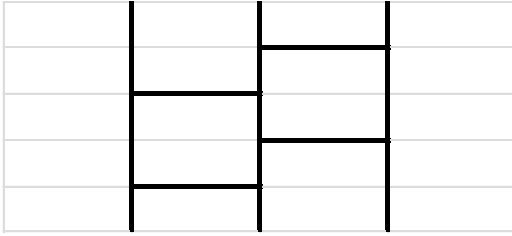
⑪



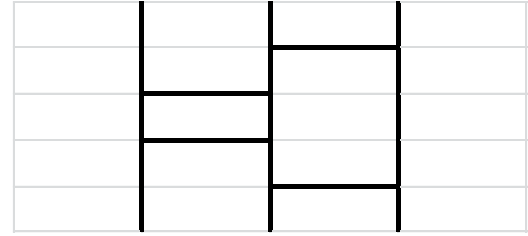
⑬



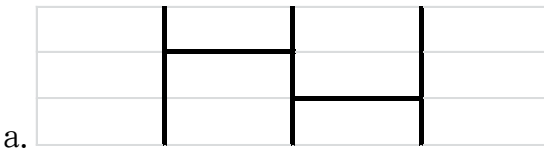
⑫



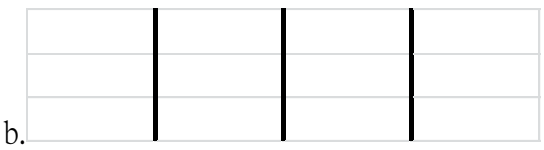
⑭



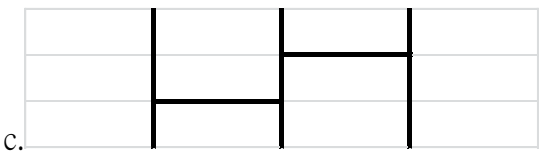
簡圖:



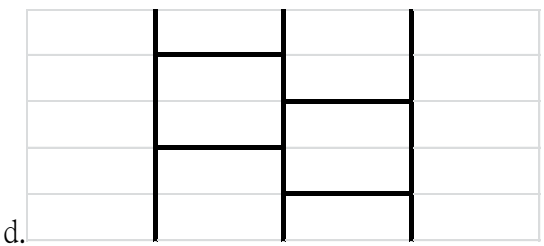
原:①、③、⑦、⑩



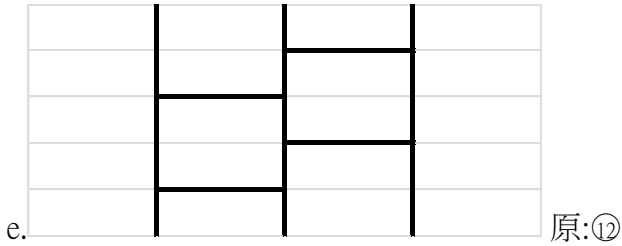
原:②、⑤、⑫、⑭



原:④、⑥、⑧、⑨



原:⑪



✚ 分析 L_1 起點的結果:

從 L_1 走到 L'_1 :簡圖 b. → 4個結構(②、⑤、⑫、⑭)

從 L_1 走到 L'_2 :簡圖 c.、簡圖 d. → 5個結構(④、⑥、⑧、⑨、⑪)

從 L_1 走到 L'_3 :簡圖 a.、簡圖 e. → 5個結構(①、③、⑦、⑩、⑫)

✚ 分析 L_2 起點的結果:

從 L_2 走到 L'_1 :簡圖 a.、簡圖 e. → 5個結構(①、③、⑦、⑩、⑫)

從 L_2 走到 L'_2 :簡圖 b. → 4個結構(②、⑤、⑫、⑭)

從 L_2 走到 L'_3 :簡圖 c.、簡圖 d. → 5個結構(④、⑥、⑧、⑨、⑪)

✚ 分析 L_3 起點的結果:

從 L_3 走到 L'_1 :簡圖 c.、簡圖 d. → 5個結構(④、⑥、⑧、⑨、⑪)

從 L_3 走到 L'_2 :簡圖 a.、簡圖 e. → 5個結構(①、③、⑦、⑩、⑫)

從 L_3 走到 L'_3 :簡圖 b. → 4個結構(②、⑤、⑫、⑭)

製成表格如下:

起點 \ 終點	L'_1	L'_2	L'_3
L_1	4	5	5
L_2	5	4	5
L_3	5	5	4

經由以上分析可得到以下結論:

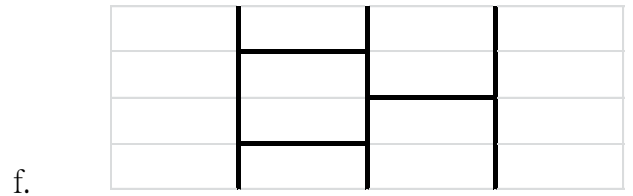
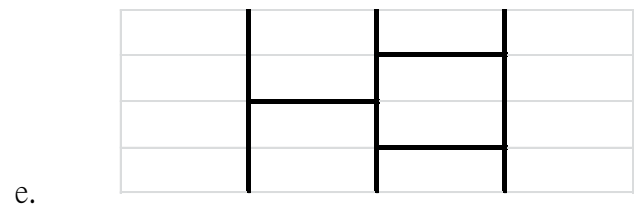
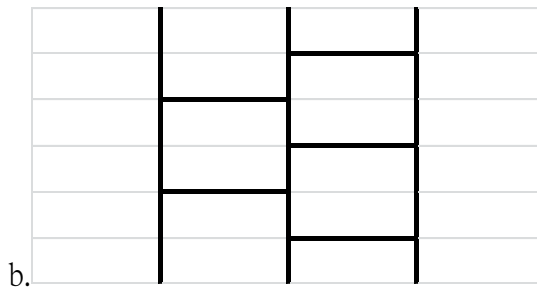
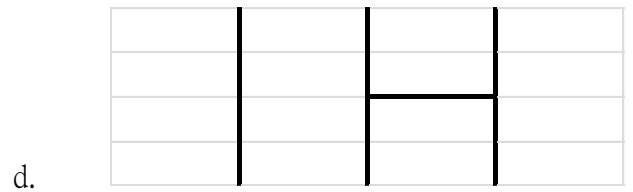
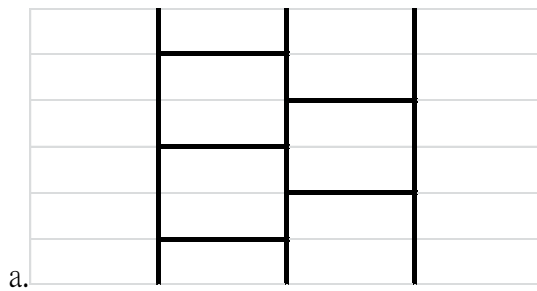
1. 從 L_1 走到 L'_1 、從 L_2 走到 L'_2 、從 L_3 走到 L'_3 結構數最少
2. 由起點走到非位於同一直線上之終點機率較高(結構數較多)

二. 3直5橫鬼腳圖

結構數 = $2^5 - 2 = 30$ 種

(由於結構數高於20因此本處改呈現簡圖與對應之結構數。)

簡圖:



其中:

- 簡圖 a : 共1個結構簡化後之結果。
- 簡圖 b : 共1個結構簡化後之結果。
- 簡圖 c : 共9個結構簡化後之結果。
- 簡圖 d : 共9個結構簡化後之結果。
- 簡圖 e : 共5個結構簡化後之結果。
- 簡圖 f : 共5個結構簡化後之結果。

✚ 分析 L_1 起點的結果:

- 從 L_1 走到 L'_1 : 簡圖 a、簡圖 d. → 10個結構數
- 從 L_1 走到 L'_2 : 簡圖 b、簡圖 c. → 10個結構數
- 從 L_1 走到 L'_3 : 簡圖 a、簡圖 e. → 10個結構數

✚ 分析 L_2 起點的結果:

- 從 L_2 走到 L'_1 : 簡圖 b、簡圖 c. → 10個結構數
- 從 L_2 走到 L'_2 : 簡圖 e、簡圖 f. → 10個結構數
- 從 L_2 走到 L'_3 : 簡圖 a、簡圖 d. → 10個結構數

✚ 分析 L_3 起點的結果:

從 L_3 走到 L'_1 : 簡圖 e.、簡圖 f. → 10個結構數

從 L_3 走到 L'_2 : 簡圖 a.、簡圖 d. → 10個結構數

從 L_3 走到 L'_3 : 簡圖 b.、簡圖 c. → 10個結構數

製成表格如下:

起點 \ 終點	L'_1	L'_2	L'_3
L_1	10	10	10
L_2	10	10	10
L_3	10	10	10

結論:

1. 在3直5橫的鬼腳圖中，每一起點走到任意終點之機率相同。

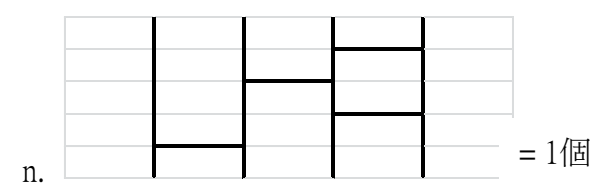
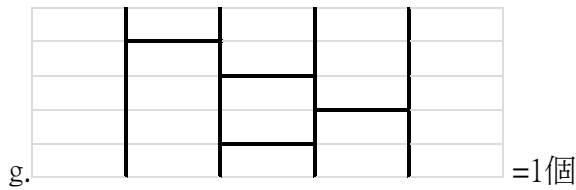
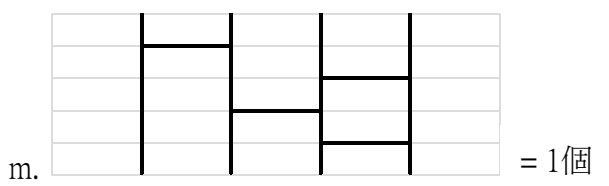
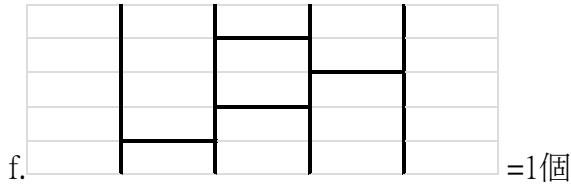
2. 任意起點走到特定終點之機率相同。

三. 4直4橫鬼腳圖

結構數 = 21 (由於結構數高於20因此本處改呈現簡圖與對應之結構數。)

簡圖:

<p>a. = 1個</p>	<p>h. = 1個</p>
<p>b. = 2個</p>	<p>i. = 1個</p>
<p>c. = 1個</p>	<p>j. = 1個</p>
<p>d. = 2個</p>	<p>k. = 2個</p>



✚ 分析 L_1 起點的結果:

從 L_1 走到 L'_1 : 簡圖 b、d → 4個結構數

從 L_1 走到 L'_2 : 簡圖 e、f、l、n → 8個結構數

從 L_1 走到 L'_3 : 簡圖 c、h、i、k → 5個結構數

從 L_1 走到 L'_4 : 簡圖 a、g、j、m → 4個結構數

✚ 分析 L_2 起點的結果:

從 L_2 走到 L'_1 : 簡圖 e、g、k、m → 8個結構數

從 L_2 走到 L'_2 : 簡圖 a、c、i、j → 4個結構數

從 L_2 走到 L'_3 : 簡圖 d、l → 4個結構數

從 L_2 走到 L'_4 : 簡圖 b、f、h、n → 5個結構數

✚ 分析 L_3 起點的結果:

從 L_3 走到 L'_1 : 簡圖 a、h、j、l → 5個結構數

從 L_3 走到 L'_2 : 簡圖 b、k → 4個結構數

從 L_3 走到 L'_3 : 簡圖 f、g、m、n → 4個結構數

從 L_3 走到 L'_4 : 簡圖 c、d、e、i → 8個結構數

✚ 分析 L_4 起點的結果:

從 L_4 走到 L'_1 : 簡圖 c、f、i、n → 4個結構數

從 L_4 走到 L'_2 : 簡圖 d、g、h、m → 5個結構數

從 L_4 走到 L'_3 : 簡圖 a、b、e、j → 8個結構數

從 L_4 走到 L'_4 : 簡圖 k、l → 4個結構數

表格如下:

起點\終點	L' ₁	L' ₂	L' ₃	L' ₄
L ₁	4	8	5	4
L ₂	8	4	4	5
L ₃	5	4	4	8
L ₄	4	5	8	4

結論:

1. 每一個起點至其中一個對應終點的機率會高出許多。
2. 除了特別高的機率走向特定一點外，走向其他終點的機率相近。

四. 4直5橫鬼腳圖

結構數=77種 (因為結構數及簡圖數量過多不利於呈現，因此直接分析結果)

✚ 分析L₁起點的結果:
從L₁走到L'₁ :18個結構數
從L₁走到L'₂ :26個結構數
從L₁走到L'₃ :19個結構數
從L₁走到L'₄ :13個結構數

✚ 分析L₂起點的結果:
從L₂走到L'₁ :28個結構數
從L₂走到L'₂ :15個結構數
從L₂走到L'₃ :16個結構數
從L₂走到L'₄ :18個結構數

✚ 分析L₃起點的結果:
從L₃走到L'₁ :18個結構數
從L₃走到L'₂ :16個結構數
從L₃走到L'₃ :15個結構數
從L₃走到L'₄ :28個結構數

✚ 分析L₄起點的結果:
從L₄走到L'₁ :13個結構數
從L₄走到L'₂ :20個結構數

從 L_4 走到 L'_3 :26個結構數

從 L_4 走到 L'_4 :18個結構數

表格如下:

起點 \ 終點	L'_1	L'_2	L'_3	L'_4
L_1	18	26	19	13
L_2	28	15	16	18
L_3	18	16	15	28
L_4	13	20	26	18

結論:

- 1.起點與機率最高之對應終點存在某種關係，例如當 L_1 、 L_2 其中一者為起點時，走到另一者之終點機率較高，意即當 L_1 為起點時，走到 L'_2 之機率較高，同樣關係亦存在於 L_3 、 L_4 中。
- 2.起點與機率次高之對應終點亦有類似上述之關係，例如當 L_1 為起點時，走到 L'_3 之機率為次高， L_3 為起點時，走到 L'_1 之機率為次高，同樣關係亦存在於 L_2 、 L_4 中。

參●結論

- 1.由起點走到位於同一條線上之終點機率相對較低。
- 2.起點與機率最高之對應終點存在某種關係，例如當 L_1 、 L_2 其中一者為起點時，走到另一者終點(L'_1 、 L'_2)機率相對最高，意即當 L_1 為起點時，走到 L'_2 之機率相對最高，同樣關係亦存在於 L_3 、 L_4 中，如下圖所示。
- 4.起點與機率次高之對應終點亦有類似上述之關係，例如當 L_1 為起點時，走到 L'_3 之機率為次高， L_3 為起點時，走到 L'_1 之機率為次高，同樣關係亦存在於 L_2 、 L_4 中，如下圖所示。
5. 在3直5橫的鬼腳圖中，每一起點走到任意終點之機率相同。

肆●引註資料

- 1.鬼腳圖的數學原理 - 國立臺灣科學教育館
<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race2/International2004/pdf/0110.pdf>
- 2.鬼腳圖
<http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/47/senior/040412.pdf>
3. 50道挑戰性的或然率難題-凡異出版社