投稿類別:數學類

篇名:
斷棍問題討論

作者:
陳亮穎。高雄市立高雄高級中學。高二24組

指導老師:
黃仁杰老師

壹●前言

一、研究動機

在網路上有看到類似的問題引述，其探討當一根棍子隨機地折斷時，並以或然率探討段棍的最大段與最小段之平均長度為何？

二、研究目的

1.首先，我先假設其斷成 2 段，並求出最大和最小段的平均長度。

2.接著，在討論當棍子斷成 3 段時的平均長度。

3.最後，試著推廣到斷成 n 斷的結果。

貳●正文

一、研究過程問題簡化與解決問題的思路：

1.討論斷成 2 段的結果：

假設一根棍子為 1 單位長，如圖：

而設其斷點位在座標為 x=a 的點上，則如圖：

我能看出 2 段長度分別是：a 和 1-a

在假設 a 為最短(其實不論假設哪一段結論都一樣)

→$a < 1 - a$

→$a < \frac{1}{2}$

則在 a 值(最短長度)的平均長度為： $\frac{1}{4}$

最長長度： $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

2.討論斷成 3 段的結果：

假設一根棍子為 1 單位長，如圖：

而設其斷點位在座標為 x=a 和 x=b 的點上，則如圖：

並且假設：

a 在 b 的左邊，即：$a < b$

而此情況共有 3 段，分別是 a、(b-a)、(1-b)

(1)假設長度= a 為最短一段，則可列出以下式子：

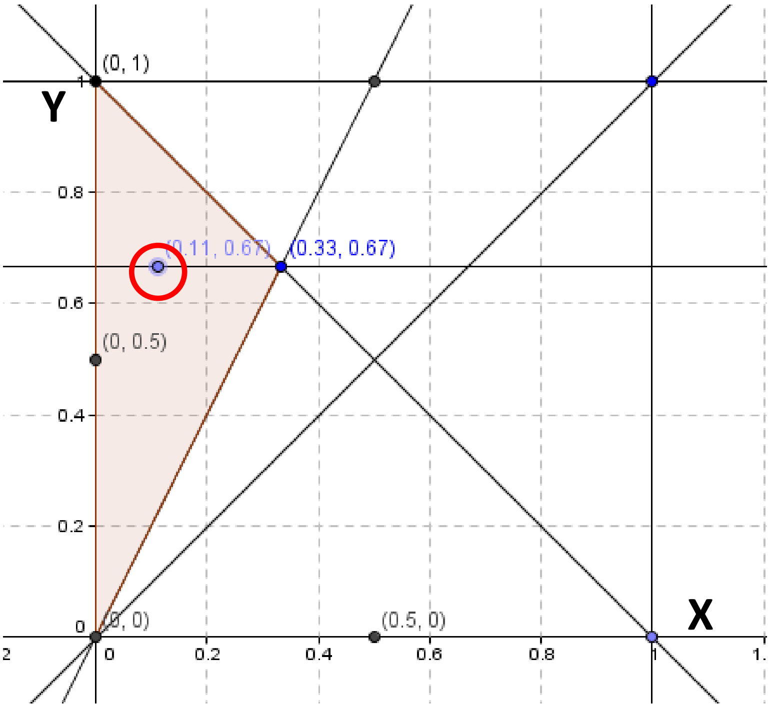
$a < b - a$ ------(1)

$a < 1 - b$ ------(2)

(1)式化簡為：$2a - b < 0$

(2)式化簡為：$a + b < 1$

以線性回歸討論其或然率與平均長度：(如圖)



得到其範圍為一三角形，為了求出 a 在此範圍之平均值，我求出此三角形重心座標的 x 值，於是以 y 軸為此三角形底，其對頂角為($\frac{1}{3},\frac{2}{3}$)而其重心的 x 座標則為

$\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

及最短段的平均長度是 $\frac{1}{9}$

(2) 假設長度= a 為最長一段，則可列出以下式子：

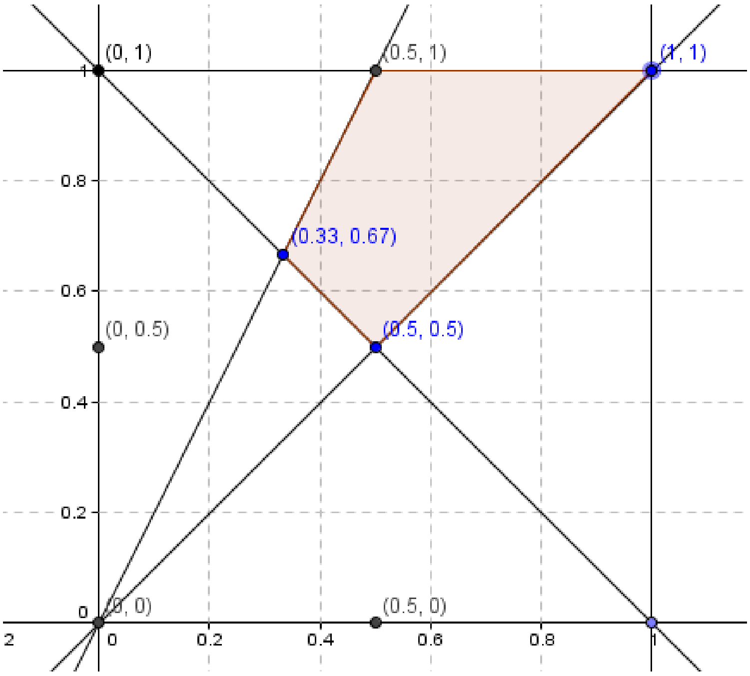
$a > b - a$ ------(1)

$a > 1 - b$ ------(2)

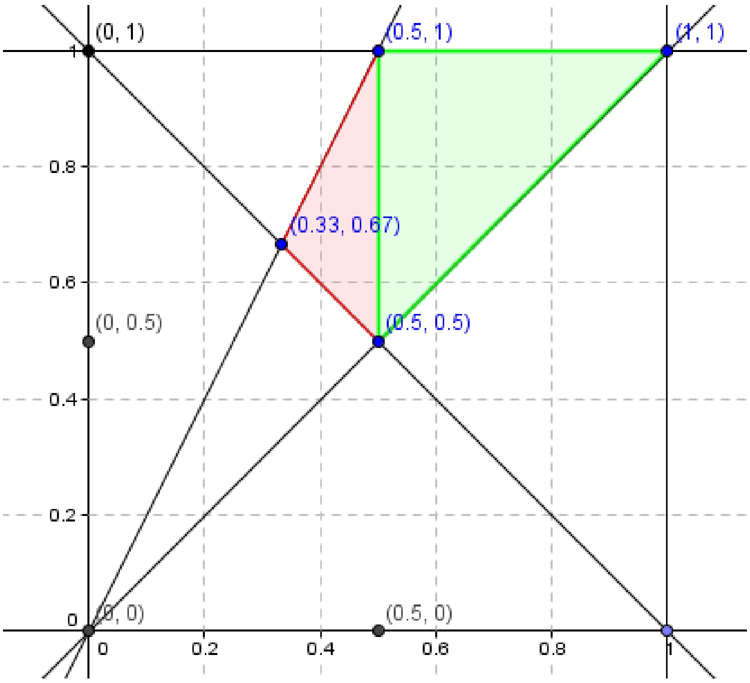
(1)式化簡為：$2a - b > 0$

(2)式化簡為：$a + b > 1$

以線性回歸討論其或然率與平均長度：(如圖)



得到其範圍為一四邊形，為了求出 a 在此範圍之平均值，我將此四邊形切成 2 個三角形作討論(如圖)



以 2 三角形的共邊為底邊計算重心的 x 座標
對於紅色三角形，其平均長度為：

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}*(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=\frac{4}{9}$$

對於綠色三角形，其平均長度為：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}*(1-\frac{1}{2})=\frac{2}{3}$$

再把 2 數值加權：
紅色三角形面積：綠色三角形面積=1：3

加權值=$\frac{\frac{4}{9}*1+\frac{2}{3}*3}{4}=\frac{11}{18}$

及最長段的平均長度是$\frac{11}{18}$

而中間段平均長度即為$1-\frac{11}{18}-\frac{2}{18}=\frac{5}{18}$

3.討論斷成 n 段的結果：
由上述之結果，可以明顯地發現，斷棍長度由小到大的比例分別為
斷成 1 段　　1
斷成 2 段　　1:3
斷成 3 段　　2:5:11
.
.
.
斷成 n 段　　?

發現：

斷成 1 段可寫成$(\frac{1}{1})(\frac{1}{1})$

斷成 2 段可寫成$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$、$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)$

斷成 3 段可寫成$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$、$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$、$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)$

~

斷成 n 段由最短到最長可寫成$\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$、$\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)$、～、$\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\sim+\frac{1}{1}\right)$

研究中曾嘗試證明斷成 4 段，假設 3 個未知數，並做出立體圖形

參●結論

當一根棍子斷成 n 斷時，其最短到最長長度比分別為：

最短 $\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$

次短 $\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)$

.

.

.

最長 $\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\sim+\frac{1}{1}\right)$