投稿類別：數學類

篇名: 方程式求根問題討論

作者：

陳冠瑜。市立高雄中學。高二 24 組

指導老師：
黃仁杰老師

壹、 前言

我們所稱的根的公式，就是把代數方程式的根用其係數經過加、減、乘、除、開方根表示出來的方法。如果我們可以求得一個方程式的根的公式，我們就說這個方程式有根式解。而在「代數基本定理」出現之後，根的存在性問題完全解決。接著最自然的問題是，用什麼方式才能把這些根求出來？能不能只用係數的加、減、乘、除、開方根就把這些根表示出來？本研究將由三次方程式的公式解開始推導，並做其推廣。以下為研究目的；

一、進行三次方程式公式解的推導與研究。

二、研究可否將其推廣至四次、甚至 n 次；若不能，探討其原因。

貳、 正文

一、 進行三次方程式公式解的推導與研究。

考慮一般實三次方程

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

其中$a\neq 0$。為簡化代數運算，先將上式通除以a，運用二次方程求解過

程所使用的配方法，可得

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}$$

$$=\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+{}^{3ac-b^2}\!/_{3a^2}\left(x+\frac{b}{3a}\right)+\frac{2b^3+9abc+27a^2d}{27a^3}$$

令$\mathrm{y}=\left(x+\frac{b}{3a}\right)$ 。透過變數變換原方程式可改寫為

$$y^3+py+q=0$$

其中

$$\mathrm{p}={}^{3ac-b^2}\!/_{3a^2}\ ,q=\frac{2b^3+9abc+27a^2d}{27a^3}$$

接下來的問題是如何解出這個缺乏二次項的三次方程。

考慮$\mathrm{u}+\mathrm{v}$的三次展開式並提出公因式

$$(\mathrm{u}+\mathrm{v})^3-3uv(\mathrm{u}+\mathrm{v})-(\mathrm{u}^3+\mathrm{v}^3)=0$$

設想上式中$\mathrm{u}+\mathrm{v}$即為$y^3+py+q=0$的一解，故兩式係數相同，就有

$$\mathrm{p}=-3\mathrm{uv}，\mathrm{q}=-\mathrm{u}^3-v^3$$

以我們最為熟悉的二次方程的解替換三次方程的解。將上面兩式改寫成

$$-\mathrm{q}=\mathrm{u}^3+v^3\ ,u^3v^3=-\frac{p^3}{27}$$

利用根與係數關係，可知u^3和v^3為下列二次方程的解：

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$$

令α_1和α_2代表此二次方程的解：

$$\alpha_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\ ,\alpha_2=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

故$u^3=\alpha_1$，$v^3=\alpha_2$，注意 u 和 v 分別可能有三個解，如下：

$$\mathrm{u}=\sqrt[3]{\alpha_1}\text{、}\omega\sqrt[3]{\alpha_1}\text{、}\omega^2\sqrt[3]{\alpha_1}$$

$$\mathrm{v}=\sqrt[3]{\alpha_2}\text{、}\omega\sqrt[3]{\alpha_2}\text{、}\omega^2\sqrt[3]{\alpha_2}$$

其中

$$\omega=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

滿足$\omega^3=1$和$\omega^2+\omega+1=0$，且$\omega^2=\overline{\omega}$。但$\mathrm{uv}=-\frac{p}{3}$是實數，因此僅有下列三組解符合所求：

$$y_1=\sqrt[3]{\alpha_1}+\sqrt[3]{\alpha_2}$$

$$y_2=\omega\sqrt[3]{\alpha_1}+\overline{\omega}\sqrt[3]{\alpha_2}$$

$$y_3=\overline{\omega}\sqrt[3]{\alpha_1}+\omega\sqrt[3]{\alpha_2}$$

此即為不完全三次方程的公式解，故原三次方程

$\mathrm{a}x^3+bx^2+cx+d=0$的解為$x_i=y_i-\frac{b}{3a}$，$i=1$、2、3

二、 進行四次方程式公式解的推導與延伸。

1. 四次方程公式解而對於四次方程

$$\mathrm{a}x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

可以與三次方程類似的變換化為

$$y^4+py^2+qy+r=0$$

進而化為

$$y^4=py^2+qy+r$$

左右兩邊分別加上$x^4+2x^2y^2$使左邊為一個完全平方式，適當選取y，使得右邊也是一個完全平方式，得到關於y的一個判別式,它是關於2y的三次方程，從而求得x，

$(x^2+y^2)^2=-py^2-qy+r+x^4+2x^2y^2=(2x^2-p)y^2-qy+(x^4-r)$，

$\Delta=q^2-4(2x^2-p)(x^4-r)=-8x^6+4py^4+8ry^2+q^2-4pr=0$求出$x^2$，然後根據

$(x^2+y^2)^2=(2x^2-p)y^2-qy+(x^4-r)$開方即可求得$y$

2. 可否推廣至 n 次?

(歷史記載)

1770 年前後，法國數學家拉格朗日轉變代數的思維方法，提出方程根的排列與置換理論是解代數方程的關鍵所在，並利用拉格朗日預解式方法，即利用 1 的任意 n 次單位根 $(\mathrm{n}-1)$引進了預解式$\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2+2\mathrm{x}_3+\cdots+(\mathrm{n}-1)\mathrm{x}_n$，詳細分析了二、三、四次方程的根式解法。但是他的這種方法卻不能對一般五次方程作根式解，於是他懷疑五次方程無根式解。並且他在尋求一般 n 次方程的代數解法時也遭失敗，從而認識到一般的四次以上代數方程不可能有根式解。

1799 年，魯菲尼證明了五次以上方程的預解式不可能

是四次以下的，從而轉證五次以上方程是不可用根式求解的，但他的證明不完善。

同年，德國數學家高斯在證明代數基本理論時，以證明一個根的存在取代計算。隨後，他又著手探討高次方程的具體解法。在 1801 年，他解決了分圓方程$x^p-1=0$(p 為質數)可用根式求解，這表明並非所有高次方程都不能用根式求解。

1824 年到 1826 年，挪威數學家阿貝爾著手考察可用根式求解的方程的根具有什麼性質，於是他嚴格證明：如果一個方程可以根式求解，則出現在根的運算式中的每個根式都可表示成方程的根和某些單位根的有理數。並且利用這個定理又證明出了阿貝爾定理：一般高於四次的方程不可能代數地求解。接著他進一步思考哪些特殊的高次方程才可用根式解的問題。在高斯分圓方程可解性理論的基礎上，他解決了任意次的一類特殊方程的可解性問題，發現這類特殊方程的特點是一個方程的全部根都是其中一個根(假設為 x)的有理函數，並且任意兩個根$q_1(x)$與$q_2(x)$滿足$q_1q_2(x)=q_2q_1(x)$，其中q_1、q_2為有理函數(阿貝爾方程)，那麼所考慮的方程總是代數可解的、或者說根$x_i=Q_1(x_i)$，$Q_2(x_i)$，…，$Q_n(x_i)$是

根x_1，x_2，…，x_n的一個置換．方程根進行這樣置換的個數是 n．阿貝爾考慮並證明了這些置換的性質，這就是“置換群”。

阿貝爾解決了構造任意次數的代數可解的方程的問題，卻沒能解決判定已知方程是否可用根式求解的問題。

法國數學家伽羅瓦在證明不存在一個五次或高於五次的方程的一般根式解法時，與拉格朗日相同，也從方程根的置換入手。在研究了方程根的排列置換性質後，提出了一些確定的準則以判定一個已知方程的解是否能通過根式找到，然而這些方法恰好導致他去考慮一種稱之為“群”的元素集合的抽象代數理論。

參、 參考資料

1. http://ccjou.wordpress.com/2012/05/17/%e4%b8%89%e6%ac%a1%e6%96%b9%e7%a8%8b%e7%9a%84%e6%b1%82%e6%a0%b9%e5%85%ac%e5%bc%8f/

2. http://jpkc.hzu.edu.cn/maths/uploadfile/2.htm