投稿類別：數學類

篇名：
神秘卻貼近生活的 Frobenius Number

作者：
陳彥儒。高雄市立高雄高級中學。高二 24 組

指導老師：
黃仁杰老師

壹、前言

(一) 研究動機

學校附近有間我常常光顧的麥當勞，每當用餐時間就會擠滿覓食的學生，有次當我排著隊準備領餐時，赫然發現麥克雞塊的包裝有 4 塊、6 塊、9 塊和 20 塊的包裝，不禁讓我想到：會不會有某個數量的雞塊是無法組合出來的呢？回家查了一下資料便赫然發現一個看都沒看過的數 Frobenius Number，也就是一個給定集合無法藉由其中元素湊出來的最大數，因此我便想深入研究這個神祕的數並探討其性質。

(二) 研究目的

1. 探討 Frobenius Number 的各種基本性質並探討其意義
2. 探討集合元素個數 = 2 時的通解並證明
3. 探討集合元素個數 = 3 時是否存在通解

貳、正文

本研究將深入探討 Frobenius Number，給出幾種基本性質並研究其通解，題目會給定一集合，找出 Frobenius Number 的最原始方法便是一一列出無法做出的數直到找不到無法組出的數為止。當然具有 Frobenius Number 的集合也會有一些特殊性質，我們便從最基本的開始討論。

首先定義 n 為集合 A 的元素個數，$a_1, a_2, \sim, a_n$為集合 A 之所有元素，$a_1, a_2, \sim, a_n \in$ N，並且為求方便，我們不失一般性的假設$a_1 \le a_2 \le \sim \le a_n$，因集合 A 本身元素重複並不影響其 Frobenius Number，因此亦可假設$a_1 < a_2 < \sim < a_n$，最後我們將 a,b,c 的 Frobenius Number 以 F(a,b,c)表示。

有了以上定義及符號之後，我們便可以開始探討其各個基本性質。

定理一：當有連續 a_1 個正整數可以被湊出時，此集合有 Frobenius Number 且必小於這群連續正整數。

證明：若有連續 a_1 個正整數可被湊出時，代表下一組的 a_1 個正整數亦可以被湊出(全部同加一個 a_1)，因此之後的所有數即可被湊出，所以 Frobenius Number 必小於第一組連續 a_1 個正整數。

說明：這是用來求 Frobenius Number 上界的方法。

定理二：若集合中所有元素並不互質，則此集合的 Frobenius Number 無限大。

證明：若集合中所有元素並不互質，代表所有元素有一公因數，則這個集合所能湊出的數壁紙可能是該公因數之倍數，其他數皆無法湊出，因此其 Frobenius Number 無限大，亦可說無意義。

通解推導：現在開始推導 n = 2 型的 Frobenius Number 通解

給定兩數 a , b∈ N，$1 < a < b$且 $\gcd(a , b) = 1$，由於 Frobenius Number 是要求出最大的整數 k 使得 $ma + nb = k$，$m, n \in Z^{+}$不成立，首先我們要構造出一個特別的整數集合 R

$$\mathrm{R} = \{ 0 , b , 2b , 3b , \sim , (a-1)b \}$$

這個整數集 R 同義於 a 和 b 能湊出的所有正整數(mod a)

引理：對於任何一個在 R 中的元素 p，任何大於(或直觀的等於)p 的整數皆可以寫成$ma + nb$的樣子，相反的，小於 p 的整數皆沒有辦法寫成形如$ma + nb$的樣子。

這個引理可以被簡單的證明，因為 p 可以被寫為 nb，因此若 m 為正數則代表所取整數大於 p，反之，該整數小於 p 時 m 必為負值。

由於最大餘數就是$(a-1)b$，因此無法寫成$\mathrm{ma}+\mathrm{nb}$形式的最大的數便是$(a-1)b-\mathrm{a}=\mathrm{ab}-\mathrm{a}-\mathrm{b}$得 n = 2 型的 Frobenius Number 通解。

說明：為何減的是 a 不是其他數？

減去 a 可以確保其餘數的完整性，並且因為$\mathrm{a}<\mathrm{b}$所以可以保證得出來的數大於(a – 2)b。

定理三：$\mathrm{ab}-\mathrm{a}-\mathrm{b}$對任意兩正整數$\mathrm{a},\mathrm{b}$，$1<\mathrm{a}<\mathrm{b}$恆正

證明：此式子同除以 ab 後可得$1-\frac{a+b}{ab}=1-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$，又因為$1<\mathrm{a}<\mathrm{b}$所以$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$必定大於 1，得證。

定理四：$\gcd(\mathrm{F}(\mathrm{a},\mathrm{b}),\mathrm{a})=\gcd(\mathrm{F}(\mathrm{a},\mathrm{b}),\mathrm{b})=1$

證明：利用反證法，若$\gcd(\mathrm{F}(\mathrm{a},\mathrm{b}),\mathrm{a})\neq 1$，令其等於 k。

利用剛剛的通式可知$\mathrm{ab}-\mathrm{a}-\mathrm{b}$可以被 k 整除

由於 a,b 互質，所以可以直觀的知道 b 不能被 k 整除，那麼$\mathrm{ab}-\mathrm{a}$就不能被 k 整除，但 a 是 k 的倍數，故矛盾。

同樣的$\gcd(\mathrm{F}(\mathrm{a},\mathrm{b}),\mathrm{b})=1$亦可得知。

接著開始推導 n = 3 的 Frobenius Number。

首先，過去有位數學家 Davidson 分析並證明初 n=3 的 Frobenius Number 有下界$\sqrt{3\mathrm{abc}}-a-b-c$，並且藉由快速的演算法中可以用程式運算及半群分析得出 Frobenius Number 有上界，不過直至目前為止皆沒有 n=3 的 Frobenius Number 通式，由於上下界證明過程繁雜超出所學能力因此不再深入下去討論。

不過現階段我們依然可以由小範圍內的三數之 Frobenius Number 來觀察一些性質並給出某些情形下的通解。以下將表列運用程式推出(a,b,c)的 Frobenius Number，其中$\gcd(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})=1$， $2\leq\mathrm{a}<\mathrm{b}<\mathrm{c}\leq 10$。

F(2,3,4)=1	F(2,7,10)=5	F(3, 7, 10)=11	F(5,6,10)=19
F(2,3,5)=1	F(2,8,9)=7	F(3, 8, 9)=13	F(5,7,8)=11
F(2,3,6)=1	F(2,9,10)=7	F(3,8,10)=7	F(5,7,9)=13
F(2,3,7)=1	F(3, 4, 5)=2	F(3,9,10)=17	F(5,7,10)=23
F(2,3,8)=1	F(3, 4, 6)=5	F(4,5 6)=7	F(5,8,9)=12
F(2,3,9)=1	F(3, 4, 7)=5	F(4,5,7)=6	F(5, 8, 10)=27
F(2,3,10)=1	F(3, 4, 8)=5	F(4,5,8)=11	F(5,9,10)=31
F(2,4,5)=3	F(3, 4, 9)=5	F(4,5,9)=11	F(6,7,8)=17
F(2,4,7)=5	F(3, 4, 10)=5	F(4,5,10)=11	F(6,7,9)=17
F(2,4,9)=7	F(3, 5, 6)=7	F(4,6,7)=9	F(6,7,10)=15
F(2,5,6)=3	F(3, 5, 7)=4	F(4,6,9)=11	F(6,8,9)=19
F(2,5,7)=3	F(3, 5, 8)=7	F(4,7,8)=17	F(6,9,10)=23
F(2,5,8)=3	F(3, 5, 9)=7	F(4,7,9)=10	F(7,8,9)=20
F(2,5,9)=3	F(3, 5, 10)=7	F(4,7,10)=13	F(7, 8, 10)=19
F(2,5,10)=3	F(3, 6, 7)=11	F(4,8,9)=23	F(7,9,10)=22
F(2,6,7)=5	F(3, 6, 8)=13	F(4,9,10)=15	F(8,9,10)=31
F(2,6,9)=7	F(3, 6, 10)=17	F(5,6,7)=9	
F(2,7,8)=5	F(3, 7, 8)=5	F(5,6,8)=9	
F(2,7,9)=5	F(3, 7, 9)=11	F(5,6,9)=13	

這樣爆出很多組的 Frobenius Number 解後，可以看出三數的 Frobenius Number 真的沒有一般的表達式，因此我們便要開始去探討是否有其中幾組帶有一些規則在內。

不過首先可以在看幾個重要的定理以山選出比較需要觀察的項目。

定理五：若$\gcd(a, b) = 1$，則$F(a, b, ma + nb) = F(a. b)$，$m, n \in N$ 且 > 0

證明：F(a,b)已經無法由 a 和 b 湊出，所以當然無法由 a,b,ma + nb 湊出得到，因此其 Frobenius Number 為 F(a,b)。

由上述的定理還可以推廣出一個好用的定理。

定理六：若三數中有兩數戶惟因被數，則此三數的 Frobenius Number 將等同於此兩數的 gcd 和的三數的 Frobenius Number。即

給定 a,b,c 三數，其中$\gcd(a,b,c)=1$，假設$\gcd(a,b)=n\neq 1$ 且 $b=ak, k\in N$，則$F(a,b,c)=F(n,c)$。

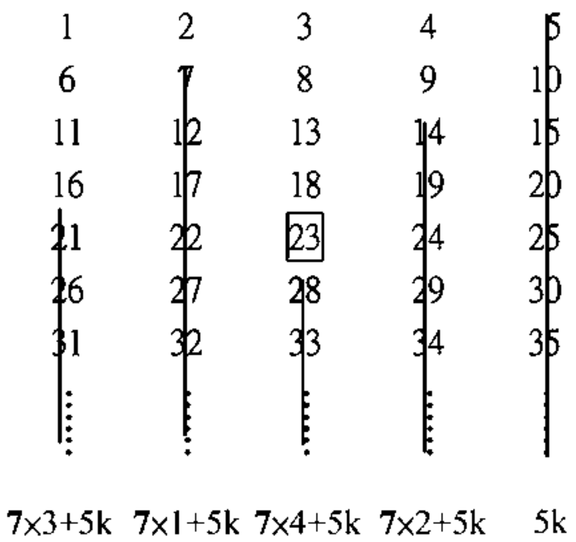
證明：此為定理五中 m 或 n 取 0 的情形。

說明：此定理可以用於 Frobenius Number 一部份組合的降階。

首先我觀察到了兩組數：F(3,4,5)=2 和 F(3,5,7)=4，此兩組的 Frobenius Number 皆為公差之 2 倍，因此為了驗證此猜測我又往下找了 F(3,7,11)=8、F(3,8,13)=10、F(3,10,17)=14 等共五組皆有類似的性質，因此現在我要證明

$$F(3,3+k,3+2k)=2k$$

證明這個式子之前我要介紹一個求 Frobenius Number 好用的方法「刪去法」，在 n=2 型的 Frobenius Number 求法中，我們可以將正整數先用 a 個一組的方法表列出來，因此最右邊那列將全部可由 a 湊成，找出幾組 b 的倍數後可發現後面幾項皆是由 a,b 構成並刪去，最後剩下的最大數便是 Frobenius Number。以下將以(a,b)=(5,7)使用一次刪去法並找出 F(5,7)。



最右的 5 的倍數先消去後，依序找出其他四列中 7 的倍數，將其後方的數全數刪去，剩下的數中最大者(23)便是所求 Frobenius Number

此方法亦可圖解說明方才的 n=2 Frobenius Number 通式證明。

回到剛才要證明的$F(3,3+k,3+2k)=2k$。我們利用刪去法將正整數用 3 個一組的方式表列出來，並刪去最右方那一列。接著我們知道 k 不可能是三的倍數，因此 3+k , 3+2k 也不會是，又我們可以直觀得到 3+k , 3+2k 必一個除以三餘 1，另一個除以三餘 2。

由刪去法我們可以把 3+k 以及 3+2k 那兩樹下方的所有數全部刪掉，而剩下的數中又數 3+2k 上方的 2k 最大，因此可得$F(3,3+k,3+2k)=2k$。

照著這個規律在看 4 帶頭的吧！F(4,5,6)=7 和 F(4,7,10)=13，多找找幾組 F(4,9,14)=19 , F(4,11,18)=25，雖然可以輕鬆找到規律但還是用刪去法做一下，發現最後還是會剩下一列，而這列便要用其他兩數的組合去刪了，因此其 Frobenius Number 便是其他兩數相加-4，得通式$F(4,4+k,4+2k)=3k+4$。

發現 4 帶頭會多出一列，那我們就找找 n=4 型的 Frobenius Number，其中是以 4 帶頭的等差型，直接用 4 , 4+k , 4+2k , 4+3k 去做刪去法發現 $F(4,4+k,4+2k,4+3k)=3k$。所以我們得到一個特例解：

$$F(a,a+d,a+2d,\sim,a+(a-1)d)=(a-1)d$$

參、結論

一、n=2 型的 Frobenius Number 通式為$F(a,b)=ab-a-b$

二、n=3 型的 Frobenius Number 無特定通解，但是簡單推出一個可以處理部分形式的解：

若$\gcd(a,b)=n\neq 1$ 且 $b=ak$，$k\in N$，則$F(a,b,c)=F(n,c)$

三、得到一個非常特殊的 a 項等差之 Frobenius Number 解：

$$F(a,a+d,a+2d,\sim,a+(a-1)d)=(a-1)d$$

肆、參考資料

How to order 43 Chicken McNuggets - Numberphile