

投稿類別:數學科

篇名:

A 在哪

作者:

楊皓芃。市立高雄中學。高二 24 組

指導老師:

黃仁杰

壹●前言

一、研究動機

在玩撲克牌遊戲 99 的時候，抽到黑桃 A 時，不免會有一點興奮，而這時心中突然萌生一個問題：平均要抽幾張撲克牌才能抽中黑桃 A 呢？那又如果不限定是黑桃，則又如何呢？以下我們將探討平均需要翻幾張牌才能翻中第一張 A

二、研究目的

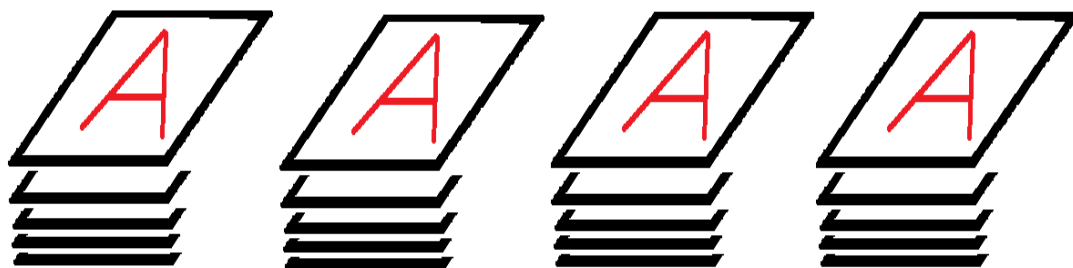
找出在 n 張牌中翻到第 k 張 A 的平均翻牌數

貳●正文

一、實際狀況之討論

我們現在有一副不含鬼牌其餘皆完整的撲克牌，很直觀的想我們會認為平均需要翻 $52/4=13$ 張才能翻到第一張 A

想法：有 4 張 A，所以將其平分成 4 堆，每堆有 13 張



以下我們逐項討論

A(第一張 A)在第 1 張：

$$C_{51}^{51} = 1$$

A 在第 2 張：

$$C_1^{48} = 48$$

A 在第 3 張：

$$C_2^{48} = 1128$$

A 在第 4 張：

$$C_3^{48} = 17296$$

A 在第 5 張：

$$C_4^{48} = 194580$$

A 在第 6 張：

$$C_5^{48} = 1712304$$

A 在第 7 張：

$$C_6^{48} = 12271512$$

A 在第 8 張：

$$C_7^{48} = 73629072$$

A 在第 9 張：

$$C_8^{48} = 377348994$$

A 在第 10 張：

$$C_9^{48} = 1677106640$$

A 在第 11 張：

$$C_{10}^{48} = 65407158960$$

A 在第 12 張：

$$C_{11}^{48} = 22595200368$$

A 在第 13 張：

$$C_{12}^{48} = 69668534468$$

A 在第 14 張：

$$C_{13}^{48} = 192928249296$$

A 在第 15 張：

$$C_{14}^{48} = 482320623240$$

A 在第 16 張：

$$C_{15}^{48} = 1093260079344$$

A 在第 17 張：

$$C_{16}^{48} = 2254848913647$$

A 在第 18 張：

$$C_{17}^{48} = 4244421484512$$

A 在第 19 張：

$$C_{18}^{48} = 7309837001104$$

A 在第 20 張：

$$C_{19}^{48} = 11541847896480$$

A 在第 21 張：

$$C_{20}^{48} = 16735679449896$$

A 在第 22 張

$$C_{21}^{48} = 22314239266528$$

A 在第 23 張：

$$C_{22}^{48} = 27385657281648$$

A 在第 24 張：

$$C_{23}^{48} = 30957699535776$$

A 在第 25 張：

$$C_{24}^{48} = 32247603683100$$

A 在第 26 張：

$$C_{25}^{48} = 30957699535776$$

A 在第 27 張：

$$C_{26}^{48} = 27385657281648$$

A 在第 28 張：

$$C_{27}^{48} = 22314239266528$$

A 在第 29 張：

$$C_{28}^{48} = 16735679449896$$

A 在第 30 張：

$$C_{29}^{48} = 11541847896480$$

A 在第 31 張：

$$C_{30}^{48} = 7309837001104$$

A 在第 32 張：

$$C_{31}^{48} = 4244421484512$$

A 在第 33 張：

$$C_{32}^{48} = 2254848913647$$

A 在第 34 張：

$$C_{33}^{48} = 1093260079344$$

A 在第 35 張：

$$C_{34}^{48} = 482320623240$$

A 在第 36 張：

$$C_{35}^{48} = 192928249296$$

A 在第 37 張：

$$C_{36}^{48} = 69668534468$$

A 在第 38 張：

$$C_{37}^{48} = 22595200368$$

A 在第 39 張：

$$C_{38}^{48} = 65407158960$$

A 在第 40 張：

$$C_{39}^{48} = 1677106640$$

A 在第 41 張：

$$C_{40}^{48} = 377348994$$

A 在第 42 張：

$$C_{41}^{48} = 73629072$$

A 在第 43 張：

$$C_{42}^{48} = 12271512$$

A 在第 44 張：

$$C_{43}^{48} = 1712304$$

A 在第 45 張：

$$C_{44}^{48} = 194580$$

A 在第 46 張：

$$C_{45}^{48} = 17296$$

A 在第 47 張：

$$C_{46}^{48} = 1128$$

A 在第 48 張：

$$C_{47}^{48} = 48$$

A 在第 49 張：

$$C_{48}^{48} = 1$$

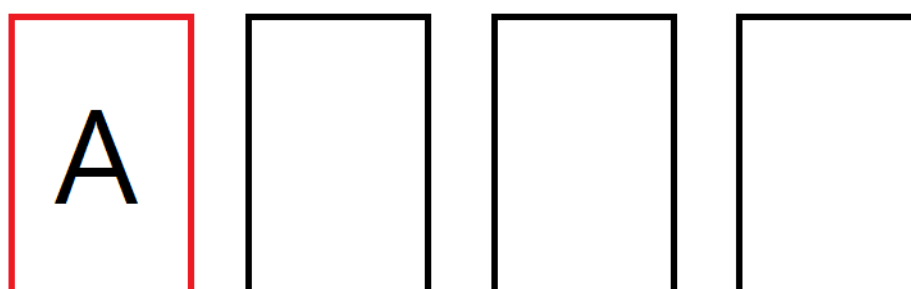
以出現可能數作為權數

加權平均後會知道平均需要翻 10.6 張牌才會翻到第一張 A

發現與原猜想不同

所以我們從張數較少的狀況討論

我們先從有一張 A 和三張雜牌開始討論



若以原猜想會發現很明顯不符

於是我們換一種想法

我們將 A 拿出當成隔板
將非 A 的牌平均分成 A 的張數+1 堆
在將 A 插入每堆之間讓 A 與 A 之間得距離最短
以下我們以 A 的位置做討論

A 在第一張的總可能數= $C_3^3=1$
A 在第二張的總可能數= $C_1^3=3$
A 在第三張的總可能數= $C_2^3=3$
A 在第四張的總可能數= $C_3^3=1$

然後再以他的位置做加權平均
 $(1*1+2*3+3*3+4*1)/(1+3+3+1)=2.5$
所以我們得知平均要翻 2.5 張才能翻到 A

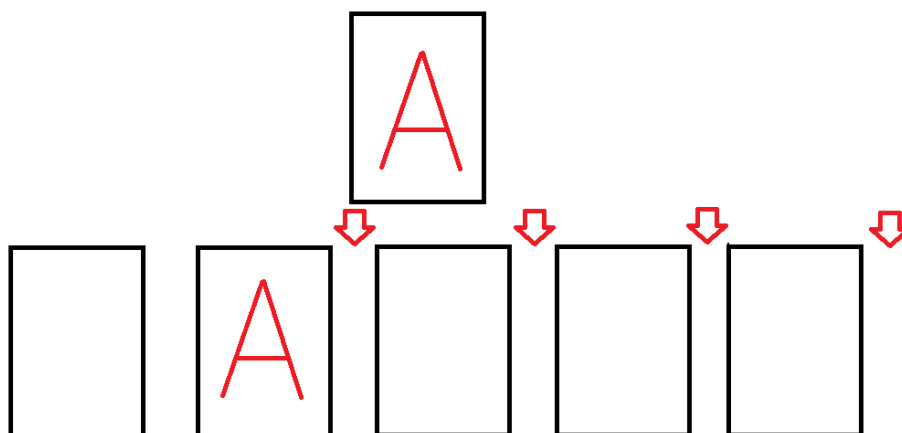
新想法：
 $(4-1)/(1+1)+1=2.5$
(註:+1 是因為需翻開 A)
結果吻合

再套回原狀況：
 $(52-4)/(4+1)+1=10.6$
結果也吻合
再套至其他狀況仍然吻合
所以我們得知
設 n 為 A 的張數
m 為總張數
平均翻
 $(m-n)/(n+1)+1$ 張即可翻到第一張 A

那若改為翻到第二張 A 才停止

則我們想成先將一張 A 拿出，其餘依照剛剛的想法排列
最後再將拿出的 A 插入

我們從 2 張 A 和 4 張雜牌開始討論



我們先依第一張 A 的位置做討論(不含第二張 A)

第一張 A 在第 1 張： $4! = 24$

第一張 A 在第 2 張： $4*3! = 24$

第一張 A 在第 3 張： $4*3*2! = 24$

第一張 A 在第 4 張： $4*3!*1! = 24$

第一張 A 在第 5 張： $1*4! = 24$

接著將第二張 A 插入

再以第二張 A 的位置做討論

第二張 A 在第 2 張：只有第一張 A 在第 1 張有可能 = 24

第二張 A 在第 3 張： $(\text{第一張 A 在第 1 張} = 24 + \text{第一張 A 在第 2 張} = 24) = 48$

第二張 A 在第 4 張： $24 + 24 + 24 = 72$

第二張 A 在第 5 張： $24 + 24 + 24 + 24 = 96$

第二張 A 在第 6 張： $24 + 24 + 24 + 24 + 24 = 120$

做加權平均後我們得到平均每翻 $1680/360 = 14/3$ 張牌可翻到第二張 A

若我們現在有 3 張 A 和 4 張雜牌

這可以想成剛剛 2 張 A 和 4 張雜牌的狀況在多插入一張 A

第三張 A 在第 3 張：只有第二張 A 在第 2 張有可能=24

第三張 A 在第 4 張：(第二張 A 在第 2 張=24+第二張 A 在第 3 張=48)=72

第三張 A 在第 5 張：24+48+72=144

第三張 A 在第 6 張：24+48+72+96=240

第三張 A 在第 7 張：24+48+72+96+120=360

做加權平均後我們得到平均翻開 $5040/840=6$ 張牌可以翻到第三張 A

參●結論

我們最後可以推得

假設總共有 m 張牌
有 n 張 A

則要翻到第 k 張 A 平均需翻

$$k(m-n)/(n+1)+k=k(m+1)/(n+1)$$