投稿類別:數學類

篇名:
從拼盤看捷徑

作者:楊鎮宇。市立高雄中學。高二 24 組

指導老師:
黃仁杰

壹、研究動機：

最近在九章出版社的趣味幾何學看到了一道有趣的數學題目，使我聯想到多年以前的一部電影－「終極警探」，布魯斯威利在電影中利用可裝 3 公升水的容器，由已裝滿水的 5 公升容器中，把 4 公升水分出來，利用此重量而免除一場爆炸案，解決美國市中心所面臨空前絕後的災難。

但如果遇到的情形如下述，又該如何解決呢？或許是我們都想當英雄吧!不過確實激起了我們高度的研究興趣與求知慾望。

題目：

有三個玻璃杯，其容量分別為 12，9、5 單位，其中一單位表示 100 毫升（ml），今只有 12 單位容量裝滿水，其餘兩個杯子是空的，在沒有量杯或刻度情形下，如何利用這兩個空玻璃杯將 12 單位容量杯子盛滿的水分成一半？（參考 p12 附錄一）

貳、研究目的：

（一）探討任意不同容量的三個瓶子，是否可以把其中大瓶子盛滿的水平均分成兩半？

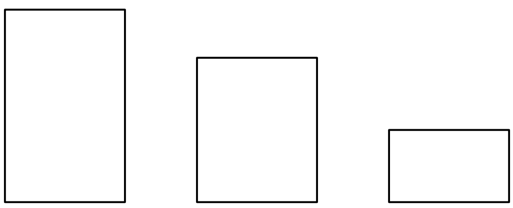
（二）如何判斷是否可以將大瓶子盛滿的水平均分成兩半？

（三）可不可以利用兩個空瓶子從最大瓶子裡倒出任何可能數量的水來。

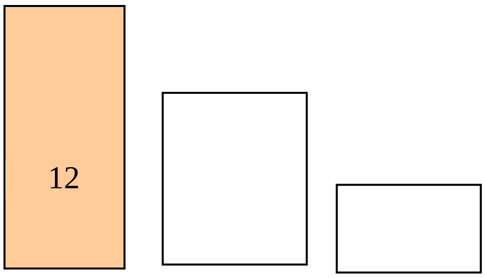
參、研究歷程與方法：

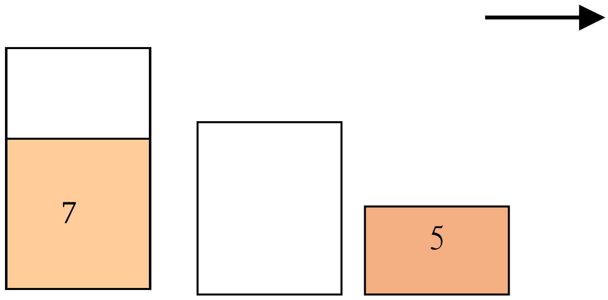
研究一：探討任意不同容量的三個瓶子，是否可以把其中大瓶子盛滿的水平均分成兩半。

問題 1-1：給定容量分別為 12、9、5 單位的瓶子，以『12，9，5』表示，是否可以量出 6 單位的水呢？　解法一：我們實際操作三個瓶子



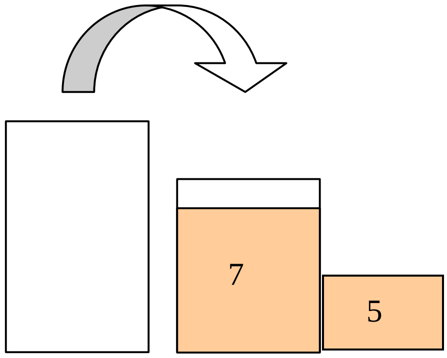
12 單位　9 單位　5 單位

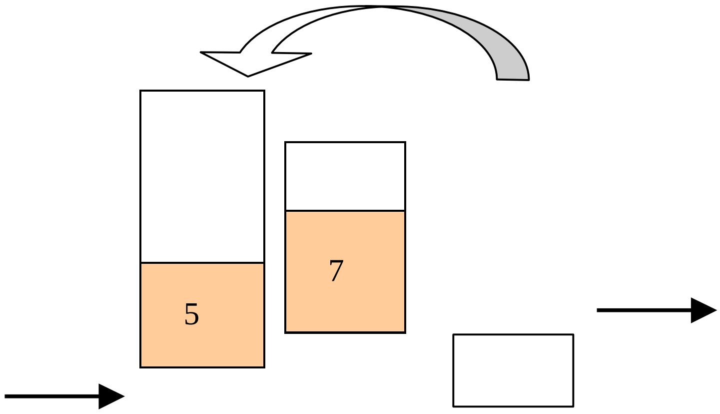




（1）裝滿 12 單位的水　（2）將 5 單位的水倒入 5 單位

的瓶子中

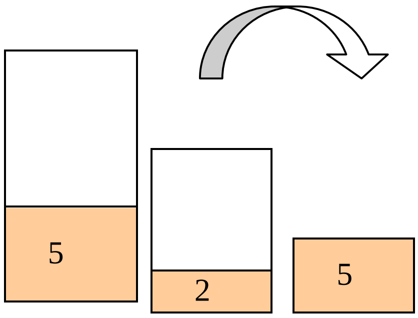


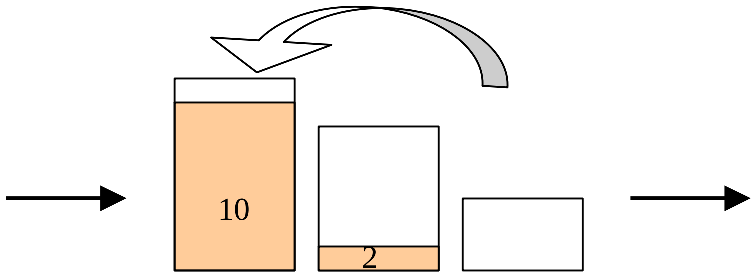


（3）將大瓶子中 7 單位的水倒　（4）將小瓶子中 5 單位的水倒入 9 單位

的瓶子中

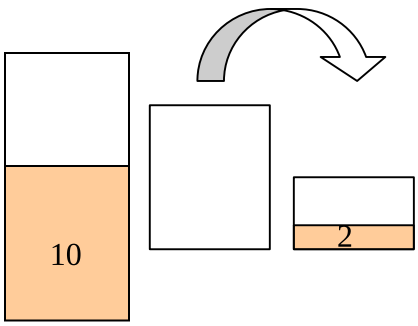
入大瓶子中

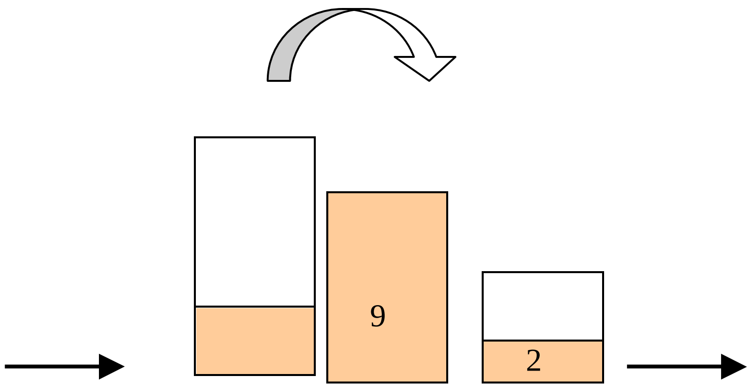




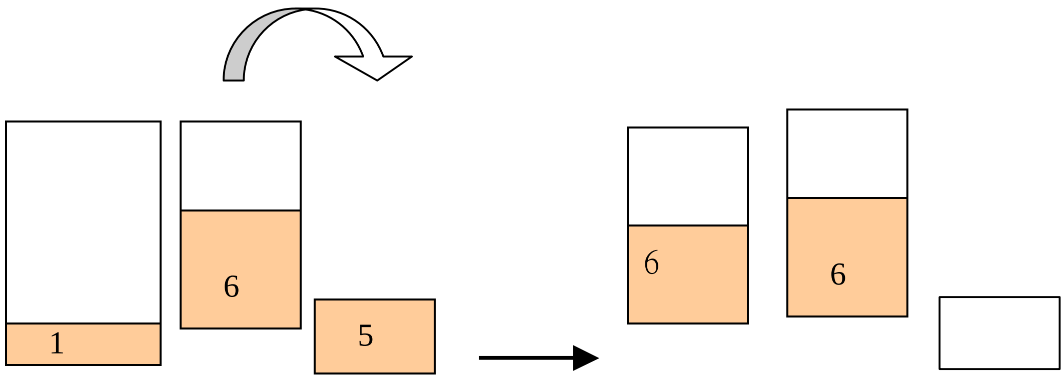
（5）將中瓶子中 5 單位的水　（6）將小瓶子中 5 單位的水倒倒入小瓶子中　入大

瓶子中





（7）將中瓶子中 2 單位的水倒入 （8）將大瓶子中 9 單位的水倒小瓶子中 入中瓶
子中



（9）將中瓶子中 3 單位的水倒入小瓶子中

（10）將小瓶子中的水倒入大瓶子中，即將 12 單位水平分

解法二：可將上列結果改寫成如下（每一欄為每次傾倒以後的結果）

12 單位瓶子	12	7	0	5	5	10	10	1	1	6
9 單位瓶子	0	0	7	7	2	2	0	9	6	6
5 單位瓶子	0	5	5	0	5	0	2	2	5	0

亦可表示為：

（12，0，0）→（7，0，5）→（0，7，5）→（5，7，0）→（5，2，5）
→（10，2，0）→ （10，0，2）→（1，9，2）→（1，6，5） →（6，6，0）

我們經過一連串的的嘗試和試驗之後，不單單僅有一種方法到達目的，如下所示：

12 單位瓶子	12	7	7	2	2	11	11	6	6
9 單位瓶子	0	0	5	5	9	0	1	1	6
5 單位瓶子	0	5	0	5	1	1	0	5	0

12 單位瓶子	12	3	3	8	8	0	4	4	9	9	0	0	5	5	10	10	1	1	6
9 單位瓶子	0	9	4	4	0	8	8	3	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
5 單位瓶子	0	0	5	0	4	4	0	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0

小結 1-1：『12，9，5』的組合可把 12 單位容量大瓶子中的水平均分成兩半；方法不只一種。

問題 1-2：給定容量分別為 8、6、3 單位的瓶子，是否可以量出 6 單位的水呢？

8 單位瓶子	8	2	2	5	5
6 單位瓶子	0	6	3	3	0
3 單位瓶子	0	0	3	0	3

結論一：任意不同容量的三個瓶子，不一定能把其中大瓶子盛滿的水平均分成兩半。

研究二：如何判斷是否可以將大瓶子盛滿的水平均分成兩半？

『A，B，C』表示大瓶子、中瓶子、小瓶子的容量。

討論：狀況一：***B+C=A***

以 10 單位的大瓶子，7 單位的中瓶子，3 單位的小瓶子為例：

首先將 10 單位的瓶子裝滿水，再將水在 3 個瓶子之間倒來倒去，直到有兩個瓶子中的水為 5 單位。觀察這「倒來倒去」的過程，就好比在不同瓶子容量體積上進行加減運算。

設由 10 單位瓶子中的水倒進 7 單位的瓶子 x 次，由 7 單位瓶子倒進 3 單位的瓶子 y

次，最後是由 7 單位瓶子內裝 5 單位的水。（因 3 單位瓶子無法裝 5 單位的水）

$\rightarrow\quad 7x-3y=5\cdots$★

$\rightarrow y=(2x-2)+\frac{x+1}{3}$

令 $t=\frac{x+1}{3}$ ，且 t 是正整數。

$\rightarrow x=3t-1$

$\rightarrow y=2(3t-1)-2+t=7t-4$

$\rightarrow\begin{cases}x=3t-1\\y=7t-4\end{cases}$

取 t=1 時， $x=2, y=3$

也就是說在倒水的過程中，將水倒進 7 單位的瓶子 2 次，由 7 單位瓶子倒進 3 單位瓶子 3 次。

以（a，b，c）表示 10 單位、7 單位、3 單位瓶子內水的容量，過程如下：

（10，0，0）→ $\boxed{（3，\underline{7}，0）}$ → $\boxed{（3，4，\underline{3}）}$ →（6，4，0）→ $\boxed{（6，1，\underline{3}）}$

-（9，1，0）→（9，0，1）→ $\boxed{（2，\underline{7}，1）}$ → $\boxed{（2，5，\underline{3}）}$ →（5，5，0）

只要上式★有整數解，即可知是否能將大瓶中的水平均成一半。

證明： $p,q,r \in z$ ， $px - qy = r$ 有整數解 $\Leftrightarrow$ $(p,q) | r$

pf：設其有整數解 $x = x_0, y = y_0$ $(x_0, y_0 \in z)$

$\Leftrightarrow px_0 - qy_0 = r$

設 $(p,q) = d, (d \in N)$

則 $p = dh, q = dk(h,k \in N$ 且 $(h,k) = 1)$

$\Leftrightarrow dhx_0 - dky_0 = r$

$\Leftrightarrow d(hx_0 - ky_0) = r$

$\Leftrightarrow$ d 整除 r

$\Leftrightarrow$ (p,q) 整除 r ,故得證。

找出此不定方程式的通解：

$px - qy = r \cdots 1$

$px_0 - qy_0 = r \cdots 2$

1 —2 $\Rightarrow p(x - x_0) - q(y - y_0) = 0$

$dh(x - x_0) - dk(y - y_0) = 0$

$h(x - x_0) = k(y - y_0)$ $\cdots 3$

$\because (h,k) = 1 \therefore k | (x - x_0)$

令 $(x - x_0) = kt$（$t \in z$）—○4

$\Rightarrow x = x_0 + kt = x_0 + \frac{q}{d}t$

○4 代入○3

$\Rightarrow hkt = k(y - y_0)$

$\Rightarrow ht = (y - y_0)$

$\Rightarrow y - y_0 = ht$

$\Rightarrow y = y_0 + ht = y_0 + \frac{p}{d}t$

故通解為 $x = x_0 + \frac{q}{d}t$ ， $y = y_0 + \frac{p}{d}t$ 　 $t \in z$

問題 2-1:已知『10,7,3』可把水平均分成半，

那麼『10,5,5』;『10,6,4』;『10,8,2』;『10,9,1』這些組合亦可把水平均分成兩半嗎？

『10,5,5』	『10,6,4』	『10,8,2』	『10,9,1』
$B = 5, C = 5$ $\frac{A}{2} = 10/2 = 5$ — $(5,5) \mid 5$	$B = 6, C = 4$ $\frac{A}{2} = 10/2 = 5$ — $(6,4) \mid 5$	$B = 8, C = 2$ $\frac{A}{2} = 10/2 = 5$ — $(8,2) \mid 5$	$B = 9, C = 1$ $\frac{A}{2} = 10/2 = 5$ — $(9,1) \mid 5$
可達此目標	無法達此目標	無法達此目標	可達此目標

小結 2-1：

滿足 B+C=A 的條件下有多種情形，若其中一種情形能將大瓶子中的水平均成半，

並不能保證其他情形亦可將水平均成半。

狀況二：***B+C＞A***

以『12，9，5』為例（即 12 單位的大瓶子，9 單位的中瓶子，5 單位的小瓶子）

◯1

畫出圖形 OBCDA，如下圖所示。

◯2 圖形上的每一點，都決定著兩個數字，設為（x,y）。

x 表示中瓶子中水的體積，y 表示小瓶子中水的體積，所餘水量就是大瓶子中水的體積。

試想將一粒球沿 OA 邊擊出，碰到邊時，根據入射角＝反射角的定律，折向另一邊。

我們不妨隨著球的滾動走去，直到走到（6,0）才停止。

球滾動時所經路線：如上圖橘色線條所指示的方向

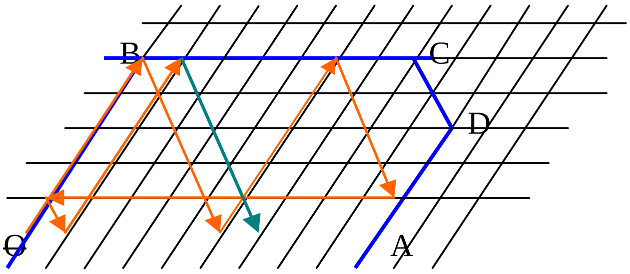
x	9	4	4	0	8	8	3	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
y	0	5	0	4	4	0	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0

可改寫成如下：

大瓶子	3	3	8	8	0	4	4	9	9	0	0	5	5	10	10	1	1	6
中瓶子	9	4	4	0	8	8	3	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
小瓶子	0	5	0	4	4	0	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0

由此表可得知經過 18 個步驟，可把 12 單位的水平分成一半 6 單位。但此路徑並非唯一，我們可以尋求最短路徑，以最少步驟完成目標。

做法如下：



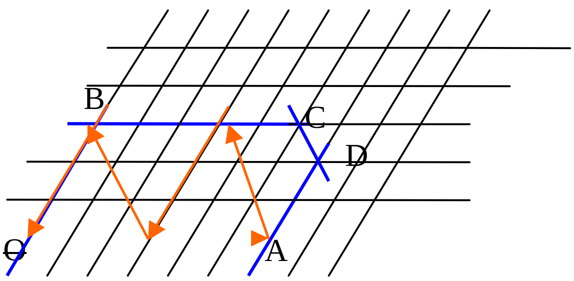
x	0	5	5	9	0	1	1	6
y	5	0	5	1	1	0	5	0

大瓶子	7	7	2	2	11	11	6	6
中瓶子	0	5	5	9	0	1	1	6
小瓶子	5	0	5	1	1	0	5	0

問題 2-2：$B+C>A$，不能將水平分成一半的情形，如何以圖說明呢？ 例如：『8,6,3』。

$\overline{OA}$ 邊為6格，$\overline{OB}$ 邊為3格，$\overline{BC}$ 邊為$(8-3)$格，$\overline{AD}$ 邊為$(8-6)$格，

最後連接 $\overline{CD}$。由 $\overrightarrow{OA}$ 出發：（各點座標(x,y) ► x+y=8）



由原點出發，最後仍回至原點，而撞不到（4,0）。

x	6	3	3	0
y	0	3	0	3

大瓶子	2	2	5	5
中瓶子	6	3	3	0
小瓶子	0	3	0	3

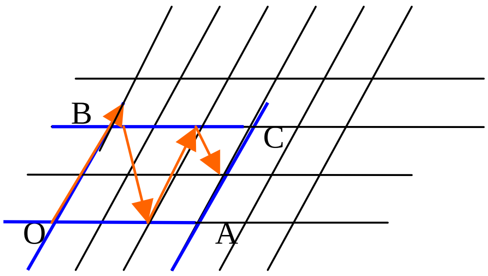
狀況三：***B+C＜A***

以『8,3,2』為例（即 8 單位的大瓶子，4 單位的中瓶子，2 單位的小瓶子）。

畫出一些斜行的的格子，使每個格子都為大小相等的菱形，菱形的銳角為 60°

$\overline{OA}$ 邊為 3 格,$\overline{OB}$ 邊為 2 格,$\overline{BC}$ 邊為 3 格, $\overline{AC}$ 邊為 2 格畫出平行四

邊形 OACB，如下圖所示：

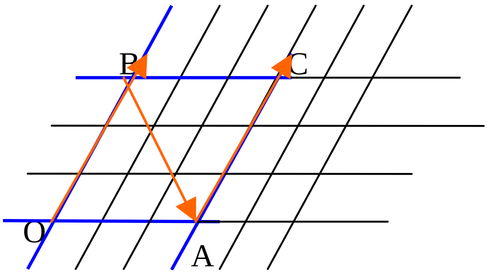


x	0	2	2
y	2	0	2

大瓶子	6	6	4
中瓶子	0	2	2
小瓶子	2	0	2

問題 2-3：***B+C＜A***，不能將水平分成一半的情形，如何以圖說明呢？例如『8,3,3』。

$\overline{OA}$ 邊為 3 格,$\overline{OB}$ 邊為 3 格,$\overline{BC}$ 邊為 3 格, $\overline{AD}$ 邊為 3 格。



x	0	3	3
y	3	0	3

大瓶子	5	5	2
中瓶子	0	3	3
小瓶子	3	0	3

由原點出發，始終無法撞擊到（1,3）,（2,2）,（3,1）

【第一個數代表的是中瓶子的水，第二數代表的是小瓶子的水，

而 (8－第一個數－第二個數) 代表的是大瓶子中的水】

⇨無法將大瓶子中的水分成一半。

研究三：可不可以利用兩個空瓶子從最大瓶子裡倒出任何可能數量的水來。

問題 3-1：是否可以從 12 單位瓶子將其裝滿水，利用 9 單位空瓶子和 5 單位空瓶子量出 1 單位、2 單位、3 單位水以至 11 單位水來？

12 單位瓶子	12	3	3	8	***8***	0	***4***	4	9	9	0	0	5	5	***10***	10	***1***	1	6
9 單位瓶子	0	***9***	4	4	0	8	8	3	***3***	0	9	***7***	7	2	***2***	0	9	***6***	6
5 單位瓶子	0	0	***5***	0	4	4	0	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0

小結 3-1：根據上表得知可量出 1~10 單位的水，而 11 單位的水可由（5 單位水+6 單位水）量得。

問題 3-2：是否可以從 10 單位瓶子將其裝滿水，利用兩個 5 單位空瓶子量出 1 單位、2 單位、 3 單位以至 9 單位

10 單位瓶子	10	5	5	0
5 單位瓶子	0	0	5	5
5 單位瓶子	0	5	0	5

小結 3-2：根據上表得知只可量出 5 單位、10 單位的水來。

結論三：利用兩個空瓶子從最大瓶子裡不一定能倒出任何可能數量的水來。

肆、研究結果：

1.任意不同容量的三個瓶子，不一定能把其中大瓶子盛滿的水平均分成兩半。

2.判斷是否能將大瓶子盛滿的水平均分成兩半：

『A，B，C』表示大瓶子、中瓶子、小瓶子的容量。

◯1 B+C=A：

若(B,C) 整除 $\frac{A}{2}$ 則可將大瓶子的水分成一半。

◯2 B+C>A

畫出圖形 OBCDA。由 O 點出發，以（x,y）表示任一點，若經過滿足 x+y=A/2 的點，則表示可將大瓶子中的水分成一半。

◯3 B+C＜A：

畫出一些斜行的的格子，使每個格子都為大小相等的菱形，菱形的銳角為 60°。畫出平行四邊形 OACB。

由 O 點出發，以（x,y）表示任一點，若經過滿足 x+y=A/2 的點，則表示可將大瓶子中的水分成一半。

3.利用兩個空瓶子從最大瓶子裡不一定能倒出任何可能數量的水來。

參考資料：九章出版社 趣味幾何學（89） 九章出版社 使人聰明的智力遊戲（86）