投稿類別:數學類

篇名:
形之謎—探討正多邊形與各邊中點連線的新多邊形的關係

作者:
楊珽凱。高雄中學。高二 24 班

指導老師:
黃仁杰老師

壹、前言

一、摘要

我們常看到正多邊形卻無法得知它們邊長及面積的通式，及與中點連線的新多邊形的關係，在這次研究中，我便要討論出它們的關係及通式。此次研究中，我討論了關於角度及邊長和面積的關係，並導出了正多邊形的面積公式。

二、研究動機

在一次閒暇之餘中，我無意間把正多邊形的每邊中點連起來，我們早已知道，三角形的面積會變$\frac{1}{2}$，但當我把正方形邊長中點連線時，卻發現面積會變$\frac{1}{4}$，而五邊形、六邊形卻又更不一樣，於是展開了我這次一連串的研究。

三、研究目的

(一)研究正多邊形面積的通式
(二)研究正多邊形與各邊中點連線的新多邊形的角度關係
(三)研究正多邊形與各邊中點連線的新多邊形的邊長關係
(四)研究正多邊形與各邊中點連線的新多邊形的面積關係

四、研究設備及器材

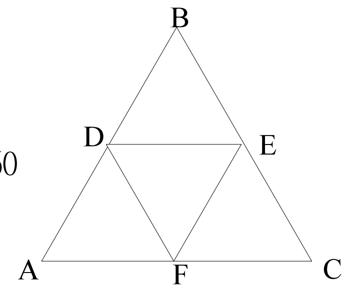
紙、筆、電腦

貳、正文

研究過程及方法:

一、研究一:角度

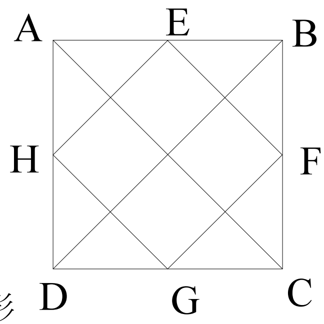
1.正ΔABC 內角和 180(3-2) =180 一個角$\frac{180}{3}$=60
將中點連線 得一ΔDEF 內角和 180
證明ΔDEF 亦為正三角形



Pf : ∵ΔABC 為正三角形 ∴AB=AC=BC
且 AF=FC=$\frac{1}{2}$ AC AD=DB=$\frac{1}{2}$AB BE=EC=$\frac{1}{2}$ BC
故 AF=AD CE=CF BD=BE ∴∠AFD=∠ADF=$\frac{180-\angle A}{2}$=60
同理∠CFE=60 ∠DFE=180-∠AFD-∠CFE=60
同理∠FDE=60 ∠FED=60 故ΔDEF 為正三角形

結論:正三角形與各邊中點連線的新三邊形角度相同

2.正四邊形 ABCD 內角和 180(4-2) =360 一個角$\frac{360}{4}$ =90
將中點連線 得一四邊形 EFGH 內角和 360
證明四邊形 EFGH 亦為正四邊形



Pf : 連接 BD AC
∵四邊形 ABCD 為正四邊形∴AB=BC=CD=AD
又 DH=$\frac{1}{2}$ AD DG=GC=$\frac{1}{2}$ CD CF=$\frac{1}{2}$ BC
∴DH=DG CG=CF 故∠DGH=$\frac{180-\angle D}{2}$ =45
同理 ∠FGC=45 故∠FGH=180-∠DGH-∠FGC=90
同理∠GFE=∠HEF=∠EHG=90 故四邊形 EFGH 為正四邊形

結論:正四邊形與各邊中點連線的新四邊形角度相同

3. 正 n 邊形 A1A2…An 內角和 180(n-2)
一個角$\frac{180(n-2)}{n}$將中點連線
得一 n 邊形 B1B2…Bn 內角和 180(n-2)
證明 n 邊形 B1B2…Bn 亦為正 n 邊形
n≠∞(圓形不討論)

Pf：連接 A1A3　A2An

∵n 邊形 A1A2…An 為正 n 邊形 ∴AnA1=A1A2=A2A3

又 BnA1= $\frac{1}{2}$ AnA1　A1B1=B1A2= $\frac{1}{2}$ A1A2　A2B2= $\frac{1}{2}$ A2A3

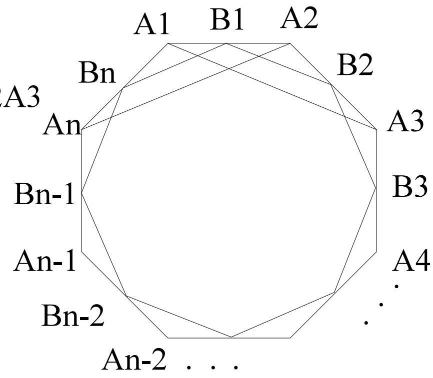
∴BnA1= A1B1　B1A2= A2B2

故∠A1B1Bn= $\frac{180-\angle A1}{n}$ = $\frac{180}{n}$　同理 ∠A2B1B2= $\frac{180}{n}$

故∠BnB1B2=180-∠A1B1Bn -∠A2B1B2= $\frac{180(n-2)}{n}$

同理∠B1B2B3=∠B2B3B4=…=∠Bn-1BnB1= $\frac{180(n-2)}{n}$

故 n 邊形 B1B2…Bn 為正 n 邊形



研究一結論:

1.正多邊形內角和=180(n-2) 一個 $\frac{180(n-2)}{n}$

n≠∞(圓形不討論)

2.正多邊形與各邊中點連線的新多邊形角度相等

(表示新多邊形亦為正多邊形)

二、研究二:邊長

1. 正ΔABC 將中點連線 得一正ΔDEF

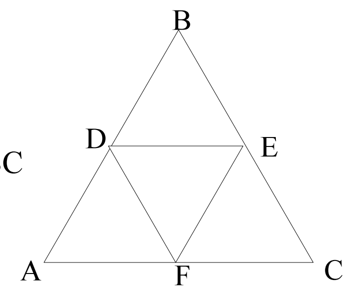
證明ΔDEF 邊長為ΔABC 的 $\frac{1}{2}$

Pf：∵ΔABC 為正三角形 ∴AB=AC

又 AD=DB= $\frac{1}{2}$ AB　AF=FC= $\frac{1}{2}$ AC　DF 平行 BC

故 DF= $\frac{1}{2}$ BC　同理 EF= $\frac{1}{2}$ AB　DE= $\frac{1}{2}$ AC

故ΔDEF 邊長為ΔABC 的 $\frac{1}{2}$



結論:正三角形與各邊中點連線的新三角形邊長比=2:1

2. 正四邊形 ABCD 將中點連線 得一正四邊形 EFGH

證明正四邊形 EFGH 邊長為正四邊形 ABCD 的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Pf：連接 BD　AC

∵四邊形 ABCD 為正四邊形∴AB=BC=CD=AD

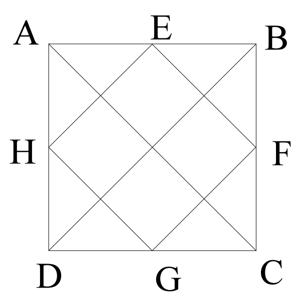
設 AB=BC=CD=AD=x　則 BD=AC= $\sqrt{2}$ x

又 DG=GC= $\frac{1}{2}$ CD　DH=HA= $\frac{1}{2}$ AD　且 AC 平行 HG

∴HG= $\frac{1}{2}$ AC= $\frac{\sqrt{2}}{2}$ x

同理 EH=HG=GF=FE= $\frac{\sqrt{2}}{2}$ x

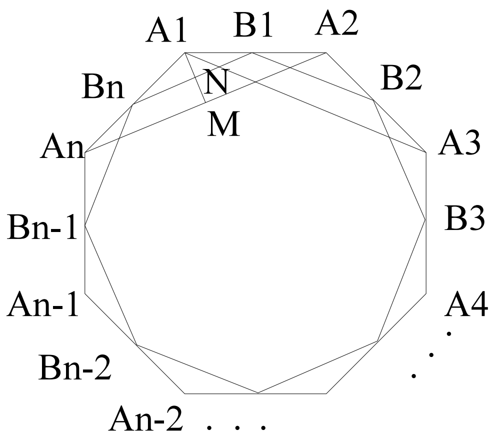
故四邊形 EFGH 邊長為正四邊形 ABCD 的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍



結論:正四邊形與各邊中點連線的新四邊形邊長比=1: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 正 n 邊形 A1A2…An 將中點連線 得一 n 邊形 B1B2…Bn
證明 n 邊形 B1B2…Bn 邊長為正 n 邊形 A1A2…An 的 $\sin\frac{180(n-2)}{2n}$ 倍
n≠∞(圓形不討論)

Pf : 連接 A1A3 A2An
作 A1M 垂直 AnA2
交 B1Bn 於 N
∵n 邊形 A1A2…An 為正 n 邊形
∴AnA1=A1A2=...=An-1An
且∠AnA1M=∠A2A1M= $\frac{1}{2}$ ∠A1= $\frac{180(n-2)}{2n}$
又 A1Bn=AnBn= $\frac{1}{2}$ AnA1 A1B1=B1A2= $\frac{1}{2}$ A1A2
且 BnB1 平行 AnA2 ∴BnB1= $\frac{1}{2}$ AnA2
設 AnA1= A1A2=...=An-1An=x
則 AnA2= 2 *x $\sin\frac{180(n-2)}{2n}$ = x $\sin\frac{180(n-2)}{n}$



故 BnB1= x $\sin\frac{180(n-2)}{2n}$
同理 BnB1=B1B2=...=Bn-1Bn= x $\sin\frac{180(n-2)}{2n}$
得證 n 邊形 B1B2…Bn 邊長為正 n 邊形 A1A2…An 的 $\sin\frac{180(n-2)}{2n}$ 倍

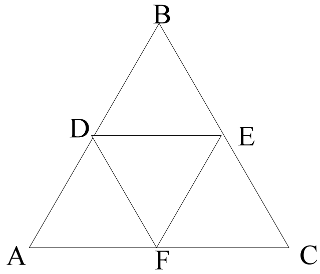
研究二結論:
正多邊形與各邊中點連線的新多邊形的邊長比為 1: $\sin\frac{180(n-2)}{2n}$

三、研究三:面積

1. 正ΔABC 將中點連線 得一正ΔDEF
證明ΔDEF 面積為ΔABC 的 $\frac{1}{4}$

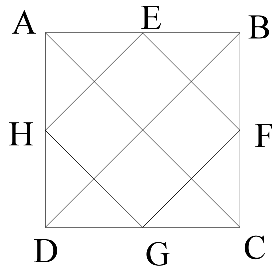
Pf :設 AB=AC=BC=x 則 DE=EF=DF= $\frac{x}{2}$
ΔABC 面積= $\frac{\sqrt{3}x^2}{4}$

ΔDEF 面積= $\frac{\sqrt{3}x^2}{16}$
得證ΔDEF 面積為ΔABC 的 $\frac{1}{4}$



結論: 正三角形與各邊中點連線的新三角形的面積比=4:1

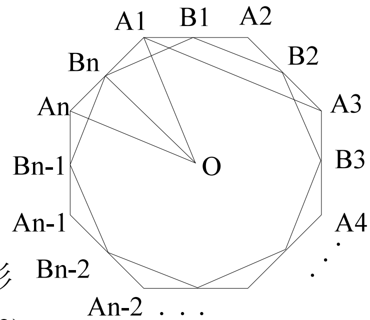
2.正四邊形 ABCD 將中點連線 得一正四邊形 EFGH
證明正四邊形 EFGH 面積為正四邊形 ABCD 的 $\frac{1}{2}$



Pf :設 AB=BC=CD=DA=x 則 EH=HG=GF=FE= $\frac{\sqrt{2}x}{2}$
正四邊形 ABCD 面積=x^2
正四邊形 EFGH 面積= $\frac{x^2}{2}$
得證正四邊形 EFGH 面積為正四邊形 ABCD 的 $\frac{1}{2}$

結論: 正四邊形與各邊中點連線的新四邊形的面積比=2:1

3. 正 n 邊形 A1A2…An 將中點連線 得一正 n 邊形 B1B2…Bn
n≠∞(圓形不討論) 設正多邊形邊長為 x
(1)試證正多邊形面積公式:$\dfrac{nx^2\tan\frac{180(n-2)}{2n}}{4}$
(2)試證正 n 邊形 B1B2…Bn 面積為正 n 邊形 A1A2…An 的$\left[\frac{\sin 180(n-2)}{2n}\right]^2$倍



Pf : 已知 A1An=x
則 BnO= $\frac{x}{2}\times\tan\frac{180(n-2)}{2n}$
ΔA1OAn=$\frac{1}{2}$ ×x×$\frac{x}{2}\times\tan\frac{180(n-2)}{2n}$ = $\dfrac{x^2\tan\frac{180(n-2)}{2n}}{4}$

∵n 邊形 A1A2…An 為正 n 邊形
∴可把 n 邊形 A1A2…An 切成 n 塊與ΔA1OAn 等面積的三角形

故 n 邊形 A1A2…An 面積=n× $\dfrac{x^2\tan\frac{180(n-2)}{2n}}{4}$ = $\dfrac{nx^2\tan\frac{180(n-2)}{2n}}{4}$
由此可知 面積與邊長成二次方關係
故當邊長為原多邊形的 $\sin\frac{180(n-2)}{2n}$ 倍時 面積為 $\left[\frac{\sin 180(n-2)}{2n}\right]^2$倍

故得證 (1) 正多邊形面積公式: $\dfrac{nx^2\tan\frac{180(n-2)}{2n}}{4}$

(2) 正 n 邊形 B1B2…Bn 面積為正 n 邊形 A1A2…An 的$\left[\frac{\sin 180(n-2)}{2n}\right]^2$倍

研究三結論:
1.若正多邊形邊長為 x 則正多邊形面積公式為$\dfrac{nx^2\tan\frac{180(n-2)}{2n}}{4}$

2.正多邊形與各邊中點連線的新多邊形的面積為 1: $\left[\frac{\sin 180(n-2)}{2n}\right]^2$

參、結論

一、結果與討論

(一)1.正多邊形內角和=180(n-2) 一個角 $\frac{180(n-2)}{n}$

n≠∞(圓形不討論)

2.正多邊形與各邊中點連線的新多邊形角度相等

(表示新多邊形亦為正多邊形)

(二)正多邊形與各邊中點連線的新多邊形的邊長比為 1: $\sin\frac{180(n-2)}{2n}$

(三)1.若正多邊形邊長為 x 正多邊形面積公式為 $\frac{nx^2\tan\frac{180(n-2)}{2n}}{4}$

2.正多邊形與各邊中點連線的新多邊形的面積為 1: $\left[\frac{\sin180(n-2)}{2n}\right]^2$

二、未來展望

1.希望未來可推展出不只中點連線，而是以任意比例的分點連線的多邊形與原多邊形關係

2.希望可推展到不只正多邊形而是任意多邊形的面積公式

肆、引註資料

一、魔數小子：貪心的三角形(多邊形的秘密)

作者：瑪瑞琳．伯恩斯

出版日期：2004/2/1

二、睡夢中，學三角

作者:木棉

出版日期：2006/01/23

三、毛起來說三角

作者:毛爾

出版日期：2000/09/30