投稿類別：數學類

篇名：

功虧一簣－賓果盤上的悲慘世界

作者：

盧昱霖。高雄市立高雄高級中學。高三 15 班

指導老師：

周靖北 老師

壹●前言

由一位主持人唸出號碼，若該號碼存在於一位玩家的賓果盤上，那麼該號碼將可被圈起來。而首先出現 5 個號碼連成一直線的玩家將勝利。像這樣子的賓果遊戲是為大眾所知的。但直到最近的某一局賓果遊戲結束後，賓果盤上出現了不可思議的事情：剩餘未被選中的數字中，只要任一個數字被選中，即有至少一條連線出現，除此之外賓果盤上未存在任何一條連線。由於這種令人錯愕的盤面引起了心中的小小怒火，於是想藉由尋找類似的盤面來發洩心中的不滿。

在經過仔細的思索求證，以及與其他老師的討論後，最初的目標終於有了一個結論。

貳●正文

一、　問題解說與研究目標

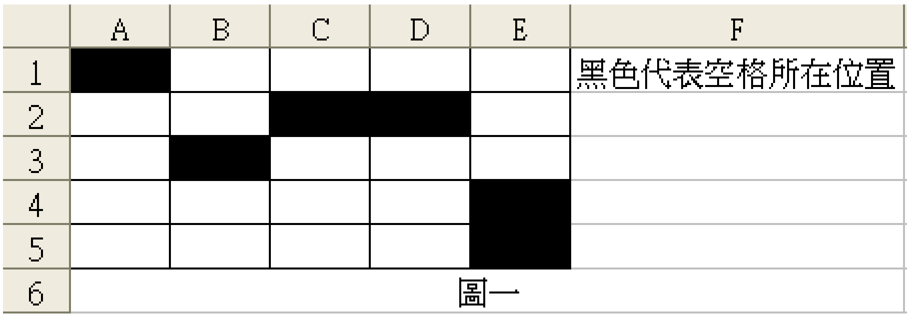
對於一個 5*5 的賓果盤，若發生了「前言」所敘述的狀況，則該盤面將有以下特色：

1. 該賓果盤上沒有出現任何一條連線(包括直線、橫線、對角線，且該線上沒有被任何空格占據)
2. 該賓果盤上剩餘未被圈選的數字中，任何一個數字若再被選中，則盤面上立即出現至少一條連線(包括直線、橫線、對角線，且該線上沒有被任何空格占據)

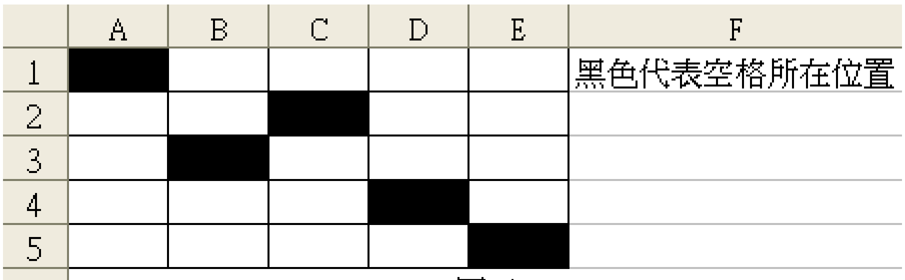
我們將此特色稱為「臨界條件」。

而在一個賓果盤上，一條連線是否出現，僅與該「位置」是否被選中有關，而與「該位置上的數字」無關。因此，在討論以上情況時，只需探討一個位置選中與否和連線的關係，而不用去在意該位置上被哪個數字占據。

因此，任取一種 5*5 賓果盤上的「臨界條件」，即可用以下的圖示座標化後表達(如**圖一**、**圖二**)：



圖一



圖二

在**圖一**與**圖二**中，雖然兩者同樣都是「臨界條件」，但是所包含的空格數不同。

考慮到當一局賓果盤進行到某一個時間點時，應念出 n 個數字，並且假設每個數字被念出的機率是相同的。那麼，當主持人隨機念出下一個數字時，盤面上有越多空格的賓果盤，該盤上又有一個空格被選中的機率越高。

因此，在所有的「臨界條件」中，若再給一次念出一個數字的機會，盤面上存在越多空格的賓果盤，出現一條連線的機率將越高。因此，將所有「臨界條件」中，擁有最多空格數的賓果盤，將該情況稱為「極限臨界條件」。

由於處在「極限臨界條件」下的賓果盤，是所有「臨界條件」中，即將出現一條連線的機率最高的情況，若賓果遊戲就在此結束，絕對令我哭笑不得。於是，本次研究將要尋找的目標為：

當發生「極限臨界條件」時，該賓果盤上將會存在多少個空格。

二、　　尋找極限臨界條件

（一）由何處下手：

一個 5*5 賓果盤上，包含著各種是否被圈選的位置，以及由各個位置連接而成的線(包含直線、橫線、對角線共 12 條)。因此可以考慮從「線對於空格的關係」或是「空格對於線的關係」去尋找規律。

(1)：由線為主去尋找關係：

首先我們將賓果盤上所有的線以及位置如右**圖三**表示：

N_1	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
M_1	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	$P_{1,3}$	$P_{1,4}$	$P_{1,5}$
M_2	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$P_{2,3}$	$P_{2,4}$	$P_{2,5}$
M_3	$P_{3,1}$	$P_{3,2}$	$P_{3,3}$	$P_{3,4}$	$P_{3,5}$
M_4	$P_{4,1}$	$P_{4,2}$	$P_{4,3}$	$P_{4,4}$	$P_{4,5}$
M_5	$P_{5,1}$	$P_{5,2}$	$P_{5,3}$	$P_{5,4}$	$P_{5,5}$
N_2					

圖三

其中：

$L_1:\{P_{1,1},P_{2,1},\ldots,P_{5,1}\}\,,L_2:\{P_{1,2},P_{2,2},\ldots,P_{5,2}\}\,,\ldots$

$M_1:\{P_{1,1},P_{1,2},...,P_{1,5}\}, M_2:\{P_{2,1},P_{2,2},...,P_{2,5}\},...$
$N_1:\{P_{1,1},P_{2,2},...,P_{5,5}\}, N_2:\{P_{5,1},P_{4,2},...,P_{1,5}\}$

以線為基準去看的話，則為了符合「臨界條件」，各個線將有下列特徵：

1. 所有線包含的位置中，皆至少包含到一個空格
2. 若賓果盤上有總共 n 個空格，則至少有 n 條線，僅包含到一個空格。

一步一步討論：先僅以可形成的連線數量討論。假設每條線上的位置皆未被其他線重複包含(也就是任 2 條線的交集為空集合)，則在「極限臨界條件」下，n 將不大於 5*2+2，即賓果盤上所有可能連線數量。

再考慮到實際任意線的交集並非空集合，則須把線分組討論，並且還需定義哪個線包含的哪個空格對應到哪個線上。由於此種做法已相當於是處理單個空格的方法，以線為主來做處理不易。故將此段做個初步結論，並且從另一個方面去尋找關係。

- 此段總結：對於一個 5*5 的賓果盤，「極限臨界條件」包含的空格數不超過 5*2+2 個，即賓果盤上所有可能連線數量。**(推論一)**

(2)：由空格位置為主去尋找關係：

繼續使用**圖三**，其中有 25 個位置可形成空格。將 L1~L5、M1~M5 做為賓果盤的坐標來看。對於一個空格 P，以下列方式表達：

$$P(M , L , N1 , N2)$$

當 P 的 L 坐標 = P 的 M 坐標時，N1 對角線將出現在上述 P 的表達式裡。同樣，當 P 的 L 坐標 + P 的 M 坐標 = 5+1 = 6 時，N2 對角線將出現在上述 P 的表達式裡。

以此為基準去分析的話，為了符合「臨界條件」，每個空格將有下列特徵：

1. 在所有存在於盤面上的空格中，所有的 L、M、N 必須至少出現一次。
2. 每個空格內的坐標，需要包含至少一個只出現一次的 L 或 M 或 N。

若根據特徵一及特徵二取其極值，使每個空格盡量**只占到一條僅包含一個空格的線**，如此可增加盤面上的空格數。並且假設這是可達成的，那麼「極

限臨界條件」下的空格數即為盤面上**僅包含一個空格的線**的數量。故以此尋找「極限臨界條件」下的空格數。**(想法一)**

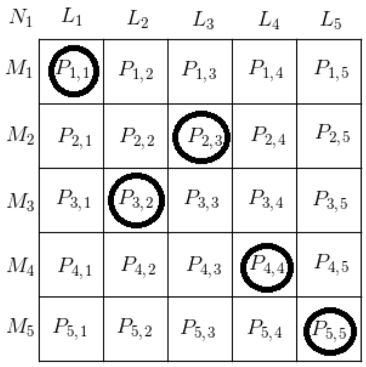
若以空格為主，尋找「極限臨界條件」下的空格數，則可遞進地一個一個將空格加入賓果盤中，並且每加入一個空格檢查一次條件，直到無法再加入為止。以此可方便尋找「極限臨界條件」下賓果盤上擁有的空格數。

（二）實做尋找(以空格為主)：

由於對角線在賓果盤上屬於較特殊的連線，因此先從「不考慮對角線」的情況下去推究，結束後再由推究的結果基礎上，考慮對角線繼續推究。

(1)：不考慮對角線：

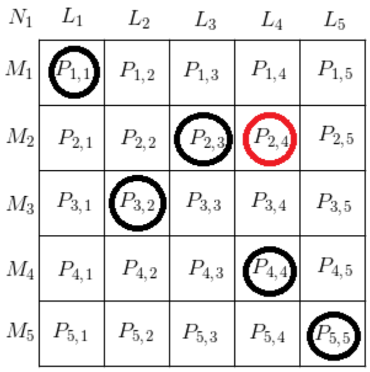
首先由第一個特徵做起。由於一個空格占有橫線、直線各一條，因此一個 5*5 賓果盤上，為了符合第一個特徵，需要至少 5 個點：橫線、直線各 5 條，分別只給一個空格使用(見下**圖四**，**黑圈處代表空格)**：



圖四

檢查特徵二，每個空格內的坐標，皆包含了 2 個只出現過一次的線段，已足夠滿足特徵二。

接著嘗試隨意增加一個空格 P’。由於 5 條橫線 M 及 5 條直線 L 皆已被占用一次，並且一個 P’需要 2 個坐標。因此，若再加入一個 P’(如**圖五**，以紅圈表示)，這個 P’將使其中 2 條線上出現 2 個空格，並且 P’本身無法滿足特徵二。

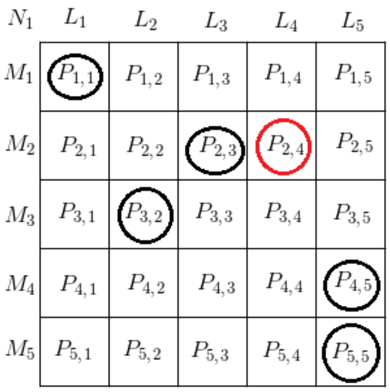


圖五

為了能讓盤上的空格符合特徵二，需要移動盤面上的空格。

若移動 P’，則移動後的結果相當於一開始就在該處設置 P’(P’是隨意設置的)，何況上述已表明，盤面上無法滿足特徵二的即是任意增加的 P’本身。因此，必須移動其他空格以使 P’能滿足特徵二。**(想法二)**

如下圖六，即移動(M4 , L4)至(M4 , L5)以讓 P’能有至少一條只出現過一次的坐標。(也可移動(M2 , L3)，此處以(M4 , L4)舉例)

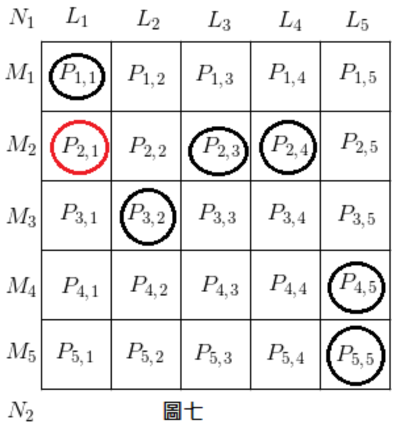


圖六

移動(M4 , L4)點至(M4 , L5)後，同時也更換了被 2 個或以上的空格占據的連線(M2 仍然被 2 個空格占據，但 L4 的第二個空格換到 L5)。雖然該盤面滿足了第二個特徵。但是對於 L1~L5 來說，必須把 5 個坐標分給 6 個點，一個點一個坐標，因此必然有其中一個坐標需要給 2 個空格使用，即該線被 2 個空格占據。M1~M5 亦然。

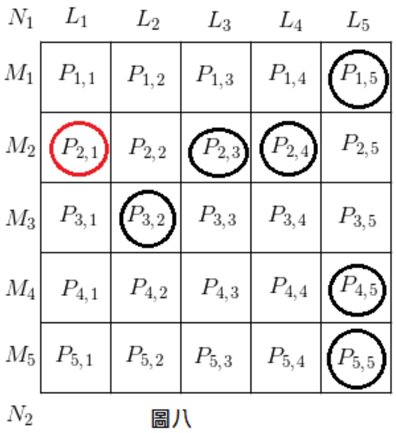
因此，就算移動空格，使盤面符合特徵二，在加入第 6 個點後，盤面上必然有 2 條線被 2 個點占用。根據**推論一**，並且暫時不考慮對角線的情況下，「極限臨界條件」可能包含的最大空格數為 5*2 個，但是目前已確定，當空格數大於 5 時，至少有 2 條線被 2 個點占據。因此，根據**想法一**及**推論一**的可能最大空格數下修至 5*2-2 個。

根據**想法一**，盡量只讓一個空格占據到一條只有一個空格的連線。因此繼續增加空格時，盡量不使**只被一個空格占據的線**數量減少。以此繼續加入一個點 P”(先前的 P’將換為黑色標記，P”將使用紅色標記，如**圖七**)，將加入在已被 2 個點占據的線 M2 或 L5 上：



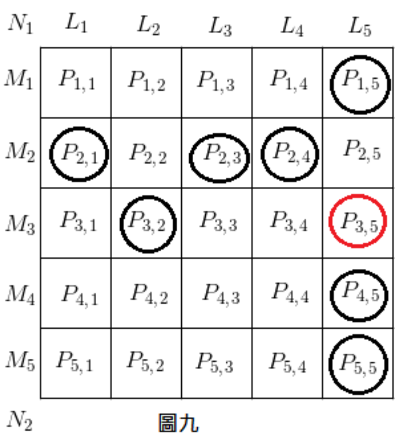
圖七

(M2 , L1)不符合條件，根據**想法二**移動(M1 , L1)至已被 2 個空格占據的 L5 上(如**圖八**)：

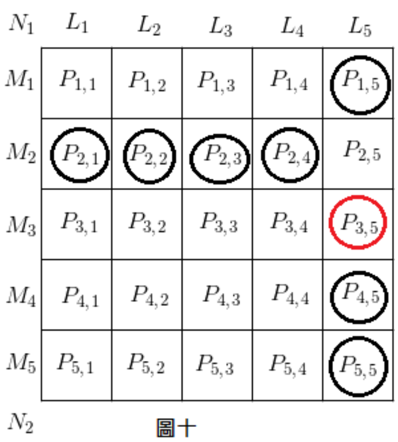


圖八

接著再置入 P”’(如**圖九**及**圖十**)：



圖九



圖十

如此已經達到了 5*2-2 = 8 的空格數。那麼若要再增加一個 P””’呢?

由於被兩條或以上的空格占據的 M2 及 L5 只剩下一個位置，也就是(M2 , L5)，該位置若再放入空格，將無法使其符合特徵二。同樣，若要放在其他位置，一來在不移動其他空格的情況下是無法滿足特徵二；二來沒有任何一個空格能在加入 P””’後，還能移動到其他能滿足特徵二的位置。

故由此得到總結：

不考慮對角線的 5*5 賓果盤，「極限臨界條件」下存在的空格數為 5*2-2=8 個。(**推論二**)

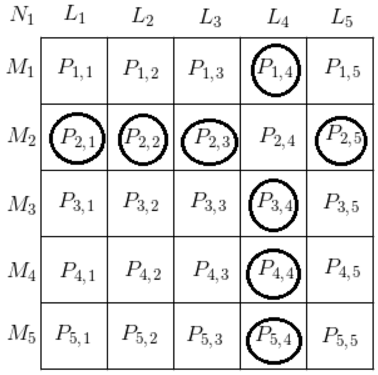
(2)：考慮對角線：

由**推論二**及其圖考慮，若要再加入一個 P””’，使「極限臨界條件」的可能空格數再增加，P””’至少需滿足下列條件：

1. 不可占用到其他空格的**僅有一個空格占據的線**。
2. 兩條被 2 個以上空格占據的線的交點坐標，再考慮對角線後變成一個可行的位置。

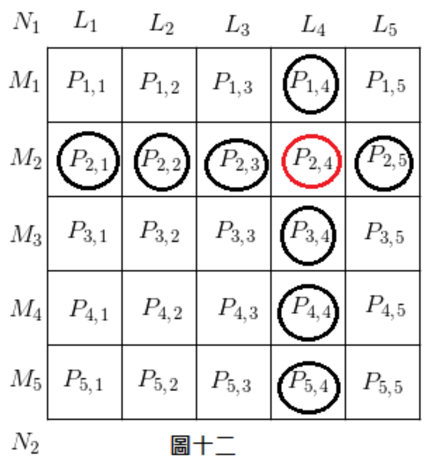
對於條件 1 的可能性，與是否有考慮對角線無關。因為占用的線屬於橫線或直線，若 1 可行，則不考慮對角線時的 1 也可行，如此在推論二時應該再多個空格出來。但實際上是無法做到的，因此條件 1 不可行。

因此唯一的機會則是該交點坐標。若該交點坐標在對角線上，則該點可再挖出一個空格，使其滿足特徵二。因此嘗試把該交點移至對角線上(如**圖十一**):



圖十一

交點(M2 , L4)位在對角線 N2 上。考慮對角線後，將 P””’空格放置於該坐標，則它占用了一條對角線 N2。並且 N2 上只有該空格存在(如**圖十二**):



圖十二

因此得到總結：

一個 5*5 的賓果盤上，「極限臨界條件」下的空格數量，將存在 9 個。

三、**推廣**

由**想法一**及**推論一**，推導出的理論最大空格數為 5*2-2，其中(-2)為減去被 2 個或以上的空格占用的線數量。至於 5*2 中的 5 即為賓果盤的大小(邊長 5 格)，*2 為一個方形盤面有直線、橫線 2 種。

若不限制賓果盤的大小為 5，而可為任意自然數，則檢查上式發現：上述的(-2)及(*2)都不隨賓果盤的大小而改變。因此嘗試將 5 代換成其他任意自然數 n，並且以前述的步驟尋找「極限臨界條件」後，發現了一件事情：

在任意自然數 n 下(除了 n=1)，皆可使用前述的步驟尋找「極限臨界條件」且「極限臨界條件」下的空格數 ＝n*2-2，相當於將 5 代換成任意自然數 n
(註：此式在 n=1 時不成立，因直線和橫線包含的範圍完全一樣)

考慮到對角線後，空格數固定增加 1 個。因此，一個方形，邊長有 N 格的賓果盤，考慮到對角線的情況，該盤的「極限臨界條件」下的空格數將是：

n*2-1
(該式的 n 在任何自然數情況下皆成立)

參●結論

一、　**總整理**

對於一個 5*5 的賓果盤，在不考慮對角線可形成連線的情況下，若該盤形成「極限臨界條件」，則該盤上將存在有 8 個空格。

而若是考慮到可形成對角連線，那麼「極限臨界條件」下的空格數將再多一，即有 9 個空格存在於盤面上。

若將該情況做推廣，賓果盤不固定為 5*5 大小，而是任意自然數 n*n 大小，則同樣可經由前述推導過程，找出「極限臨界條件」，並且將得到 n 與「極限臨界條件」下的空格數關係：

空格數 = n*2-2(不考慮對角線形成連線的情況)
空格數 = n*2-1(考慮對角線形成連線的情況)

二、 心得

終於找出了所謂的「極限臨界條件」，也就是設想賓果盤上可能發生的最令人哭笑不得的情況。雖然在推證過程曾經陷入膠著而無法繼續下去，但最終找到了想要的結果，並且得到了在推證過程中出現的想法及方法。並且最重要的是，心情因此發洩而舒坦了許多。

肆●引註資料

南一書局企業股份有限公司 (2013)。**普通高級中學 數學 第二冊**。台南市：南一書局企業股份有限公司。

維基百科－Bingo(U.S.)。2014 年 11 月 12 日，取自網址：
http://en.wikipedia.org/wiki/Bingo_(U.S.)

謝聰智(1978)。組合學專題之二 鴿籠原理。**數學傳播季刊**，第 2 卷第 4 期，P.43~P.48。