投稿類別：數學類

篇名：
幾何機率之探討

作者：
光育丞。高雄中學。高一 24 班
洪晨翔。高雄中學。高一 24 班

指導老師：
江國宏老師

壹●前言

在 2015 年 AMC12 考試時，有一道題目令我印象深刻，在考場上，我花了許多時間在解決那道題目，卻徒勞無功，可是我還是不死心，所以隔天就找同學討論了起來，討論結束後，同學突然問了一個問題：如果改成其他正多邊形呢?所以我們便想自己解決自己的疑問，於是我們就用以前學過的東西，並且去查閱到資料，加以分析、探討，整理出以下。

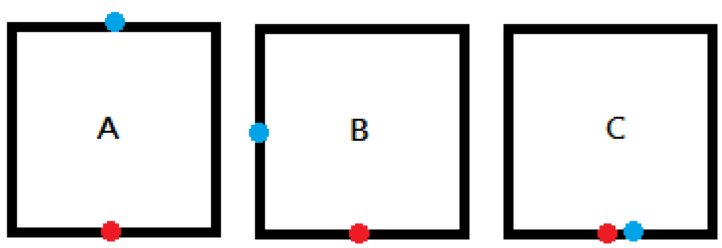
貳●正文

一、原題目介紹

「設 S 是一個邊長為 1 的正方形，在 S 的邊界上任選兩點，求這兩點連線段長至少是 1/2 的機率為何?」

經過我們的討論後，想出的解法如下：

<u>(一)任取 2 點在 4 邊形上，會有以下 3 種情形：</u>

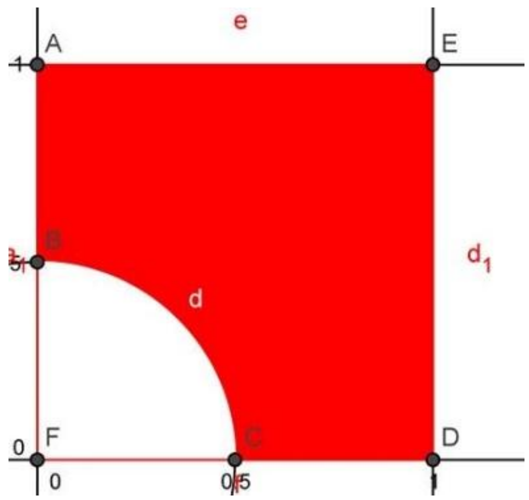


A、兩點在兩對邊上：

$P_A=1$

B、兩點在相鄰兩邊上：

建立一個座標，令原點(0.0)、紅點(a.0)、藍點(0.b) ，由題目條件可得：



$0 <= a,b <= 1$，$\sqrt{a^2+b^2}>=\frac{1}{2}$

可行解的面積

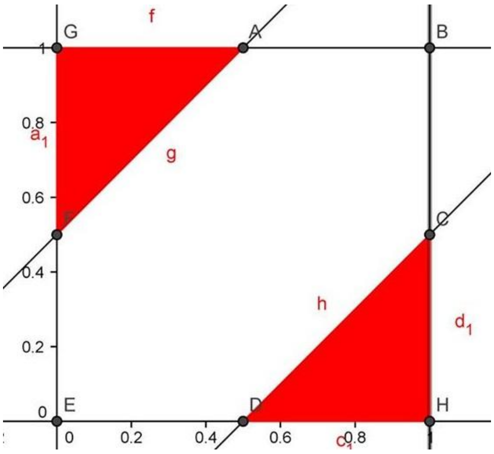
$= 1 * 1 - (1/2) * (1/2) * (1/4) * \pi = (16 - \pi)/16$

因此$P_B = [(16 - \pi)/16]/1 = (16 - \pi)/16$

C、兩點在同一邊上：

同理再建立一個座標，令原點(0.0)、紅點(a.0)、藍點(b.0)，

由題目條件可得：$0 <= a,b <= 1, a - b >= \frac{1}{2}$ 或 $b - a >= \frac{1}{2}$



可行解的面積

$=(1/2) * (1/2) * (1/2) * 2 = 1/4$

因此$P_C=(1/4)/1 = 1/4$

(二)又選到 A 之機率=1/4、B 之機率=2/4、C 之機率=1/4

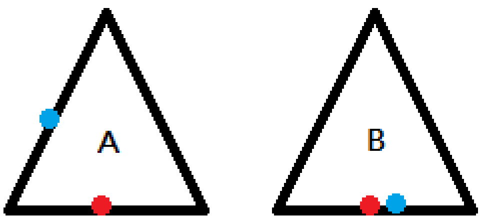
所以所求$P = (1/4)P_A + (1/2)P_B + (1/4)P_C$

$$= \left(\frac{1}{4}\right) * 1 + \left(\frac{1}{2}\right) * \left[\frac{16 - \pi}{16}\right] + \left(\frac{1}{4}\right) * \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= (26 - \pi)/32$$

二、推廣到邊長為 1 的三角形上

(一) 任取 2 點在 3 邊上，會有以下 2 種情形：

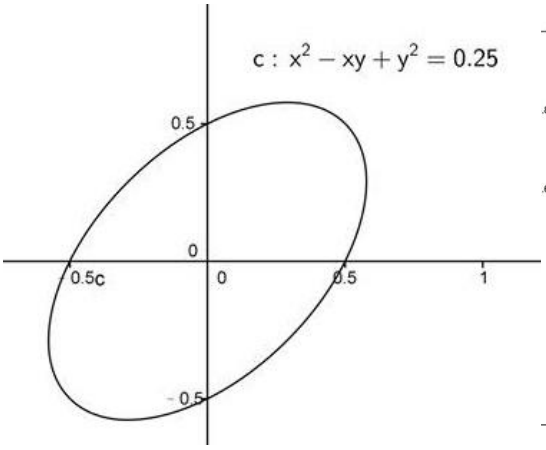


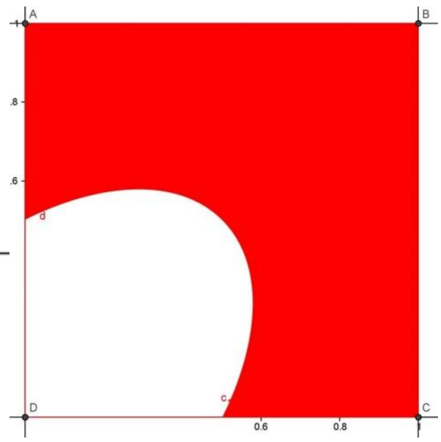
A、兩點在相鄰兩邊上：

建立一個座標，令原點(0,0)、紅點$(a,0)$、藍點$\left(b\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), b\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$，由題目

條件可得：$0 <= a,b <= 1; \sqrt{(b\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - a)^{\wedge}2 + b\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\wedge}2} <= \frac{1}{2}$

平方後得 $a^2 - ab + b^2 >= \frac{1}{4}$圖形如左下圖：





又圖形對稱 a=b,a=-b，所以可得半長、短軸為$\frac{\sqrt{2}}{2}$、$\frac{\sqrt{6}}{6}$

所以橢圓面積=$\frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{6}}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

藉由積分的幫助，我們可得知：

橢圓第一象限面積=$\frac{1}{2}$橢圓面積-第二象限面積

$$=\left(\frac{1}{2} * \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{b+\sqrt{1-3b^2}}{2}\, db\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \frac{\pi}{12\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

可行解面積=1- $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ $=\frac{6\sqrt{3}-\pi}{6\sqrt{3}}$

因此P_A=$\frac{6\sqrt{3}-\pi}{6\sqrt{3}}$

B、兩點在同一邊上：

同理再建立一個座標，0<=a,b<=1 , a-b>=$\frac{1}{2}$, b-a>=$\frac{1}{2}$

可行解的面積=(1/2)*(1/2)*(1/2)*2=1/4

因此P_B=(1/4)/1=1/4

(二)又選到 A 之機率=$\frac{2}{3}$、B 之機率=$\frac{1}{3}$

所以所求$P=\frac{2}{3}P_1+\frac{1}{3}P_2=\frac{2}{3}*\frac{6\sqrt{3}-\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{1}{3}*\frac{1}{4}=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{12}$

三、推廣到邊長為 d 的正 n 邊形上，2 點距離不小於 s(0 <= s <= d)

(一) 任取 2 點在 3 邊上，會有以下 3 種情形：

A、兩點在相鄰兩邊上：

建立一個座標，令原點(0,0)、紅點(a,0)、藍點(bcosθ,b sin θ) , θ=$\frac{n-2}{n}\pi$

由題目條件可得：0<= a,b<= d ;$\sqrt{(b\cos\theta-a)^2+(b\sin\theta)^2}$ >=s^2

平方後得$(b\cos\theta-a)^2+(b\sin\theta)^2$>=$s^2$

同理可算出橢圓面積=$\frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}*\frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{2(1+\cos\theta)}}\pi$= =$\frac{s^2\pi}{\sin\theta}$

再來，第二象限面積= $\int_{-s}^{0}(a\cos\theta+\sqrt{s^2-x^2\sin^2\theta})da$

令 x=$\frac{s}{\sin\theta}*\sin\alpha$

原式可化為 $-\frac{s^2\cos\theta}{2}+\int_{-\theta}^{0}(\frac{s^2}{\sin\theta}*\cos^2\alpha)d\alpha$

再令$\alpha=\frac{\beta}{2}$

原式可化為 $\frac{1}{2}s^2\cos\theta+\int_{-2\theta}^{0}(\frac{s^2}{4\sin\theta}(1+\cos\beta))d\beta$

= - $\frac{1}{2}s^2\cos\theta+\frac{s^2\theta}{2\sin\theta}+\frac{s^2\sin(2\theta)}{4\sin\theta}=\frac{s^2\theta}{2\sin\theta}$

所以橢圓第一象限面積=$\frac{1}{2}*\frac{s^2}{sin\theta}$ - $\frac{s^2\theta}{2sin\theta}$ =$\frac{s^2(\pi-\theta)}{2sin\theta}$

因此可行解面積=$d^2-\frac{s^2(\pi-\theta)}{2sin\theta}$

P_A=$\left[d^2-\frac{s^2(\pi-\theta)}{2sin\theta}\right]/d^2$ =1-$\frac{s^2(\pi-\theta)}{2d^2sin\theta}$

B、兩點在同一邊上：

建立一個座標，令原點(0.0)、紅點(a.0)、藍點(b.0)，

由題目條件可得：$0<=a,b<=d,a-b>=s$ 或 $b-a>=s$

可行解面積=$\frac{1}{2}(d-s)^2$*2=$(d-s)^2$

所以P_B=$\frac{(d-s)^2}{d^2}$

C、兩點不在相鄰邊也不在同一邊：

因為$s<=d,$，所以$P_C=1$

(二)又選到 A 之機率=$\frac{2}{n}$、B 之機率=$\frac{1}{n}$、C 之機率=$\frac{n-3}{n}$

所以所求$P=\frac{2}{n}P_A+\frac{1}{n}P_B+\frac{n-3}{n}P_C$

$$=\frac{2}{n}*\left[1-\frac{s^2(\pi-\theta)}{2d^2sin\theta}\right]+\frac{1}{n}*\frac{(d-s)^2}{d^2}+\frac{n-3}{n}*1$$

$$=\frac{sin\theta\left(d^2n+s^2-2ds\right)-s^2(\pi-\theta)}{nd^2sin\theta}$$

參● 結論

經過一系列的研究、討論，我們最終找出了關於邊長 d 的正 n 邊形上兩點、距離 s 的機率通式：

$$P=\frac{sin\theta(d^2n+s^2-2ds)-s^2(\pi-\theta)}{nd^2sin\theta}$$

其中θ=$\frac{n-2}{n}\pi$。

而未來希望能推廣到更多種情形：例如$d<=s$、正 n 邊形上三點所圍成面積、甚至是三度空間上的點線面間的關係。

肆●引註資料

1. **高中數學第4冊**。翰林出版。
2. 黃學亮(2014)。**微積分(第九版)**。全華圖書出版。
3. 橢圓：維基百科。http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A4%AD%E5%9C%86。