

106 學年度指定科目考試數學乙非選擇題參考答案

數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 8 月 15 日出刊的《選才電子報》。

106 學年度指定科目考試數學乙考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

題目：

一、某縣政府每週五對全縣居民發放甲、乙兩種彩券，每位居民均可憑身分證免費選擇領取甲券一張或乙券一張。根據長期統計，上週選擇甲券的民眾會有 85% 在本週維持選擇甲券、15% 改選乙券；而選擇乙券的民眾會有 35% 在本週改選甲券、65% 維持乙券。所謂穩定狀態，係指領取甲券及乙券的民眾比例在每週均保持不變。

(1) 試寫出描述上述現象的轉移矩陣。(5 分)

(2) 試問領取甲券和乙券民眾各占全縣居民百分比多少時，會形成穩定狀態？(8 分)

第(1)小題

設上週分別有 $x\%$ 和 $y\%$ 比率的縣民選擇甲券和乙券。則

$$\begin{cases} \text{本週選擇甲券的比率} = 0.85x + 0.35y \\ \text{本週選擇乙券的比率} = 0.15x + 0.65y \end{cases}$$

因此，轉移矩陣為 $\begin{bmatrix} 0.85 & 0.35 \\ 0.15 & 0.65 \end{bmatrix}$

註：若寫成下列矩陣，則需要有正確算式。

(1) 例如： $\begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.35 & 0.65 \end{bmatrix}$ ，要有 $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.35 & 0.65 \end{bmatrix}$ 的型式。

(2) 例如： $\begin{bmatrix} 0.65 & 0.15 \\ 0.35 & 0.85 \end{bmatrix}$ ，要有 $\begin{bmatrix} 0.65 & 0.15 \\ 0.35 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{乙} \\ \text{甲} \end{bmatrix}$ 的型式。

第(2)小題

解法一

設領甲券民眾所占的比例為 x ，則領乙券的比例為 $1-x$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0.85 & 0.35 \\ 0.15 & 0.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$$

$$\text{或 } 0.85x + 0.35(1-x) = x$$

$$\text{或 } 0.15x + 0.65(1-x) = 1-x$$

$$\Rightarrow 0.5x = 0.35$$

$$\therefore x = 0.7$$

可知領甲券所占的百分比例為 70%，而領乙券的是 30%

解法二

設領甲券民眾所占的比例為 x ，領乙券的比例為 y ，則

$$x + y = 1$$

由穩定狀態條件得知

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.35 \\ 0.15 & 0.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{或 } x = 0.85x + 0.35y$$

$$\text{或 } y = 0.15x + 0.65y$$

解得

$$x = \frac{7}{10}, \text{ 即 } 70\%$$

$$y = \frac{3}{10}, \text{ 即 } 30\%$$

可知領甲券所占的百分比例為 70%，而領乙券的是 30%

解法三

設領甲券民眾人數為 x ，領乙券人數為 y ，則

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.35 \\ 0.15 & 0.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

或 $x = 0.85x + 0.35y$ ，

或 $y = 0.15x + 0.65y$

解得

$$x : y = 7 : 3, \text{ 或 } x = \frac{7}{3}y, \text{ 或 } y = \frac{3}{7}x$$

因此，領取甲券占全縣居民 70%，領取乙券占全縣居民 30%

第二題

題目：

二、袋中有紅色代幣 4 枚、綠色代幣 9 枚、以及藍色代幣若干枚。每一枚紅色、綠色、藍色代幣分別可兌換 50 元、20 元及 10 元。現從袋中取出代幣，每一枚代幣被取出的機率均等。設隨機變數 X 代表取出 1 枚代幣可兌換的金額（單位：元）；隨機變數 Y 代表一次取出 2 枚代幣可兌換的金額（單位：元）。已知 X 的期望值為 20。

(1) 試問藍色代幣有多少枚？（5 分）

(2) 試問 $Y \leq 50$ 的機率 $P(Y \leq 50)$ 為何？（8 分）

第(1)小題

解法一

藍色代幣有 x 枚。因為期望值為 20，所以

$$E(X) = \frac{4}{4+9+x} \cdot 50 + \frac{9}{4+9+x} \cdot 20 + \frac{x}{4+9+x} \cdot 10 = 20$$

$$\text{或 } 200 + 180 + 10x = 20(13 + x)$$

$$\text{解得 } x = 12$$

解法二

設全部代幣有 x 枚。因為期望值為 20，所以

$$E(X) = \frac{4}{x} \cdot 50 + \frac{9}{x} \cdot 20 + \frac{x-13}{x} \cdot 10 = 20$$

$$\text{解得 } x = 25, \text{ 所以藍色代幣有 } 25 - 13 = 12 \text{ 枚}$$

第(2)小題

解法一

因為 $Y \leq 50$ 情況是「抽到的兩枚只能兩綠、兩藍、一綠一藍」，

$$\text{即 } P(Y \leq 50) = \frac{C_2^9 + C_2^{12} + C_1^9 \cdot C_1^{12}}{C_2^{25}} = \frac{9 \cdot 8 + 12 \cdot 11 + 2 \cdot 9 \cdot 12}{25 \cdot 24}$$

$$\text{故得 } P(Y \leq 50) = \frac{7}{10} = 0.7$$

解法二

因為 $Y \leq 50$ 情況是「抽到的兩枚代幣只能是綠色或藍色」

$$P(Y \leq 50) = \frac{C_2^{21}}{C_2^{25}} = \frac{21 \times 20}{25 \times 24}$$

$$\text{故得 } P(Y \leq 50) = \frac{7}{10} = 0.7$$

解法三

因為 $Y \leq 50$ 情況是「抽到的兩枚代幣不能有紅色」

$$\text{又 } P(Y > 50) = \frac{C_2^4 + C_1^4 \times C_1^9 + C_1^4 \times C_1^{12}}{C_2^{25}}$$

$$\text{或 } \frac{C_2^4 + C_1^4 \times C_1^{21}}{C_2^{25}}$$

$$\text{故得 } P(Y \leq 50) = 1 - P(Y > 50) = \frac{7}{10} = 0.7$$