

# 大學入學考試中心

## 九十九學年度學科能力測驗試題

### 數學考科

#### —作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 5 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：• 用 2B 鉛筆在「答案卡」上劃記，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正帶(液)  
• 答錯不倒扣

作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

(一) 填答選擇題時，只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, ±, 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題的選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而考生得到的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的  $\overset{3}{\square}$  劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±	
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若多選題第 10 題考生認為正確的選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡第 10 列的  $\overset{1}{\square}$  與  $\overset{3}{\square}$  劃記，如：

10	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
----	-------------------------------------	--------------------------	-------------------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

(二) 選填題的題號是 A, B, C, …, 而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的  $\overset{3}{\square}$  與第 19 列的  $\overset{8}{\square}$  劃記，如：

18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的  $\overset{-}{\square}$  與第 21 列的  $\overset{7}{\square}$  劃記，如：

20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※試題後附有可能用到的參考公式及數值

## 第壹部分：選擇題（佔 60 分）

### 一、單選題（佔 35 分）

說明：第 1 至 7 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1. 若數列  $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_{10}$  中每一項皆為 1 或  $-1$ ，則  $a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_{10}$  之值有多少種可能？  
(1) 10            (2) 11            (3)  $P_2^{10}$             (4)  $C_2^{10}$             (5)  $2^{10}$
  
2. 已知  $a, b$  為整數且行列式  $\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix} = 4$ ，則絕對值  $|a+b|$  為何？  
(1) 16            (2) 31            (3) 32            (4) 39            (5) 條件不足，無法確定
  
3. 箱中有三顆紅球與三顆白球。一摸彩遊戲是從箱中隨機同時抽出兩顆球。如果抽出的兩球顏色不同，則得獎金 100 元；如果兩球顏色相同，則無獎金。請問此遊戲獎金的期望值為何？  
(1) 20 元            (2) 30 元            (3) 40 元            (4) 50 元            (5) 60 元
  
4. 坐標平面上給定兩點  $A(1,0)$  與  $B(0,1)$ ，又考慮另外三點  $P(\pi,1)$ 、 $Q(-\sqrt{3},6)$  與  $R(2, \log_4 32)$ 。令  $\Delta PAB$  的面積為  $p$ 、 $\Delta QAB$  的面積為  $q$ 、 $\Delta RAB$  的面積為  $r$ 。請問下列哪一個選項是正確的？  
(1)  $p < q < r$   
(2)  $p < r < q$   
(3)  $q < p < r$   
(4)  $q < r < p$   
(5)  $r < q < p$

5. 在密閉的實驗室中，開始時有某種細菌 1 千隻，並且以每小時增加 8% 的速率繁殖。如果依此速率持續繁殖，則 100 小時後細菌的數量最接近下列哪一個選項？

(1) 9 千隻      (2) 108 千隻      (3) 2200 千隻      (4) 3200 千隻      (5) 32000 千隻

6. 坐標空間中  $O$  為原點，點  $A$  的坐標為  $(1, 2, 1)$ 。設  $S$  是以  $O$  為球心、4 為半徑的球面。請問在  $S$  上滿足內積  $\vec{OA} \cdot \vec{OP} = 6$  的所有點  $P$  所成的圖形為何？

(1) 空集合      (2) 一個點      (3) 兩個點      (4) 一個圓      (5) 兩個圓

7. 令橢圓  $\Gamma_1: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ 、 $\Gamma_2: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 2$ 、 $\Gamma_3: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = \frac{2x}{5}$  的長軸長分別為  $l_1$ 、 $l_2$ 、 $l_3$ 。請問下列哪一個選項是正確的？

(1)  $l_1 = l_2 = l_3$

(2)  $l_1 = l_2 < l_3$

(3)  $l_1 < l_2 < l_3$

(4)  $l_1 = l_3 < l_2$

(5)  $l_1 < l_3 < l_2$

## 二、多選題（佔 25 分）

說明：第 8 至 12 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項者可得 2.5 分，錯兩個或兩個以上選項者不給分。

8. 設  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 、 $\theta_4$  分別為第一、第二、第三、第四象限角，且都介於 0 與  $2\pi$  之間。已知

$$|\cos \theta_1| = |\cos \theta_2| = |\cos \theta_3| = |\cos \theta_4| = \frac{1}{3}, \text{ 請問下列哪些選項是正確的?}$$

(1)  $\theta_1 < \frac{\pi}{4}$

(2)  $\theta_1 + \theta_2 = \pi$

(3)  $\cos \theta_3 = -\frac{1}{3}$

(4)  $\sin \theta_4 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

(5)  $\theta_4 = \theta_3 + \frac{\pi}{2}$

9. 下列哪些方程式有實數解？

(1)  $x^3 + x - 1 = 0$

(2)  $2^x + 2^{-x} = 0$

(3)  $\log_2 x + \log_x 2 = 1$

(4)  $\sin x + \cos 2x = 3$

(5)  $4\sin x + 3\cos x = \frac{9}{2}$

10. 設  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  為一實數數列，且對所有的正整數  $n$  滿足  $a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} - a_n$ 。請問下列哪些選項是正確的？

- (1) 如果  $a_1 = 1$ ，則  $a_2 = 1$
- (2) 如果  $a_1$  是整數，則此數列的每一項都是整數
- (3) 如果  $a_1$  是無理數，則此數列的每一項都是無理數
- (4)  $a_2 \leq a_4 \leq \dots \leq a_{2n} \leq \dots$  ( $n$  為正整數)
- (5) 如果  $a_k$  是奇數，則  $a_{k+2}, a_{k+4}, \dots, a_{k+2n}, \dots$  都是奇數 ( $n$  為正整數)

11. 坐標空間中，直線  $L$  上距離點  $Q$  最近的點稱為  $Q$  在  $L$  上的投影點。已知  $L$  為平面  $2x - y = 2$  上通過點  $(2, 2, 2)$  的一直線。請問下列哪些選項中的點可能是原點  $O$  在  $L$  上的投影點？

- (1)  $(2, 2, 2)$       (2)  $(2, 0, 2)$       (3)  $\left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0\right)$       (4)  $\left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, -2\right)$       (5)  $\left(\frac{8}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}\right)$

12. 想要了解台灣的公民對某議題支持的程度所作的抽樣調查，依性別區分，所得結果如下表：

	女性公民	男性公民
贊成此議題的比例 $\hat{p}$	0.52	0.59
$\hat{p}$ 的標準差 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	0.02	0.04

請問從此次抽樣結果可以得到下列哪些推論？

- (1) 全台灣男性公民贊成此議題的比例大於女性公民贊成此議題的比例
- (2) 在 95% 的信心水準之下，全台灣女性公民贊成此議題之比例的信賴區間為  $[0.48, 0.56]$  (計算到小數點後第二位，以下四捨五入)
- (3) 此次抽樣的女性公民數少於男性公民數
- (4) 如果不區分性別，此次抽樣贊成此議題的比例  $\hat{p}$  介於 0.52 與 0.59 之間
- (5) 如果不區分性別，此次抽樣  $\hat{p}$  的標準差  $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$  介於 0.02 與 0.04 之間

### 第貳部分：選填題（佔 40 分）

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (13-32)。  
2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 坐標平面上有一個平行四邊形  $ABCD$ ，其中點  $A$  的坐標為  $(2,1)$ ，點  $B$  的坐標為  $(8,2)$ ，點  $C$  在第一象限且知其  $x$  坐標為 12。若平行四邊形  $ABCD$  的面積等於 38 平方單位，則點  $D$  的坐標為 (13)，(14)。

B. 設  $f(x)$  為滿足下列條件的最低次實係數多項式： $f(x)$  最高次項的係數為 1，且  $3-2i$ 、 $i$ 、5 皆為方程式  $f(x)=0$  的解（其中  $i^2 = -1$ ）。則  $f(x)$  之常數項為 (15)(16)(17)。

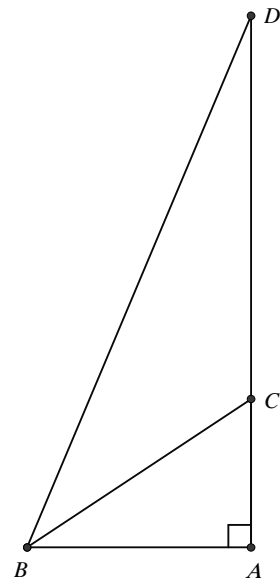
C. 有一個兩列三行的表格如右下圖。在六個空格中分別填入數字 1、2、3、4、5、6（不得重複），則 1、2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有 (18)(19)(20) 種。


D. 設實數  $a > 0$ 。若  $x$ 、 $y$  的方程組 
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = a \\ x - ay = 122 \end{cases}$$
 有解，則  $a =$  (21)(22)。

E. 如右圖，直角三角形  $ABD$  中， $\angle A$  為直角， $C$  為  $\overline{AD}$  邊上的點。

已知  $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AB} = 5$ ， $\angle ABD = 2\angle ABC$ ，則

$$\overline{BD} = \frac{\textcircled{23} \textcircled{24}}{\textcircled{25}} \text{。 (化成最簡分數)}$$



F. 設  $a$ 、 $b$  為實數。已知坐標平面上拋物線  $y = x^2 + ax + b$  與  $x$  軸交於  $P$ 、 $Q$  兩點，且  $\overline{PQ} = 7$ 。

若拋物線  $y = x^2 + ax + (b + 2)$  與  $x$  軸的兩交點為  $R$ 、 $S$ ，則  $\overline{RS} = \sqrt{\textcircled{26} \textcircled{27}}$ 。

G. 已知  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 2$ 、 $\overline{BC} = 3$  且  $\angle A = 2\angle C$ ，則  $\overline{AC} = \frac{\textcircled{28}}{\textcircled{29}}$ 。(化成最簡分數)

H. 坐標平面上給定點  $A(\frac{9}{4}, 2)$ 、直線  $L: y = -5$  與拋物線  $\Gamma: x^2 = 8y$ 。以  $d(P, L)$  表示點  $P$  到直線  $L$  的

距離。若點  $P$  在  $\Gamma$  上變動，則  $|d(P, L) - \overline{AP}|$  之最大值為  $\frac{\textcircled{30} \textcircled{31}}{\textcircled{32}}$ 。(化成最簡分數)

### 可能用到的參考公式及數值

- 一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  的公式解： $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- 平面上兩點  $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$  間的距離  $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- 通過  $(x_1, y_1)$  與  $(x_2, y_2)$  的直線斜率  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ， $x_2 \neq x_1$
- 首項為  $a$  且公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和  $S_n = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$   
首項為  $a$  且公比為  $r$  的等比數列前  $n$  項之和  $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ ， $r \neq 1$
- 三角函數的和角公式： $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$   
 $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$   
 $\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
- 算術平均數： $\bar{X} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$   
(樣本)標準差： $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left( \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\bar{X}^2 \right)}$
- 95% 信心水準下之信賴區間： $\left[ \hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$
- 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$
- 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$