

高雄中學 102 學年度第一學期 第三次期中考 高一數學科 試題卷

一年____班____號 姓名：_____

注意：請將答案用原子筆填入答案卷，須將答案填入正確欄位，否則不予計分。

第一部分：多選題(6分，錯一個選項扣3分，錯兩個或兩個以上選項則不計分)

1. 設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ 為整係數 n 次多項式，下列哪些選項恆正確？
- (A) $p, q \in \mathbb{Z}$ ，若 $px + q$ 滿足 $p|a_n$ 且 $q|a_0$ ，則 $px + q$ 為 $f(x)$ 之一次因式
- (B) 若 $f(3+i) = 2i - 5$ ，則 $f(3-i) = 2i + 5$
- (C) 已知 $\deg f(x) = 2013$ ，則 $f(x)$ 的圖形與 x 軸至少交於 1 點
- (D) 若 $2x + 1$ 為 $f(x)$ 之一次因式，則 $4x + 2$ 亦為 $f(x)$ 的一次因式
- (E) x_1, x_2, \dots, x_{n+1} 為相異實數，若 $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_{n+1}) = 3$ ，則 $f(x)$ 為零次多項式

第二部分：填充題(每題完全答對才給分，依下列配分表計分，共計 76 分。)

※多項式形式須展開並依 x 之降冪排列。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
總得分	6	12	18	24	30	36	42	47	52	57	62	66	70	73	76

1. 設 α, β, γ 為 $3x^3 - 6x^2 + (k^2 - 1)x + k = 0$ 之三根，若 $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 7$ ，則 $k = ?$
2. 設 $(x^{23} - 6x^{13} + 8x + 4)(x^9 - 2x^4 - 5x + 2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{32} x^{32}$ ，求 $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{32} = ?$
3. 設 $f(x) = 8x^3 - 28x^2 + 56x - 43$ ，求 $f(1.501)$ 之近似值四捨五入取至小數第四位。
4. 若 $x - \frac{1}{x} = 1$ 且 $x > 0$ ，求 $2x^5 + x^4 - 5x^3 - 6x^2 + x + 4$ 之值。
5. 設 $f(x)$ 為實係數多項式且 $\deg f(x) = 2013$ ，若 $f(x)$ 以 $x^2 + 1$ 除之餘式為 $12x + 4$ ，以 $(x - 2)^2$ 除之餘式為 $5x + 3$ ，求 $f(x)$ 以 $(x^2 + 1)(x - 2)^2$ 除之餘式。
6. 設 $a, b \in \mathbb{Q}$ ，若方程式 $x^3 + (a + \sqrt{3})x + (b - 2\sqrt{3}) = 0$ 有一根為 $1 + \sqrt{3}$ ，求數對 (a, b) 。

7. 方程式 $x^4 + 3x^3 + bx^2 + cx + 10 = 0$ ($b, c \in \mathbb{Z}$) 有四個相異有理根，則其最大根為何？
8. 設實係數方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ 有一實根及兩虛根 α, α^2 ，求數對 (a, b) .
9. $f_n(x)$ 為實係數 n 次多項式且 $n \in \mathbb{N}$ ，已知 $f_n(0) = f_n(1) = f_n(2) = \cdots = f_n(n-1) = 0$ ，但 $f_n(n) = n$ ，求 $f_n(n+1) = ?$ (以 n 表示)
10. 已知 $\deg f(x) = 3$ ，且 $f(2010) = 10$ ， $f(2013) = 7$ ， $f(2015) = 5$ ， $f(2016) = 1$ ，求 $f(2019)$.
11. $a, b \in \mathbb{R}$ ，若 $2i - 3$ 是 $x^4 + 3x^3 + (a+1)x^2 + (a+2)x + b = 0$ 的一根，求數對 (a, b) .
12. $f(x) = x^4 - 2(3m+1)x^2 + 7m^2 + 3m$ ， $m \in \mathbb{R}$ ，若 $f(x) = 0$ 有四個相異純虛根，求 m 之範圍.
13. 對所有實數 x ， $x - (x+1)^2 < ax - a - 1 < x^2$ 恆成立，求 a 之範圍.
14. 設多項式 $f(x)$ 以 $ax + b$ ($a \neq 0$) 除之，商式為 $q(x)$ ，餘式為 r ，求以 $ax + b$ 除 $x^2 f(x)$ 之餘式.
15. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式， $f(x) - 1$ 含有 $(x-1)^2$ 之因式，又 $3 - f(x)$ 可被 $x - 2$ 整除，且其商式為完全平方式，求 $f(x)$.

第三部分：證明題(請完整寫出證明過程，若過程不完整則部份給分，共 18 分。)

1. 設 $f(x) = x^5 + x^3 - 1$ ， $g(x) = x^4 - 6x$ ；試證明：在 0 與 1 之間存在實數 a 滿足 $f(a) = g(a) + 2a$ 。(5 分)

2. 已知 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 有三個實根，求證：

(1) $a^2 \geq 3b$ (5 分)

(2) $\sqrt{a^2 - 3b} \leq \text{最大根} - \text{最小根} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 - 3b}$ (8 分)

高雄中學 102 學年度第一學期 第三次期中考 高一數學科 答案卷

一年____班____號 姓名：_____

注意：請將答案用原子筆填入答案卷，須將答案填入正確欄位，否則不予計分。

第一部分：多選題(6分，錯一個選項扣3分，錯兩個或兩個以上選項則不計分)

1.

第二部分：填充題(共計76分，每題完全答對才給分，依下列配分表計分。)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
總得分	6	12	18	24	30	36	42	47	52	57	62	66	70	73	76

1.	2.	3.
4.	5.	6.
7.	8.	9.
10.	11.	12.
13.	14.	15.

第三部分：證明題(請完整寫出證明過程，若過程不完整則部份給分，共18分。)

1.	2.
----	----