高雄中學 102 學年度第一學期　第三次期中考 高一數學科　答案卷

一年_____班____號 姓名：____________________

注意：請將答案用原子筆填入答案卷，須將答案填入正確欄位，否則不予計分。

第一部分：多選題(6 分，錯一個選項扣 3 分，錯兩個或兩個以上選項則不計分)

1. CDE

第二部分：填充題(共計 76 分，每題完全答對才給分，依下列配分表計分。)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
總得分	6	12	18	24	30	36	42	47	52	57	62	66	70	73	76

1. 1 或 $\frac{-3}{2}$	2. -12	3. 5.0260(5.026)
4. $-\sqrt{5}$	5. $x^3-5x^2+13x-1$	6. $(-5,-8)$
7. 2	8. $(2,2)$	9. n^2+n
10. -35	11. $(1,91)$	12. $m<-1\ or\ \frac{-1}{2}<m<\frac{-3}{7}$
13. $2-2\sqrt{2}<a<-3+2\sqrt{2}$	14. $\frac{b^2r}{a^2}$	15. $\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x+2$(送分)

第三部分：證明題(請完整寫出證明過程，若過程不完整則部份給分，共 18 分。)

1.

令$h(x)=f(x)-g(x)-2x$

$$\begin{cases}h(0)=f(0)-g(0)-2\times 0=-1-0-0=-1\\ h(1)=f(1)-g(1)-2\times 1=1-(-5)-2=4\end{cases}\Rightarrow h(0)\times h(1)=(-1)\times 4=-4<0$$

由勘根定理可得，在0 與 1之間存在實數a滿足$h(a)=0$

即$f(a)-g(a)-2a=0\Leftrightarrow f(a)=g(a)+2a$ ■

2.

令三實根為α、β、$\gamma\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-a\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b\\ \alpha\beta\gamma=-c\end{cases}$　且設$\alpha\le\beta\le\gamma$

(1)

$$\begin{aligned}a^2-3b&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\\&=\frac{1}{2}[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]\ge 0\end{aligned}$$

故$a^2\ge 3b$

(2)

①證明$\sqrt{a^2-3b} \le \gamma-\alpha$（亦即證$a^2-3b \le (\gamma-\alpha)^2$）

$$(\gamma-\alpha)^2-(a^2-3b)=\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

$$=\alpha\beta+\beta\gamma-\gamma\alpha-\beta^2=(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)\ge 0$$

$$\Rightarrow a^2-3b \le (\gamma-\alpha)^2 \quad 即\sqrt{a^2-3b} \le \gamma-\alpha$$

②證明$\gamma-\alpha \le \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2-3b}$（亦即證$(\gamma-\alpha)^2 \le \frac{4}{3}(a^2-3b)$）

$$\frac{4}{3}(a^2-3b)-(\gamma-\alpha)^2=\frac{4}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)-\gamma^2+2\gamma\alpha-\alpha^2$$

$$=\frac{1}{3}(\alpha^2+4\beta^2+\gamma^2-4\alpha\beta-4\beta\gamma+2\gamma\alpha)=\frac{1}{3}(\alpha-2\beta+\gamma)^2\ge 0$$

$$\Longrightarrow (\gamma-\alpha)^2 \le \frac{4}{3}(a^2-3b) \quad 即\ \gamma-\alpha \le \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2-3b}$$

由①②可得，$\sqrt{a^2-3b} \le$ 最大根 $-$ 最小根 $\le \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2-3b}$ ■