

高雄中學 102 學年度第一學期高三期末考數學科試題【第一類組】

1. 設 A 、 B 、 C 為 2×2 矩陣， O 為 2 階零矩陣， k 為常數，下列敘述何者**正確**? 【單選】
- 若 $A^2 = O$ ，則 $A=O$ • 若 $AB=O$ 則 $BA=O$ $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ • $\det(kA) = k \times \det(A)$
 若 $\det(A) \neq 0$ ，且 $AB=AC$ ，則 $B=C$
2. 已知 $\log 2=0.3010$ ， $\log 3=0.4771$ ，又 $3^x = \frac{4}{3}$ ，則 x 最接近下列何值? 【單選】
- 0.24 • 0.26 0.28 • 0.30 • 0.32
3. 關於實係數三次多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，下列敘述哪些**正確**? 【多選】
- 若 $f(x)=0$ 在 3 與 4 之間有實根，則 $f(3) \cdot f(4) < 0$
 若 $f(2+i)=0$ 則 $f(2-i)=0$
 若 $\frac{2}{3}$ 為 $f(x)=0$ 之一根，則 a 必為 3 之倍數
 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸必有奇數個交點
 $y=f(x)$ 與 $y=-x^2$ 的圖形必有交點
4. 空間中，下列各方程式所表示的圖形何者和 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{5}$ 的圖形**只有一個**交點? 【多選】
- $x + y - z = 1$ • $2x + 3y + 5z = 1$ $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{3}$
 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{5}$ • $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{5}$
5. 已知二次函數 $f(x) = 9 \times \frac{(x-5)(x-7)}{(1-5)(1-7)} + 9 \times \frac{(x-1)(x-7)}{(5-1)(5-7)} - 6 \times \frac{(x-1)(x-5)}{(7-1)(7-5)}$ ，則 $f(x)$ 的**最大值**為何?
6. 已知 $\sin a + \cos b = \frac{5}{6}$ ， $\cos a - \sin b = \frac{1}{2}$ ，則 $\sin(a-b) = ?$
7. 設銳角三角形 ABC 的外接圓的半徑為 8，已知外接圓圓心到 \overline{AB} 的距離為 2，而到 \overline{BC} 的距離為 7，則 $\overline{AC} = ?$

8. 符合不等式 $\frac{2x+6}{x^2-x-6} \leq -1$ 的**整數解** x 共有幾個?
9. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和 $S_n = n(n+5)$ ，求 $a_1 + a_{20} = ?$
10. 數列 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，且滿足 $7a_7 = 15a_{15}$ ，且 $a_1 < 0$ ，若 $a_n > 0$ ，則 n 之**最小值**為?
11. 設 $x > 0$ ，已知 $\log x - \log 1234$ 是整數且 $|\log x - \log 5678| < 1$ ，則 $\log x$ 的**首數**可能為何?
12. 袋子裡有 3 顆白球，2 顆黑球。由甲乙丙三人依序各抽取一顆球，抽取後不放回。若每顆球被取出的機會均等。試問:在甲和乙抽到**相同顏色球**的條件下，丙抽到**白球**之條件機率為何?
13. 將 30 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子，每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆。則分裝的方法共有幾種?
14. 雄中調查高三學生模擬考成績與學測成績的相關性，假設模擬考成績為 x ，學測成績為 y ， x 與 y 的相關係數為 0.9。令 $2x-1$ 與 $2y-1$ 的相關係數為 r_1 ， $1-\frac{1}{2}x$ 與 $1-\frac{1}{2}y$ 的相關係數為 r_2 ，求 $r_1 + r_2 = ?$
15. 設 n 為正整數，令 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ ，求 $a_5 + b_6 + c_7 + d_8 = ?$
16. 有一 $DABC$ ，已知 D 、 E 、 F 依次在 \overline{BC} 、 \overline{CA} 、 \overline{AB} 上，且 $\overline{BD} = \overline{DC}$ ， $\overline{CE} = 2\overline{EA}$ ， $\overline{AF} = 3\overline{FB}$ ，又點 G 為 $DDEF$ 的重心，若 $\overline{AG} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$ ， x, y 為實數，求 $x+y = ?$
17. 已知 $A(2,1)$ ， $B(1, -2)$ 為平面上兩點，設 P 為 $x^2 + y^2 = 10$ 的一動點，則所有可能的 $DABP$ 中，**最大面積** 為何?
18. 設 P 為雙曲線 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 上的動點，兩焦點 F_1 、 F_2 ，已知 $2\overline{PF_1} = 3\overline{PF_2}$ ，則 DPF_1F_2 的**周長**為何?

高雄中學 102 學年度第一學期高三期末考數學科試題【第一類組】

19. 設 A 、 B 、 C 為 2×2 矩陣， O 為 2 階零矩陣， k 為常數，下列敘述何者正確？

- 若 $A^2 = O$ ，則 $A=O$ • 若 $AB=O$ 則 $BA=O$ $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ • $\det(kA) = k \times \det(A)$
 若 $\det(A) \neq 0$ ，且 $AB=AC$ ，則 $B=C$ **【•】**

20. 已知 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ，又 $3^x = \frac{4}{3}$ ，則 x 最接近下列何值？

- 0.24 • 0.26 0.28 • 0.30 • 0.32 **【•】**

21. 關於實係數三次多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，下列敘述哪些正確？

- 若 $f(x)=0$ 在 3 與 4 之間有實根，則 $f(3) \cdot f(4) < 0$
 若 $f(2+i)=0$ ，則 $f(2-i)=0$
 若 $\frac{2}{3}$ 為 $f(x)=0$ 之一根，則 a 必為 3 之倍數
 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸必有奇數個交點
 $y=f(x)$ 與 $y=-x^2$ 的圖形必有交點 **【••】**

22. 空間中，下列各方程式所表示的圖形何者和 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{5}$ 的圖形只有一個交點？

- $x + y - z = 1$ • $2x + 3y + 5z = 1$ $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{3}$ • $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{5}$
 $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{5}$ **【• 】**

23. 已知二次函數 $f(x) = 9 \times \frac{(x-5)(x-7)}{(1-5)(1-7)} + 9 \times \frac{(x-1)(x-7)}{(5-1)(5-7)} - 6 \times \frac{(x-1)(x-5)}{(7-1)(7-5)}$ ，則 $f(x)$ 的最大值為何？【14】

24. 已知 $\sin a + \cos b = \frac{5}{6}$ ， $\cos a - \sin b = \frac{1}{2}$ ，則 $\sin(a-b) = ?$ 【-19/36】

25. 設銳角三角形 ABC 的外接圓的半徑為 8，已知外接圓圓心到 \overline{AB} 的距離為 2，而到 \overline{BC} 的距離為 7，則 $\overline{AC} = ?$ 【 $4\sqrt{15}$ 】

26. 符合不等式 $\frac{2x+6}{x^2-x-6} \leq -1$ 的整數解 x 共有幾個？【4】

27. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和 $S_n = n(n+5)$ ，求 $a_1 + a_{20} = ?$ 【50】

28. 數列 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，且滿足 $7a_7 = 15a_{15}$ ，且 $a_1 < 0$ ，若 $a_n > 0$ ，則 n 之最小值為？【23】

29. 設 $x > 0$ ，已知 $\log x - \log 1234$ 是整數且 $|\log x - \log 5678| < 1$ ，則 $\log x$ 的首數可能為何？【3 或 4】

30. 袋子裡有 3 顆白球，2 顆黑球。由甲乙丙三人依序各抽取一顆球，抽取後不放回。若每顆球被取出的機會均等。試問：在甲和乙抽到相同顏色球的條件下，丙抽到白球之條件機率為何？【1/2】
31. 將 30 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子，每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆。則分裝的方法共有幾種？【105】
32. 雄中調查高三學生模擬考成績與學測成績的相關性，假設模擬考成績為 x ，學測成績為 y ， x 與 y 的相關係數為 0.9。令 $2x-1$ 與 $2y-1$ 的相關係數為 r_1 ， $1-\frac{1}{2}x$ 與 $1-\frac{1}{2}y$ 的相關係數為 r_2 ，求 $r_1+r_2=?$ 【1.8】
33. 設 n 為正整數，令 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ ，求 $a_5+b_6+c_7+d_8=?$ 【320】
34. 有一 $\triangle ABC$ ，已知 D 、 E 、 F 依次在 \overline{BC} 、 \overline{CA} 、 \overline{AB} 上，且 $\overline{BD}=\overline{DC}$ ， $\overline{CE}=2\overline{EA}$ ， $\overline{AF}=3\overline{FB}$ ，又點 G 為 $\triangle DEF$ 的重心，若 $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ， x, y 為實數，求 $x+y=?$ 【25/36】
35. 已知 $A(2,1)$ ， $B(1,-2)$ 為平面上兩點，設 P 為 $x^2+y^2=10$ 的一動點，則所有可能的 $\triangle ABP$ 中，最大面積為何？【15/2】
36. 設 P 為雙曲線 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 上的動點，兩焦點 F_1 、 F_2 ，已知 $2\overline{PF_1} = 3\overline{PF_2}$ ，則 $\triangle PF_1F_2$ 的周長為何？【52】