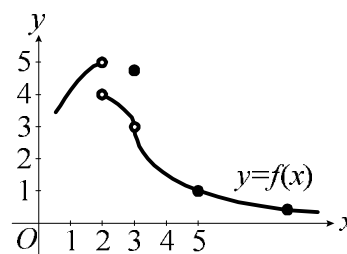


高雄中學 102 學年度第二學期高三自然組第一次期中考數學科試卷

一 多選題：

() 1. 下列數列哪些會收斂到 0? (1) $(-\frac{1}{3})^n$ (2) $\frac{(-1)^n}{n+1}$ (3) $3 \times (-0.9999)^n$ (4) $(\frac{6.14}{3+p})^n$ (5) $\frac{(0.6)^n}{(0.3)^n + (0.7)^n}$.

() 2. 設 $f(x)$ 之圖形如下, 則下列何者正確? (1) $f(2)$ 不存在 (2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 不存在 (3) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$



(4) $f(x)$ 在 $x=5$ 點連續 (5) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 不存在

() 3. 已知函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5$, 選出正確的選項:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{f(x)}{x-1} + \frac{x-1}{x}) = 5$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2(x-1)} = 5$ (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = 5$ (4) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ (5) $\lim_{x \rightarrow 1} (x \cdot f(x)) = 0$.

() 4. 設 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$, 下列何者為真? (1) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ (2) $f(x)$ 在 $x=2$ 連續 (3) $f(x)$ 在 $x=2$ 不連續

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在 (5) $f(x)$ 在 $x=1$ 連續.

二 填充題：

1. 若數列 $\frac{1}{3n+5}, \frac{5}{3n+5}, \frac{9}{3n+5}, \dots, \frac{4n-3}{3n+5}$ 為等差數列, 且這 n 項的算術平均數為 a_n , 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1+3+\mathbf{L}+(2n-1)} - \sqrt{2+4+\mathbf{L}+2n}) =$ _____.

3. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+3^2+3^3+\mathbf{L}+3^n}{2^n+3^n} =$ _____.

4. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3}{\sqrt{3n^2+1}} + \frac{3}{\sqrt{3n^2+2}} + \frac{3}{\sqrt{3n^2+3}} + \mathbf{L} + \frac{3}{\sqrt{3n^2+n}}) =$ _____.

5. 設 a, b 為實數, 且滿足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n^3+2n^2}{n^2+4n+1} - \frac{an^3+bn^2}{n^2+1}) = 3$, 求 $a+b$ 之值? = _____.

6. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{-2x}{x+2}$, 則 $x =$ _____.

7. 已知一無窮等比級數的首項為 $0.\overline{a}$, 第二項為 $0.0\overline{b}$, 第三項為 $0.00\overline{c}$, 其中 a, b, c 為正整數, 且 $1 < a < b < c < 9$,

求此無窮級數的和 = _____.

8. 有長為 1 的繩子一條, 切取 $\frac{3}{4}$ 圓一個正三角形, 令其面積為 S_1 , 從餘下的 $\frac{1}{4}$ 中再切取 $\frac{3}{4}$ 圓第二個正三角形, 令其面積為 S_2 ;

如此繼續為之, 求 $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ 的面積總和 = _____.

9. 設 $f(x) = \log_{(2-x)}(-x^2 - 2x + 15)$, 求其定義域 _____ (請用集合形式表之)

10. 函數 $f(x)$ 滿足下列三條件: $f(x+5) = f(x)$, $f(-x) = -f(x)$ $f(\frac{1}{3}) = 1$, 求: $f(\frac{29}{3}) = ?$ _____.

11. 求 $\sum_{k=1}^{20} [\log_2 k]$ 的值 = _____ 其中符號 [] 為高斯符號.

12. 求下列各極限: (1) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{x-5} =$ _____ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x-1| - |x+1|} =$ _____.

13. 設函數 $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & \text{當 } x < -1 \\ ax-1, & \text{當 } -1 \leq x < 2 \\ bx+11, & \text{當 } x \geq 2 \end{cases}$ 若 $f(x)$ 在所有實數 x 上每一點皆連續, 試求 $a+b$ 之值 _____.

14. 設 $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, 求使 $\sum_{k=1}^n f(k) > 0.99$ 的最小正整數 n 之值為何? _____.

15. 已知 $f(x)$ 為實係數三次多項式函數, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$, 求 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x-2} =$ _____.

三、證明題

1. 設 $f(x) = 3x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 4$, 試證: 在 1 與 2 之間, 存在一實數 k , 使得 $(2k+1)f(k) = g(k)$.

1. 12345 2. 124 3. 145 4. 125

1. $\frac{2}{3}$ 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{3}{2}$ 4. $\sqrt{3}$ 5. -4 6. $-\frac{1}{2}$ 7. $\frac{5}{18}$ 8. $\frac{\sqrt{3}}{60}$ 9. $\{x | -5 < x < 2, x \neq 1\}$

10. -1 11. 54 12. (1)不存在 (2) $-1/2$ 13. 6 14. 100 15. 108