高雄中學 102 學年度第 2 學期 高二第 2 次期中考數學科　試題卷　(自然組)

命題範圍：高二數學輔教 11-1 空間概念；11-2 空間坐標與空間向量；11-3 外積、體積與行列式

說明：請作答在答案卷上，須將答案填入正確欄位，否則不予計分。

一、多重選：每題至少有一個正確選項。每一題完全答對得7分，只答錯一個選項者得5分，只答錯兩個選項者得3分，其餘情形不給分。共21分。

1．設 a,b,c,d,e,f,g,h,i 皆為實數，關於行列式的性質，請選出恆成立的選項：

(1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - e\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + i\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 1 \\ g & h & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} = 0$　(5) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ d-e & e-f & f-d \\ g-h & h-i & i-g \end{vmatrix} = 0$

2．直角坐標空間中，$\overrightarrow{OA}=(-1,3,-2)$，$\overrightarrow{OB}=(2,-1,-1)$，請選出正確的選項：

(1) $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(1,1,1)$　(2) $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\perp(-1,-2,3)$　(3) ΔOAB 面積為 $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

(4) $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OA}$　(5) 至少存在一個實數 t 使得 $\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ 與 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ 平行

3．已知四面體 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ACD=\angle BCD=90^\circ$，請選出正確的選項：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=0$　(3) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

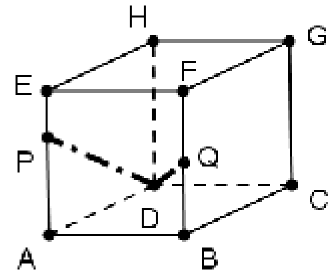
(4) 平面 BCD 與平面 ABC 互相垂直　(5) $\angle ADB>\angle ACB$

二、填充題：每題完全答對才給分，依下列配分表計分。共 67 分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
總得分	7	14	21	27	33	39	44	49	54	59	63	67

1．直角坐標空間中，設點 P 在第一卦限，已知 P 與 x 軸的距離為 3，P 與 y 軸的距離為 3，P 與 z 軸的距離為 4，則 P 的坐標為 ___(A)___

2．如圖一之正立方體，P 在 $\overline{AE}$ 上且 $\overline{EP}:\overline{PA}=1:2$，$Q$ 為 $\overline{BF}$ 中點，則 $\cos\angle PDQ=$ ___(B)___

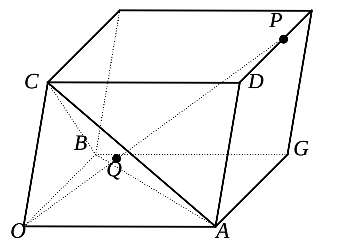


圖一

3．空間中已知 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$，$\overline{OA}=1$，$\overline{OB}=2$，$\overline{OC}=3$，則 ΔABC 之面積＝ ___(C)___

4．一個平行六面體如圖二，$\overline{DP}:\overline{PE}=2:1$，$\overline{OP}$ 與平面 ABC 交於 Q，

若 $\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，則實數序對 $(x,y,z)=$ ___(D)___



圖二

5．若 $\begin{vmatrix} 3a_1+4b_1 & 2a_1+3c_1 & 5c_1 \\ 3a_2+4b_2 & 2a_2+3c_2 & 5c_2 \\ 3a_3+4b_3 & 2a_3+3c_3 & 5c_3 \end{vmatrix}=120$，則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$ ___(E)___

6．直角坐標空間中，點 $O(0,0,0)$ ，$A(1,1,1)$ ，$B(1,2,2)$ ，P 為滿足 $\overline{AP}=2$ 之動點，則 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}$ 之最小值為 ___(F)___

7．直角坐標空間中，已知 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(x,5,6)$ ，$x>0$，$\overrightarrow{g}=(2,-3,4)$ ，已知由 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{g}$ 所展成的平行六面體體積為 15，

則由 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 所展成的平行四邊形面積為 ___(G)___

8．有哪些實數 x 滿足 $\begin{vmatrix} x^2-x & x^2-2x & x^2-3x \\ x^2+4 & x^3+4 & x^4+4 \\ x^4+5 & x^2+5 & x^3+5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-2 & 2x-2 & 3x-2 \\ x^2+4 & x^3+4 & x^4+4 \\ x^4+5 & x^2+5 & x^3+5 \end{vmatrix}=0$ ？ ___(H)___

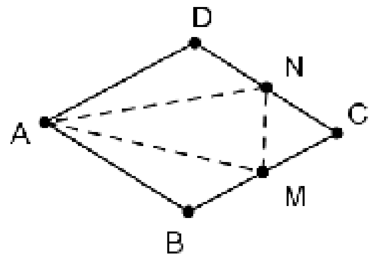
9．正四面體 $ABCD$ 中，$\overline{AC}$ 、$\overline{AD}$ 、$\overline{BD}$ 中點分別為 P、Q、R，通過 P、Q、R 三點的平面與此正四面體表面相截，下列何者為其截痕的形狀？(單選題) ___(I)___

(1) 正三角形　(2) 等腰直角三角形　(3) 正方形　(4) 非正方形的菱形　(5) 五邊形

10．直角坐標空間中，正四面體 $ABCD$，已知 $B(0,0,0)$ 、$C(0,a,b)$ 、$D(0,c,d)$ ，ΔBCD 之重心 $G(0,4,3)$ ，求 A 點坐標。(兩解) ___(J)___

11．四面體 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=13$，$\overline{BC}=8$，$\overline{CD}=6$，$\overline{BD}=10$，則四面體 $ABCD$ 的體積為 ___(K)___

12．如圖三之菱形 $ABCD$，已知 $\angle B=120^\circ$，M 為 $\overline{BC}$ 中點，N 為 $\overline{CD}$ 中點，分別以虛線 $\overline{AN}$ 、$\overline{AM}$ 、$\overline{MN}$ 為折線，將 ΔADN 、ΔABM 、ΔCMN 往上折，使 B,C,D 折至同一點 P，形成一個四面體 $PAMN$，設平面 PAN 與平面 PAM 之夾角為 θ，則 $\sin q=$ ___(L)___



圖三

三、計算證明題：請完整寫出推證過程，若過程不完整則部份給分。共12分。

1．若 x,y 的方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \\ a_3x+b_3y=c_3 \end{cases}$ 有解，試證：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$。　(6 分)

2．已知 t 為實數，直角坐標空間中，$\overrightarrow{a}=(-1,2t-1,3)$ ，$\overrightarrow{b}=(1,4,t+2)$，實數 x,y 滿足 $(x-2)\overrightarrow{a}+(y-3)\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ ，求 x,y 之解。　(6 分)

高雄中學 102 學年度第 2 學期 高二第 2 次期中考數學科　答案卷 (自然組)

得　　分

班級：2 年______組　　座號：______　　姓名：______________

一、多重選：每題至少有一個正確選項。每一題完全答對得7分，只答錯一個選項者得5分，只答錯兩個選項者得3分，其餘情形不給分。共21分。

1.		2.		3.	

二、填充題：每題完全答對才給分，依下列配分表計分。共 67 分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
總得分	*7*	*14*	*21*	*27*	*33*	*39*	*44*	*49*	*54*	*59*	*63*	*67*

(A)		(B)		(C)		(D)	
(E)		(F)		(G)		(H)	
(I)		(J)		(K)		(L)	

三、計算證明題：請完整寫出計算證明過程，若過程不完整則部份給分。共12分。

1.	2.

To：＿＿＿＿＿＿＿＿ 師，請指正。

高雄中學 102學年度第2學期 高二第2次期中考數學科 答案卷 (自然組) <<參考解答>>

一、多重選：每題至少有一個正確選項。每一題完全答對得7分，只答錯一個選項者得5分，只答錯兩個選項者得3分，其餘情形不給分。共21分。

1.	345	2.	23	3.	124

二、填充題：每題完全答對才給分，依下列配分表計分。共67分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
總得分	*7*	*14*	*21*	*27*	*33*	*39*	*44*	*49*	*54*	*59*	*63*	*67*

(A)	$(2\sqrt{2},2\sqrt{2},1)$	(B)	$\frac{8\sqrt{13}}{39}$	(C)	$\frac{7}{2}$	(D)	$(\frac{3}{8},\frac{1}{4},\frac{3}{8})$
(E)	-3	(F)	-1	(G)	$\sqrt{70}$	(H)	$x=0,1,\pm\sqrt{2}$
(I)	3	(J)	$(5\sqrt{2},4,3)$ $(-5\sqrt{2},4,3)$	(K)	96	(L)	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

三、計算證明題：請完整寫出計算證明過程，若過程不完整則部份給分。每題6分，共12分。

1.

證：若 x,y 的方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\\a_3x+b_3y=c_3\end{cases}$ 有解，

設 (x_0,y_0) 為其一組解，

則 $\begin{cases}a_1x_0+b_1y_0=c_1\\a_2x_0+b_2y_0=c_2\\a_3x_0+b_3y_0=c_3\end{cases}$。

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&a_1x_0+b_1y_0\\a_2&b_2&a_2x_0+b_2y_0\\a_3&b_3&a_3x_0+b_3y_0\end{vmatrix}$$

(分別將第1行乘以 $-x_0$、第2行乘以 $-y_0$，加到第3行)

$=\begin{vmatrix}a_1&b_1&0\\a_2&b_2&0\\a_3&b_3&0\end{vmatrix}=0$，得證。

(因為第3行全為0，由行列式的性質可知行列式值為0)

(*若學生只考慮恰一解的情形而使用克拉瑪公式 $x=\frac{\Delta_x}{\Delta},y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$，由前兩式的解代入第三式的證明方式，則建議酌扣1分*)

2. 答案：$x=2,y=3$

解：先驗證 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 不平行。

若 $\overrightarrow{a}=(-1,2t-1,3)\,//\,\overrightarrow{b}=(1,4,t+2)$，則

$\frac{-1}{1}=\frac{2t-1}{4}=\frac{3}{t+2}$，

由 $\frac{-1}{1}=\frac{2t-1}{4}$ 得 $t=-\frac{3}{2}$，

由 $\frac{-1}{1}=\frac{3}{t+2}$ 得 $t=-5$，矛盾，故 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 不平行。

因為 $(x-2)\overrightarrow{a}+(y-3)\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$ 且 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 不平行，

因此 $(x-2)=(y-3)=0$，得 $x=2,y=3$。

(*若只猜測 $x=2,y=3$ 則只給1分；*

若直接寫 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 不平行而得答案 $x=2,y=3$，卻未作驗證，則只給3分)