

高雄中學一零二學年度第二學期期末考高二第二三類組數學科試題

一、填充題:(共計 82 分)

1. 設矩陣 $A=[a_{ij}]_{10 \times 10}$, 且 $a_{ij}=i^2-3j, 1 \leq i, j \leq 10, i, j \in N$, 則 A 的所有元的總和為_____

2. 將被 3 除餘 1 的自然數排成矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 16 & 28 & \mathbf{L} \\ 4 & 13 & 25 & \mathbf{L} \\ 10 & 22 & \mathbf{L} \\ 19 & \mathbf{L} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix}$, 若 A 的第 (i, j) 元 $a_{ij}=346$, 則數對 $(i, j)=$ _____

3. 若矩陣 $\begin{bmatrix} a & 1 & 2 & -6 \\ b & 5 & -1 & 32 \\ 10 & 1 & 12 & c \end{bmatrix}$ 經過一系列的列運算後可化成矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 則有序數組 $(a, b, c)=$ _____

4. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{bmatrix}$, 若 $0 < \theta < p$, 則滿足 $A^9=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 的所有 q 的和為_____

5. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, 若 $A+A^2+A^3+\mathbf{L}+A^{2012}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 則有序數組 $(a, b, c, d)=$ _____

6. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 若數列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 滿足 $a_{n+1}=2a_n+b_n, b_{n+1}=3a_n+2b_n, n \in N$, 且 $\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ b_{n+3} \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$, 則有序數組 $(a, b, c, d)=$ _____

7. 設矩陣 A, B 滿足 $A-B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, AB=\begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$, 則矩陣 $A^2-BA+B^2=$ _____

8. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, I_3$ 為三階單位方陣, 且若 $(I_3+\frac{1}{3}A)^7=aI_3+bA$, 其中 $a, b \in R$, 則數對 $(a, b)=$ _____

9. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 若 $BA=I_3$ (三階單位方陣), 則 x, y, z 的一次方程組

$$\begin{cases} ax+by+cz=1 \\ dx+ey+fz=-2 \\ gx+hy+kz=3 \end{cases} \text{ 的解 } (x, y, z)=$$

10. 設甲箱內有 2 個白球, 乙箱內有 3 個紅球, 每次自各箱中隨機取一球交換, 則

(1) 交換二次後, 甲箱內有 1 個白球 1 個紅球的機率為_____

(2) 經長期交換後, 甲箱內有 1 個白球 1 個紅球的機率為_____

11. 設二階方陣 A 與 B 的乘法反矩陣分別為 A^{-1} 與 B^{-1} , 且 $A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 17 & 39 \\ 24 & 55 \end{bmatrix}$, $B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 35 & 48 \\ 27 & 37 \end{bmatrix}$, 則矩陣 $AB =$

12. 設二階方陣 A 滿足 $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$, $A^5 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -13 \end{bmatrix}$, 則矩陣 $A =$ _____

二、多重選擇題:(每題 6 分,共計 18 分)

說明:每題的五個選項各自獨立,其中至少有一個選項是正確的,選出正確選項填在答案卷之答案欄。每題皆不倒扣,五個選項全部答對者得 6 分,只錯一個選項可得 3 分,錯兩個選項可得 1 分,錯兩個以上選項不給分。

1. 設 $a, b, c \in \mathbb{R}$, x, y, z 的一次方程組 $(L): \begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+bz=-1 \\ x+4y+(4a-b)z=5 \\ 2x+10y+7z=c \end{cases}$ 的係數矩陣為 A , 增廣矩陣為 M ,

則下列哪些選項是正確的?

- (A) A^T 為 4×3 階矩陣 (B) $(M+M^T)^T = M+M^T$ (C) 若 (L) 有解,則必定有無限多解
 (D) 若 (L) 有解,則 $11a-3b \neq 7$ (E) 若 (L) 無解,則 $c \neq 14$

2. 設 A, B 為三階方陣, I_3 為三階單位方陣, O 為三階零方陣, 則下列哪些選項必定是正確的?

- (A) $(AB)^T = B^T A^T$ (B) $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
 (C) 若矩陣 C 滿足 $AC = AB$, 且 $A \neq O$, 則 $C = B$ (D) $\det(2A) = 2\det(A)$
 (E) 若 A 的所有元均為實數, 且 $A^T = -A$, 則 $I_3 - A$ 必為可逆方陣

3. 設 x, y, z 的一次方程組 $(L_1): \begin{cases} ax+by+cz=1 \\ dx+ey+fz=0 \\ gx+hy+kz=0 \end{cases}$; r, s, t 的一次方程組 $(L_2): \begin{cases} ar+bs+ct=0 \\ dr+es+ft=1 \\ gr+hs+kt=0 \end{cases}$

u, v, w 的一次方程組 $(L_3): \begin{cases} au+bv+cw=0 \\ du+ev+fw=0 \\ gu+hv+kw=1 \end{cases}$, 其中 $a, b, c, d, e, f, g, h, k \in \mathbb{R}$, 矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} x & r & u \\ y & s & v \\ z & t & w \end{bmatrix}$, 若方程組 $(L_1), (L_2), (L_3)$ 均恰有一組解, 則下列哪些選項是正確的?

- (A) $\det(B) \neq 0$ (B) A 的乘法反元素必存在 (C) $AB = BA$
 (D) 若 C 為三階方陣, $n \in \mathbb{N}$, 則 $(ACB)^n = AC^n B$ (E) 若矩陣 D 滿足 $AD = B$, 則 $D = B^2$

高二_____班 座號_____ 姓名_____

一、填充題:(共計 82 分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
得 分	8	16	24	32	40	48	56	62	68	73	76	79	82

1. 2200	2. (5,11)	3. (-3,2,23)	4. $\frac{16p}{9}$
5. $(0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0)$	6. (26,15,45,26)	7. $\begin{bmatrix} 19 & 16 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$	8. $(1, \frac{127}{3})$
9. (-2,8,1)	10.(1) $\frac{1}{2}$	10.(2) $\frac{3}{5}$	11. $\begin{bmatrix} -37 & 48 \\ 27 & -35 \end{bmatrix}$
12. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$			

二、多重選擇題:(每題 6 分,共計 18 分)

說明:每題的五個選項各自獨立,其中至少有一個選項是正確的,選出正確選項填在答案卷之答案欄。
每題皆不倒扣,五個選項全部答對者得 6 分,只錯一個選項可得 3 分,錯兩個選項可得 1 分,錯兩個以上選項不給分。

1. BE	2. AE	3. ABCDE
---------------------	---------------------	------------------------