

高雄中學 103 學年度第一學期高一第一次期中考數學科試卷

一 是非題：10分(每題2分)

( x ) 1. 若  $a = -\frac{982}{987}$  ,  $b = -\frac{9871}{9876}$  ,  $c = -\frac{987649}{987654}$  , 則  $a < b < c$  。

( o ) 2. 若  $a$  為有理數,  $b$  為無理數, 且  $ab \neq 0$  , 則  $a+b$  ,  $a-b$  ,  $ab$  ,  $\frac{a}{b}$  , 均為無理數。

( o ) 3. 設  $A, B$  為集合,  $((A \cap B') \cup B)' = B' - A$  。

( x ) 4.  $2\sqrt{3} - \sqrt{15} > 2 - \sqrt{5}$

( o ) 5.  $a, b, c$  均為實數, 並滿足下列四條件:  $a+b+c < 0$  ,  $ab+bc+ca < 0$  ,  $abc < 0$  ,  $a > b > c$  , 則  $|c| > |a| + |b|$

二 填充題：70分

1. 設  $p$  表敘述 “  $x^2 - 4 = 0$  ” ,  $q$  表敘述 “  $3x^2 + 5x - 2 = 0$  ” , 若  $\bar{p} \wedge q$  為真, 求  $x =$  \_\_\_\_\_ . 1/3

2. 已知  $a, b$  均為正實數, 且  $2a + 3b = 10$  , 當  $ab$  有最大值  $M$  時, 此時  $a + b = t$  , 求  $M + t =$  \_\_\_\_\_ . 25/3

3. 1 到 1000 的正整數中, 先刪去所有 2 的倍數, 再刪去所有 3 的倍數, 再刪去所有 5 的倍數,

則最後剩下多少個數? \_\_\_\_\_ . 266

4. 設  $g(x) = 2x + 3$  ,  $h(x) = 4x^2 + 14x + 13$  , 而  $f(x)$  為二次函數, 若  $f(g(x)) = h(x)$  , 求  $f(x) =$  \_\_\_\_\_ .  $x^2 + x + 1$

5.  $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-3x+2} + \sqrt{3x-x^2}$  , 則  $f(x)$  的定義域為? \_\_\_\_\_ .  $\{x | 0 \leq x \leq 3, x \neq 1, 2\}$

6. 不等式  $|ax+7| \leq b$  之解為  $-1 \leq x \leq 5$  , 求  $b-a =$  \_\_\_\_\_ . 14

7. 已知  $f(x)$  為奇函數, 且  $f(x+8) = f(x)$  ,  $f(2) = \frac{1}{2}$  ,  $f(-\frac{1}{2}) = 2$  , 求  $f(2014) + f(\frac{15}{2}) =$  \_\_\_\_\_ . 3/2

8. 數線上  $A(a)$  ,  $B(b)$  兩點,  $a < b$  , 在  $A, B$  之間有  $P(1)$  ,  $Q(8)$  兩點, 已知  $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$  ,  $\overline{QA} : \overline{QB} = 5 : 4$  ,

則線段  $AB$  的長度為何? \_\_\_\_\_ . 45

9. 設  $k, m \in \mathbf{R}$  , 若  $|x+1| \leq 2$  , 則  $|x-1| \leq k$  ,  $k$  之最小值為  $a$  ; 若  $|x-1| \leq m$  , 則  $|x+1| \leq 4$  ,  $m$  之最大值為  $b$  ,

求  $a+b =$  \_\_\_\_\_ .6

10. 點  $B$  在  $\overline{AC}$  上 , 已知  $\overline{AB} = 9$  ,  $\overline{BC} = 11 - 6\sqrt{2}$  , 以  $\overline{AC}$  為直徑作半圓 , 並過  $B$  作垂直  $\overline{AC}$  的直線交半圓於  $D$  點 ,

若  $\overline{BD} = a + b\sqrt{2}$  ,  $a, b$  均為有理數 , 則數對  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_ .(9,-3)

11. 有一既約分數 , 其分子分母的和為 70 , 並將其化為小數 , 四捨五入取近似值至小數點後第一位為 0.8 ,

則此分數為 \_\_\_\_\_ .31/39

12. 已知  $a, b$  均為正實數 , 且  $a - b = 2\sqrt{2}$  ,  $ab = 7$  , 求  $a^5 + b^5 =$  \_\_\_\_\_ .1686

13. 設  $A = \{3, -4, a^3 - 4a^2 - a + 1\}$  ,  $B = \{-3, 5, a^2 - 5a + 7, a - 5\}$  , 且  $A \cap B = \{3, -3\}$  , 求  $B - A =$  \_\_\_\_\_  $\{5, -1\}$  .

14. 已知  $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{2x+5}{3x-2}$  , 則  $f(2x) =$  \_\_\_\_\_  $\frac{14x-3}{2x+5}$  .

15. 滿足  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{400}$  的最小正整數  $n$  為何? \_\_\_\_\_ 40000

16.  $a$  是正實數 ,  $a$  的小數部分是  $b$  , 且  $a^2 + b^2 = 40$  , 求  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} =$  \_\_\_\_\_ -3

三、計算、證明題 : 20 分【需將證明演算討論的過程完整寫在答案卷上 , 只寫答案不予計分。】

1. 因式分解  $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2$  (8 分)

$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

2. (1) 試描繪  $y = f(x) = 2|x-1| + |x+3|$  之函數圖形【需有討論過程】 (6 分)

(2) 解  $2|x-1| + |x+3| \geq 10$  (6 分)  $x \geq 3$  或  $x \leq -\frac{11}{3}$