

高雄中學 103 學年度第一學期一年級第三次月考數學科考題

本試卷符號： \mathbb{N} ：自然數所成的集合； \mathbb{Q} ：有理數所成的集合； \mathbb{R} ：實數所成的集合； \mathbb{C} ：複數所成的集合； $i = \sqrt{-1}$

一、多重選擇題(21%)

(第 1 至 3 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 7 分。若答錯 1 個選項，可得 5 分；答錯 2 個選項，可得 3 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項，該題以零分計算。)

1. 設 $x^2 + 4x + 1 = 0$ 之兩根為 a ， b ，則下列選項何者為真？

(A) $a^2 + b^2 = 14$

(B) $a^3 + b^3 = -70$

(C) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = 12$

(D) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \pm\sqrt{6}i$

(E) $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \pm\sqrt{2}i$

2. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 為實係數三次多項式，其中 $a < 0$ ，若已知 $f(1) > 0$ ， $f(5) < 0$ ，複數 $-4 + 3i$ 為方程式 $f(x) = 0$ 之一根，則下列選項何者為真？

(A) $f(2014) < 0$

(B) $b > 0$

(C) $y = -4x + 3$ 與 $y = f(x)$ 的圖形必有交點

(D) 沒有實數 x 滿足 $f(x^3) = x^3$

(E) $f(\sqrt{17}i) + f(-\sqrt{17}i) > 0$

3. 下列敘述何者為真？

(A) 設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 為整係數 n 次多項式，若 $p | a_n$ 且 $q | a_0$ ，其中 p, q 為二互質整數， $p \neq 0$ ，則 $px - q$ 為 $f(x)$ 之一次因式

(B) 設 $y = f(x)$ 為一實係數 $n (n \in \mathbb{N})$ 次多項式函數，若在區間 (a, b) 存在一實數 c 滿足 $f(c) = 0$ ，則 $f(a) \times f(b) < 0$

(C) 設 $a, b \in \mathbb{Q}$ ， $\sqrt[n]{b} \notin \mathbb{Q}$ ，若 $a + \sqrt[n]{b}$ 為有理係數 $n (n \geq 2)$ 次方程式 $f(x) = 0$ 的一根，則 $a - \sqrt[n]{b}$ 亦為方程式 $f(x) = 0$ 的一根。

(D) $\sqrt[4]{19}$ 為方程式 $x^4 - 19 = 0$ 的唯一正實根

(E) 方程式 $(x^2 + x + 103)^3 + 2014 = 0$ 無實數解

二、 填充題(55%)(每格 5 分)

1. 化簡 $\left(\frac{5}{1-3i} + \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{-13}}\right)^{20} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 若多項式 $f(x) = (5x+1)^5 - 4(5x+1)^4 - 72(5x+1)^3 - 56(5x+1)^2 + 15(5x+1) - 6$ ，試求 $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 若多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 + x - 2$ 的餘式為 $3x + 5$ ；且多項式 $g(x)$ 除以 $x^2 + 3x + 2$ 的餘式為 $-x - 6$ ，試求以 $x + 2$ 除 $(3x + 4)f(x) - x^3g(x)$ 的餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. $\deg f(x) \geq 3$ ，若 $f(x)$ 以 $x + 2$ 除之餘式為 19 ，以 $2x^2 + x + 3$ 除之餘式為 $2x + 5$ ，則 $f(x)$ 以 $(x + 2)(2x^2 + x + 3)$ 除之餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 試求多項式 $f(x) = x^{37} - 2x^{26} + 4x^7 - 3$ 除以 $x^2 + 1$ 之餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 設 $(z + 1)(z - 1) = 4 - 12i$ ，求複數 z 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(兩解)
7. (1) 因式分解 $3x^3 - 13x + 2$ 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
(2) 若 a 、 b 、 g 為 $3x^3 - 13x + 2 = 0$ 之三根，則 $(a + b - 2g)(b + g - 2a)(g + a - 2b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 若 $f(x)$ 表領導係數為 1 之四次整係數多項式，而且 $f(1) = 1$ ， $f(2) = 4$ ， $f(3) = 9$ ，試求 $f(7) + f(-3)$ 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 設 $f(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - 7x + 7$ ，則 $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}\right)$ 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 已知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 為任意實係數三次多項式函數，若 $f(12) = k \times f(6) + l \times f(8) + m \times f(9) + n \times f(10)$ ，試求序對 $(k, l, m, n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、 計算題(24%)(注意：作答過程須正確、清楚、合理，否則酌量扣分)

1. 設多項式 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 4 = a(x - 2)^3 + b(x - 2)^2 + c(x - 2) + d$ ，其中 a 、 b 、 c 、 d 是常數，
 - (1) 試求序對 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(4%)
 - (2) 計算 $f(2.01)$ 的近似值至小數點後第二位(第三位四捨五入)。(4%)
 - (3) 試找出方程式 $2x^3 + 3x^2 - 8x - 4 = 0$ 各實根在哪兩個連續整數之間。(6%)
2. 設 $x^4 - x^3 + c^2x^2 + 3x + (2c + 1) = 0$ 為一實係數方程式且有一虛根 $1 + ci$ ，試求 c 及此方程式的解。(10%)

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

四、多重選擇題(21%)

(第 1 至 3 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 7 分。若答錯 1 個選項，可得 5 分；答錯 2 個選項，可得 3 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項，該題以零分計算。)

1. AE	2. ACE	3. DE
-------	--------	-------

五、填充題(55%)(每格 5 分)

1. $-\frac{1}{1024}$	2. 38	3. -30	4. $4x^2 + 4x + 11$
5. $-3x - 1$	6. $\pm(3 - 2i)$	7. (1) $(x - 2)(3x^2 + 6x - 1)$	7. (2) 18
8. 1258	9. 9	10. $(-1, 9, -16, 9)$	

六、計算題(24%)(注意：作答過程須正確、清楚、合理，否則酌量扣分)

<p>1.</p> <p>(1) $(a, b, c, d) = (2, 15, 28, 8)$ (4%)(答對一個各給一分)</p> <p>(2) 8.28 (4%)</p> <p>(3) $(-3, -2), (-1, 0), (1, 2)$ (6%)(答對一個各給二分)</p>	<p>2.</p> <p>$c = 2$ (6%)(多寫一個答案扣三分)</p> <p>根：$1 \pm 2i \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}}$ (4%)(答對一個各給一分)</p>
--	---